

Л.С.АТАНАСЯН В.Т.БАЗЫПЕВ

# ГЕОМЕТРИЯ



ЧАСТЬ

II

Л.С.АТАНАСЯН В.Т.БАЗЫЛЕВ

# ГЕОМЕТРИЯ

в 2-х частях

**Допущено**  
Министерством просвещения СССР  
в качестве учебного пособия для студентов  
физико-математических факультетов  
педагогических институтов

ЧАСТЬ II

МОСКВА  
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1987

ББК 22.151  
А92

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, ст. научн. сотрудник МГУ  
Л. Е. Евтушик;  
кафедра геометрии Вильнюсского пединститута  
(зав. кафедрой проф. В. И. Близнакас)

**Атанасян Л. С., Базылев В. Т.**

А92 Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед.  
ин-тов. В 2 ч. Ч. 2.— М.: Просвещение, 1987.—352 с.: ил.

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса геометрии для математических и физико-математических факультетов педагогических институтов и состоит из двух частей. Первая часть вышла в свет в 1986 г. Она охватывает в основном материал, читаемый на первых трех семестрах. Вторая часть пособия содержит материал последующих семестров.

В курсе уделено большое внимание профессиональной направленности в подготовке будущего учителя. Изложение теории сопровождается примерами решения геометрических задач, в том числе задач курса геометрии средней школы.

А  $\frac{4309000000-592}{103(03)-87}$  21-87



ББК 22.151

© Издательство «Просвещение», 1987

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вниманию читателя учебное пособие является непосредственным продолжением книги «Геометрия, ч. I» Л. С. Атанасяна, В. Т. Базылева. Настоящая книга вместе с первой частью охватывает весь курс, предусмотренный программой по геометрии для студентов математических и физико-математических факультетов педагогических институтов.

Книга написана на основе лекций, прочитанных авторами на математическом факультете МГПИ им. В. И. Ленина.

Настоящее пособие существенно отличается от уже изданных издательством «Просвещение» пособий Л. С. Атанасяна, Г. Б. Гуревича «Геометрия, ч. II» и В. Т. Базылева, К. И. Дуничева «Геометрия, ч. II» как по отбору и расположению материала, так и по стилю изложения. Новое пособие по сравнению с этими книгами отличается более тщательным отбором материала и более доступным изложением (не в ущерб строгости). В связи с этим объем пособия оказался сокращенным.

Терминология и символика, принятые в пособии, по возможности согласованы с теми, которые в настоящее время вводятся в среднюю школу.

Настоящая книга охватывает три раздела программы: проективное пространство и методы изображений; элементы топологии, многогранники, линии и поверхности в евклидовом пространстве; основания геометрии.

Геометрия проективного пространства дана в векторном изложении по схеме Вейля. В главе «Методы изображений» существенно используется теория аффинных преобразований, изложенная в первой части курса.

В соответствии с программой гл. I раздела IV курса посвящена элементам топологии. Эта глава носит вспомогательный характер и содержит необходимый материал для изложения последующих глав. Изложение вопросов дифференциальной геометрии дано на топологической основе, что позволило четко определить такие важные понятия, как «линия» и «поверхность». Изложение главы, посвященной многогранникам, также тесно связано с элементами топологии.

Раздел «Основания геометрии» содержит краткий исторический обзор обоснования геометрии. В этом обзоре, в частности, освещена роль работ Н. И. Лобачевского, которые, как известно, привели к широким обобщениям в геометрии и их важнейшим приложениям в различных разделах математики и естествознания. В этом же разделе изложены общие вопросы аксиоматики, элементы геометрии Лобачевского и даны понятия о сферической и эллиптической геометриях.

При работе над этой книгой авторы руководствовались общими принципами, которые изложены в предисловии к первой части учебного пособия. В соответствии с требованиями реформы общеобразовательной и профессиональной школы в курсе уделено большое внимание профессиональной направленности подготовки будущего учителя. Эти вопросы должным образом отражены во всех трех разделах, представленных в настоящей книге. Так, например, последний параграф гл. II целиком посвящен решению задач школьного курса геометрии методами проективной геометрии. Как было отмечено выше, гл. III целиком посвящена методам изображений, играющим весьма важную роль в профессиональной подготовке будущего учителя. В этой главе теория изображений фигур дана в параллельной проекции, т. е. так, как этот

вопрос излагается в школьных учебниках по геометрии. Больше внимание уделено построению сечений многогранников, причем изложенный здесь метод построения сечений может быть непосредственно использован в курсе стереометрии средней школы.

В разделе IV специальная глава посвящена многогранникам евклидова пространства. Изложение этой главы приближено по стилю к школьному курсу геометрии, поэтому материал этой главы окажет существенную помощь будущим учителям в грамотном изложении тех разделов стереометрии, которые связаны с теорией многогранников.

Отметим, что весь раздел «Основания геометрии» играет первостепенную роль в профессиональной подготовке будущего учителя, поэтому авторы подвергли определенной переработке материал, данный ими в ранее изданных пособиях. Прежде всего отметим, что авторы сочли целесообразным изменить порядок изложения курса и раздел «Основания геометрии» поместить после раздела, посвященного элементам топологии и дифференциальной геометрии. Это позволит более тесно связать курс геометрии с курсом методики преподавания математики и с программой педагогической практики студентов по специальности.

Далее, расширена гл. IX, посвященная историческому обзору обоснования геометрии. Здесь в доступной для студентов форме и по стилю, близкому к школьному курсу геометрии, даны основы геометрии Лобачевского — теория параллельных, свойства треугольников и четырехугольников и другие простейшие факты геометрии Лобачевского. Этот материал может быть с успехом использован студентами в школе для проведения факультативных занятий по геометрии в старших классах.

Важной с профессиональной точки зрения является гл. XI «Длина, площадь и объем», изложение которой приближено к школьной практике. Материал этой главы поможет будущему учителю разобраться в сложных вопросах измерения геометрических величин.

Отметим, наконец, что в гл. X имеются два параграфа, целиком посвященные аксиоматике школьного курса геометрии. В одном из этих параграфов изложена аксиоматика школьного курса геометрии А. В. Погорелова, который сейчас в основном вводится в среднюю школу. В другом параграфе приведены другие аксиоматики, на которых базируются экспериментируемые в настоящее время некоторые пробные учебники по геометрии.

Авторы выражают глубокую благодарность преподавателям кафедры геометрии МГПИ им. В. И. Ленина за ценные замечания, сделанные ими при чтении рукописи, а также при проведении экспериментальной проверки всех глав пособия.

Авторы считают также своим приятным долгом выразить благодарность кафедре геометрии Вильнюсского пединститута (зав. кафедрой профессор Близнакас В. И.) и доктору физико-математических наук, старшему научному сотруднику МГУ Евтушику Л. Е., которые внимательно прочитали рукопись и дали ряд ценных указаний, направленных на улучшение содержания учебного пособия.

*Атанасян Л. С., Базылев В. Т.*

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО.  
МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Глава I

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Центральное проектирование. Возникновение проективной геометрии

1. Проективная геометрия возникла в первой половине XIX в. Ее возникновение связано с именем известного французского математика Понселе (1788—1867). Он выделил как объект изучения некоторые особые свойства геометрических фигур, которые названы им проекттивными. Эти свойства связаны с понятием центрального проектирования, которое вводится следующим образом.

Рассмотрим в евклидовом пространстве  $E_3$  две плоскости  $\pi$  и  $\sigma$  и точку  $O$ , не лежащую в этих плоскостях (рис. 1). Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости  $\pi$ . Точка  $M'$  пересечения прямой  $OM$  с плоскостью  $\sigma$  называется *проекцией точки  $M$  на плоскость  $\sigma$  (из центра  $O$ )*. Точке  $M$  плоскости  $\pi$  поставим в соответствие ее проекцию  $M'$  на плоскость  $\sigma$  из центра  $O$ . Таким образом, устанавливается соответствие между точками плоскостей  $\pi$  и  $\sigma$ , которое называется *центральным проектированием* плоскости  $\pi$  на плоскость  $\sigma$  из точки  $O$ .

Если  $\Phi$  — произвольная фигура плоскости  $\pi$ , то множество проекций всех точек фигуры  $\Phi$  на плоскость  $\sigma$  является фигурой плоскости  $\sigma$ , которая называется *проекцией фигуры  $\Phi$* . Принимая за центр проектирования различные точки и изменяя положение плоскости  $\sigma$ , для одной и той же фигуры  $\Phi$  получаем различные фигуры  $\Phi'$ . При этом, очевидно, многие свойства фигуры  $\Phi$  искажаются: меняются длины отрезков, а также величины углов; параллельные прямые, вообще говоря, проектируются в пересекающиеся прямые; проектируя параллелограмм, можно получить четырехугольник, который не является параллелограммом, и т. д. Более того, проектируя отрезок, можно получить луч: например, на рисунке 2  $OB \parallel \sigma$ , поэтому точка  $B$  не имеет проекции на плоскости  $\sigma$ , и, следовательно, проекцией отрезка  $AB$  без точки  $B$  яв-

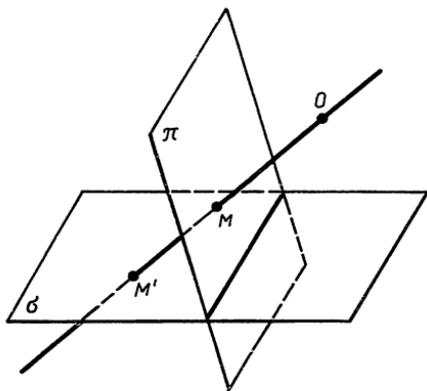


Рис. 1

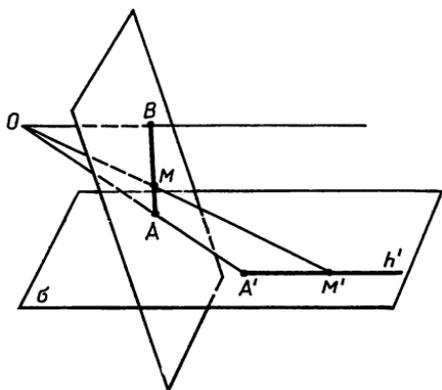


Рис. 2.

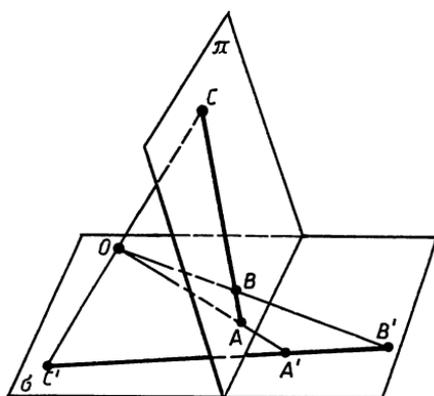


Рис. 3

ляется луч  $h'$ , исходящий из точки  $A'$ . Проектируя окружность, можно получить эллипс, параболу или гиперболу. Гипербола получается в том случае, когда плоскость, проходящая через точку  $O$  параллельно плоскости  $\sigma$ , пересекает окружность в двух точках  $M_1$  и  $M_2$ . Эти точки, очевидно, не имеют проекций, и каждая дуга окружности с концами в  $M_1$  и  $M_2$  (без этих точек) проектируется в ветви гиперболы.

С другой стороны, некоторые свойства фигуры  $\Phi$  сохраняются при любом центральном проектировании. Эти свойства фигур Понселе назвал проективными. Таким свойством является, например, свойство точек лежать на одной прямой или свойство точек лежать на одной линии второго порядка. Однако интересно отметить, что свойство точки лежать между двумя другими не является проективным (рис. 3). Метрические свойства фигуры (т. е. свойства, связанные с длинами отрезков и величинами углов) также не являются проективными свойствами фигуры. Не являются проективными также свойства, связанные с параллельностью прямых.

В начале своего возникновения проективная геометрия имела довольно ограниченную область приложений, связанную, главным образом, с теорией проектирования фигур в евклидовом пространстве. Несмотря на это, она привлекла к себе внимание многих геометров. Серьезный вклад в эту теорию, помимо Понселе, внесли Шаль (1793—1880) и Штейнер (1793—1863). По мере накопления фактов эта ветвь геометрии постепенно освободилась от метрических понятий и превратилась в самостоятельную дисциплину. При этом существенную роль сыграли работы Штаудта (1798—1867). В конце XIX в. исследования по основаниям геометрии объединились с исследованиями по проективной геометрии, и в рамках последней возникла глубокая теория, включающая в единую схему геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.

2. В превращении проективной геометрии в самостоятельную дисциплину существенную роль сыграло введение так называемых

несобственных (или бесконечно удаленных) геометрических элементов.

Рассмотрим центральное проектирование  $f$  плоскости  $\pi$  на плоскость  $\sigma$  из точки  $O$ . Если плоскости  $\pi$  и  $\sigma$  параллельны, то  $f$  — взаимно однозначное отображение плоскости  $\pi$  на плоскость  $\sigma$ . Если же плоскости  $\pi$  и  $\sigma$  не параллельны, то  $f$  не взаимно однозначно. В самом деле, на плоскости  $\pi$  имеются точки, которые не имеют образов

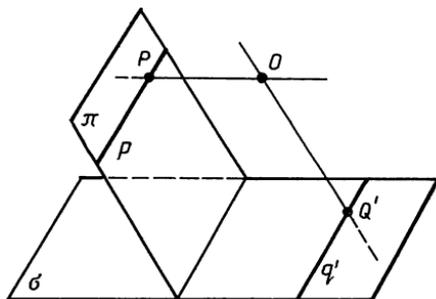


Рис. 4

на плоскости  $\sigma$  (например, точка  $P$  на рис. 4, где  $OP \parallel \sigma$ ), и на плоскости  $\sigma$  имеются точки, которые не имеют прообразов на плоскости  $\pi$  (например, точка  $Q'$  на рис. 4, где  $OQ' \parallel \pi$ ). Более точно, на плоскостях  $\pi$  и  $\sigma$  имеется по одной прямой (прямые  $r$  и  $q'$  на рис. 4), из-за которых нарушается взаимная однозначность отображения  $f$ .

Чтобы превратить центральное проектирование во взаимно однозначное отображение, можно поступить так. Дополним пространство  $E_3$  новыми точками, а именно ко всем обычным точкам каждой прямой мысленно добавим еще одну, так называемую *несобственную* точку. При этом будем считать, что две параллельные прямые имеют одну и ту же несобственную точку, а непараллельные прямые имеют различные несобственные точки<sup>1</sup>. Обычные точки будем называть *собственными* точками. Прямую, дополненную несобственной точкой, назовем *расширенной прямой*.

Если расширенная прямая лежит в плоскости, то будем считать, что несобственная точка этой прямой лежит в той же плоскости. Таким образом, каждая плоскость дополняется множеством несобственных точек. Условимся считать, что все несобственные точки плоскости образуют одну *несобственную прямую*, а все несобственные точки пространства  $E_3$  — одну *несобственную плоскость*. Плоскость, дополненную несобственной прямой, назовем *расширенной плоскостью*, а пространство  $E_3$ , дополненное несобственной плоскостью, — *расширенным евклидовым пространством*.

Из этих соглашений вытекают весьма интересные выводы о взаимном расположении расширенных прямых и плоскостей. Наиболее существенными являются следующие утверждения.

а) Любые две прямые<sup>2</sup>, лежащие в плоскости, пересекаются, т. е. имеют общую (собственную или несобственную) точку.

Это утверждение непосредственно следует из наших соглашений.

б) Любая прямая, не лежащая в плоскости, пересекает плоскость, т. е. имеет с ней общую (собственную или несобственную) точку.

Докажем это утверждение. Пусть  $a$  — прямая, не лежащая в

<sup>1</sup> Можно, например, считать, что несобственной точкой данной прямой является ее направляющее одномерное векторное подпространство.

<sup>2</sup> При рассмотрении свойств а), б) и в) расширенную прямую (расширенную плоскость) мы называем просто прямой (плоскостью).

плоскости  $\pi$ . Если прямая  $a$  не параллельна плоскости  $\pi$ , то она, очевидно, имеет с плоскостью  $\pi$  общую (собственную) точку. Если же прямая  $a$  параллельна плоскости  $\pi$ , то прямая  $a$  и плоскость  $\pi$  имеют общую несобственную точку. В самом деле, в плоскости  $\pi$  лежит хотя бы одна прямая  $a'$ , параллельная прямой  $a$ , а прямые  $a$  и  $a'$  имеют общую несобственную точку, лежащую в плоскости  $\pi$ .

Утверждение верно и в том случае, когда  $a$  — обычная прямая, а  $\pi$  — несобственная плоскость или когда  $a$  — несобственная прямая, а  $\pi$  — обычная плоскость: и в том и в другом случае прямая  $a$  и плоскость  $\pi$  имеют общую несобственную точку.

Аналогично можно обосновать следующее утверждение.

в) Любые две плоскости пересекаются по прямой, т. е. имеют общую (собственную или несобственную) прямую.

Пополнение пространства  $E_3$  несобственными точками превращает центральное проектирование во взаимно однозначное отображение точек плоскости  $\pi$  на точки плоскости  $\sigma$  при любом расположении этих плоскостей. В самом деле, любая прямая, проходящая через точку  $O$ , пересекает как плоскость  $\pi$ , так и плоскость  $\sigma$ , поэтому каждая точка плоскости  $\pi$  имеет образ на плоскости  $\sigma$  и каждая точка плоскости  $\sigma$  имеет прообраз на плоскости  $\pi$ . Если, например,  $P$  — точка плоскости  $\pi$ , а  $OP \parallel \sigma$  (рис. 4), то образом точки  $P$  является общая несобственная точка  $P'$  прямой  $OP$  и плоскости  $\sigma$ . Если же  $Q'$  — точка плоскости  $\sigma$  и  $OQ' \parallel \pi$ , то прообразом этой точки является общая несобственная точка  $Q$  прямой  $OQ'$  и плоскости  $\pi$ .

Важно отметить, что при центральном проектировании несобственные точки могут переходить в собственные (рис. 4), поэтому несобственные точки не обладают никакими проективными свойствами, которые отличали бы их от собственных точек: в проективной геометрии различия между несобственными и собственными точками нет.

3. Аналогично предыдущему можно ввести понятие *расширенного аффинного пространства*. Пусть  $A_3$  — трехмерное аффинное пространство. Дополним пространство  $A_3$  несобственными точками, добавив к точкам каждой прямой по одной несобственной точке так, чтобы параллельные прямые имели общую несобственную точку, а непараллельные прямые — различные несобственные точки. Прямая, дополненная несобственной точкой, называется *расширенной аффинной прямой*. Применяв схему, изложенную в п. 2, к пространству  $A_3$ , мы приходим к понятиям *расширенной аффинной плоскости* и *расширенного аффинного пространства*. Очевидно, свойства а), б) и в), рассмотренные в п. 2, имеют место и в расширенном аффинном пространстве.

4. Построенное таким образом понятие расширенного аффинного или евклидова пространства можно было бы использовать для изучения проективной геометрии. Но при этом пришлось бы пользоваться такими понятиями, как «лежать между», «параллельность», а в евклидовой геометрии и понятиями «длина отрезка» и «величина угла». А это неизбежно приводит к различию между собственными и несобственными точками.

Проективную геометрию мы будем строить другим путем, на основе системы аксиом. Избранная нами аксиоматика носит алгебраический характер и основана на понятии векторного пространства. Это позволяет широко использовать аппарат векторной алгебры и значительно упростить изложение.

## §2. Понятие проективного пространства

1. Пусть  $V$  — векторное пространство  $n + 1$  измерений над полем  $R$  вещественных чисел, а  $V'$  — множество всех ненулевых векторов этого пространства. Непустое множество  $P$  называется *проективным пространством  $n$  измерений* (порожденным векторным пространством  $V$ ), если задано отображение  $f: V' \rightarrow P$ , удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам проективного пространства):

1. Отображение  $f$  сюръективно, т. е. любой элемент из  $P$  имеет хотя бы один прообраз.

2. Равенство  $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$  выполняется тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны.

Элементы множества  $P$  называются *точками* проективного пространства и обозначаются прописными буквами латинского алфавита:  $A, B, C, \dots, X, Y, \dots$ . Если  $f(\vec{x}) = X$ , то говорят, что вектор  $\vec{x}$  порождает точку  $X$ . Из аксиомы 2 следует, что множество всех векторов пространства  $V$ , порождающих одну точку, есть одномерное векторное подпространство без нулевого вектора.

Так как неколлинеарные векторы порождают различные точки, то *проективное пространство  $n$  измерений содержит бесконечное множество точек*.

**З а м е ч а н и е.** Вместо поля  $R$  можно взять любое другое поле  $K$ . Можно показать, что если поле  $K$  конечно, то полученное  $n$ -мерное проективное пространство будет состоять лишь из конечного множества точек.

2. В нашем курсе мы будем изучать в основном свойства проективного пространства двух измерений. Но в этом параграфе рассмотрим некоторые свойства проективного пространства трех измерений.

Пусть  $P$  — проективное пространство трех измерений, а  $V$  — четырехмерное векторное пространство, которое порождает проективное пространство  $P$ . Рассмотрим векторное подпространство  $L$   $k$  измерений пространства  $V$ , где  $k = 2, 3$ . Множество всех точек из  $P$ , которые порождаются ненулевыми векторами подпространства  $L$ , называется *прямой*, если  $k = 2$ , и *плоскостью*, если  $k = 3$ . Говорят, что подпространство  $L$  порождает прямую (плоскость). Прямые будем обозначать малыми буквами латинского алфавита:  $a, b, c, \dots$ , а плоскости — малыми буквами греческого алфавита:  $\pi, \sigma, \tau, \dots$ .

Так как подпространство  $L$  содержит бесконечное множество попарно неколлинеарных векторов, а неколлинеарные векторы порождают различные точки, то каждая прямая или плоскость является бесконечным множеством точек.

Нетрудно доказать, что в трехмерном проективном пространстве существуют тройки точек, не лежащие на одной прямой, и четверки точек, не лежащие в одной плоскости.

В самом деле, пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  — базис векторного пространства  $V$ , а  $A, B, C$  и  $D$  — точки, которые порождаются этими векторами. Тогда точки  $A, B, C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости, а любые три из этих четырех точек не лежат на одной прямой. Докажем, например, что точки  $A, B$  и  $C$  не лежат на одной прямой. Предположим противное, т. е. что эти точки лежат на некоторой прямой, порожденной двумерным векторным подпространством  $L$ . Тогда  $\vec{a} \in L, \vec{b} \in L$  и  $\vec{c} \in L$ . Но это невозможно, так как векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  линейно независимы.

3. Рассмотрим свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей трехмерного проективного пространства.

$1^0$ . *Через любые две точки  $A$  и  $B$  проходит одна и только одна прямая<sup>1</sup>.*

□ Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — векторы, которые порождают точки  $A$  и  $B$ . Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны, так как  $A$  и  $B$  — различные точки. Рассмотрим двумерное векторное подпространство  $L(\vec{a}, \vec{b})$ , натянутое на эти векторы. Прямая  $l$ , порожденная подпространством  $L(\vec{a}, \vec{b})$ , очевидно, проходит через точки  $A$  и  $B$ .

Докажем теперь, что  $l$  — единственная прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ . Действительно, пусть  $l'$  — произвольная прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ , а  $L'$  — двумерное подпространство, которое порождает прямую  $l'$ . Так как  $A \in l'$  и  $B \in l'$ , то  $\vec{a} \in L'$  и  $\vec{b} \in L'$ , поэтому  $L'$  — подпространство, натянутое на векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Таким образом,  $L'$  и  $L$  — одно и то же векторное подпространство, и, следовательно, прямые  $l'$  и  $l$  совпадают. ■

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

$2^0$ . *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.*

$3^0$ . *Если две точки  $A$  и  $B$  лежат в плоскости  $\pi$ , то прямая  $AB$  лежит в плоскости  $\pi$ , т. е. каждая точка прямой  $AB$  лежит в плоскости  $\pi$ .*

□ Пусть  $W$  — трехмерное векторное подпространство, которое порождает плоскость  $\pi$ , а  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — векторы, порождающие точки  $A$  и  $B$ . При доказательстве свойства  $1^0$  мы установили, что подпространство  $L(\vec{a}, \vec{b})$  порождает прямую  $AB$ . Так как  $A \in \pi, B \in \pi$ , то  $\vec{a} \in W, \vec{b} \in W$ , поэтому  $L(\vec{a}, \vec{b}) \subset W$ .

Пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $AB$ , а  $\vec{m}$  — вектор, порож-

<sup>1</sup> В проективной геометрии будем пользоваться той же терминологией, что и в других разделах геометрии. Например, выражение «точка  $A$  лежит на прямой  $a$ » или «прямая  $a$  проходит через точку  $A$ » означает, что  $A \in a$ . Далее, говоря «две точки», «три прямые» и т. д., будем подразумевать, что эти точки и прямые различны.

дающий эту точку. Так как  $\vec{m} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ , то  $\vec{m} \in W$ . Отсюда следует, что  $M$  — точка плоскости  $\pi$ . ■

4°. Любые две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются.

□ Пусть  $a$  и  $b$  — две прямые, лежащие в плоскости  $\sigma$ , а  $L, L'$  и  $W$  — векторные подпространства, которые порождают соответственно прямые  $a, b$  и плоскость  $\sigma$ . Прямые  $a$  и  $b$  лежат в плоскости  $\sigma$ , поэтому  $L \subset W, L' \subset W$ . Так как  $L$  и  $L'$  — различные двумерные подпространства трехмерного векторного подпространства  $W$ , то их пересечением является одномерное векторное подпространство. Ненулевые векторы этого подпространства порождают точку, которая, очевидно, является общей точкой прямых  $a$  и  $b$ .

Две прямые  $a$  и  $b$  не могут иметь более чем одну общую точку, так как через две точки проходит только одна прямая. ■

Сформулируем еще два утверждения, доказательство которых представляем читателю.

5°. Любая плоскость и не лежащая в ней прямая имеют одну и только одну общую точку.

6°. Любые две плоскости имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

4. Докажем, что любую плоскость трехмерного проективного пространства можно рассматривать как двумерное проективное пространство. В самом деле, пусть  $\pi$  — произвольная плоскость проективного пространства  $P$ . Обозначим через  $W$  трехмерное векторное подпространство пространства  $V$ , которое порождает эту плоскость, а через  $W'$  множество всех ненулевых векторов подпространства  $W$ . Рассмотрим  $W'$  как самостоятельное трехмерное векторное пространство. Так как  $W' \subset V$  и  $\pi \subset P$ , то отображение  $f: W' \rightarrow P$  порождает отображение  $\hat{f}: W' \rightarrow \pi$ , которое каждому вектору  $\vec{x}$  из  $W'$  ставит в соответствие точку  $f(\vec{x})$ . Очевидно, отображение  $\hat{f}$  удовлетворяет аксиомам проективного пространства. Действительно, выполнение аксиомы 1 непосредственно следует из определения плоскости, а выполнение аксиомы 2 очевидно: отображение  $\hat{f}$  удовлетворяет этой аксиоме, поэтому и  $\hat{f}$  удовлетворяет ей.

Аналогично можно доказать, что любую прямую проективного пространства двух (трех) измерений можно рассматривать как одномерное проективное пространство.

### §3. Координаты точек на проективной плоскости и на проективной прямой

1. Пусть  $\sigma$  — проективная плоскость. Упорядоченную систему точек  $A_1, A_2, A_3, E$  общего положения<sup>1</sup> плоскости  $\sigma$  называют *проективным репером* или проективной системой координат на плоскости и обозначают так:  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ . Точки  $A_1, A_2, A_3$  называют

<sup>1</sup> Систему  $k$  точек, где  $k \geq 3$ , называют *точками общего положения*, если никакие три из точек этой системы не лежат на одной прямой.

вершинами, точку  $E$  — единичной точкой репера, а прямые  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$  — координатными прямыми.

Если векторы  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  и  $\vec{e}$ , порождающие вершины и единичную точку проективного репера  $R$ , выбраны так, что

$$\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \quad (1)$$

то будем говорить, что система векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ ,  $\vec{e}$  согласована относительно репера  $R$ . Легко показать, что всегда существует система векторов, которая согласована относительно данного репера. В самом деле, пусть  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2$ ,  $\vec{b}_3$ ,  $\vec{e}$  — какие-то векторы, порождающие вершины и единичную точку репера  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ . Так как эти векторы принадлежат трехмерному векторному пространству  $V$ , которое порождает плоскость  $\sigma$ , и  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2$ ,  $\vec{b}_3$  не компланарны, то  $\vec{e} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3$ . Положив  $\vec{a}_1 = \lambda_1\vec{b}_1$ ,  $\vec{a}_2 = \lambda_2\vec{b}_2$ ,  $\vec{a}_3 = \lambda_3\vec{b}_3$ , получаем систему векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ ,  $\vec{e}$ , порождающих соответственно точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $E$  и удовлетворяющих равенству (1).

Пусть  $\lambda$  — произвольное действительное число, отличное от нуля. Умножив равенство (1) на  $\lambda$ , получим  $\lambda\vec{e} = \lambda\vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_2 + \lambda\vec{a}_3$ . Отсюда следует, что система  $\vec{a}'_1 = \lambda\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}'_2 = \lambda\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}'_3 = \lambda\vec{a}_3$ ,  $\vec{e}' = \lambda\vec{e}$  также согласована относительно репера  $R$ . Таким образом, существует бесконечное множество систем векторов, каждая из которых согласована относительно данного репера.

**Л е м м а 1.** Если каждая из систем векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ ,  $\vec{e}$  и  $\vec{a}'_1$ ,  $\vec{a}'_2$ ,  $\vec{a}'_3$ ,  $\vec{e}'$  согласована относительно данного репера  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ , то существует такое число  $\lambda \neq 0$ , что

$$\vec{a}'_1 = \lambda\vec{a}_1, \quad \vec{a}'_2 = \lambda\vec{a}_2, \quad \vec{a}'_3 = \lambda\vec{a}_3, \quad \vec{e}' = \lambda\vec{e}. \quad (2)$$

□ Так как векторы  $\vec{a}'_1$  и  $\vec{a}_1$  порождают одну и ту же точку  $A_1$ , то  $\vec{a}'_1 = \lambda_1\vec{a}_1$ . Аналогично  $\vec{a}'_2 = \lambda_2\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}'_3 = \lambda_3\vec{a}_3$ ,  $\vec{e}' = \lambda_4\vec{e}$ . Система  $\vec{a}'_1$ ,  $\vec{a}'_2$ ,  $\vec{a}'_3$ ,  $\vec{e}'$  согласована относительно репера  $R$ , поэтому  $\vec{e}' = \vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3$  или  $\lambda_4\vec{e} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$ . Так как  $\lambda_4 \neq 0$ , то  $\vec{e} = \frac{\lambda_1}{\lambda_4}\vec{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_4}\vec{a}_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4}\vec{a}_3$ . Сравнивая это равенство с равенством (1), получаем  $\frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 1$ ,  $\frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 1$ ,  $\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = 1$ , поэтому  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ . Таким образом, имеют место равенства (2). ■

2. Введем понятие координат точек на проективной плоскости. Пусть  $X$  — произвольная точка плоскости  $\sigma$ , на которой задан проективный репер  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ . Рассмотрим какой-нибудь вектор  $\vec{x}$ , порождающий точку  $X$ , и систему векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ ,  $\vec{e}$ , согласованную относительно репера  $R$ . Примем векторы  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  за базис трехмерного векторного пространства  $V$ , порождающего плоскость  $\sigma$ , и раз-

ложим вектор  $\vec{x}$  по этому базису:

$$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3. \quad (3)$$

Числа  $x_1, x_2, x_3$  называются проективными координатами точки  $X$  в репере  $R$ , причем  $x_1$  называется первой координатой этой точки,  $x_2$  — второй координатой, а  $x_3$  — третьей координатой; пишут:  $X(x_1, x_2, x_3)$  или  $X(x_1, x_2, x_3)_R$ . Так как  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , то все координаты точки одновременно не равны нулю.

Заметим, что проективные координаты точки  $X$  зависят от выбора как вектора  $\vec{x}$ , так и системы векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ , согласованной относительно репера  $R$ . Выясним характер этой зависимости. Пусть  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$  — другая система векторов, согласованная относительно репера  $R$ , а  $\vec{x}'$  — другой вектор, порождающий точку  $X$ . Так как векторы  $\vec{x}'$  и  $\vec{x}$  порождают одну и ту же точку, то  $\vec{x}' = \mu\vec{x}$ . По предыдущей лемме  $\vec{a}'_1 = \lambda\vec{a}_1, \vec{a}'_2 = \lambda\vec{a}_2, \vec{a}'_3 = \lambda\vec{a}_3$ .

Координаты  $x'_1, x'_2, x'_3$  точки  $X$  при данном выборе векторов определяются по формуле  $\vec{x}' = x'_1\vec{a}'_1 + x'_2\vec{a}'_2 + x'_3\vec{a}'_3$  или  $\mu\vec{x} = x'_1\lambda\vec{a}_1 + x'_2\lambda\vec{a}_2 + x'_3\lambda\vec{a}_3$ . Сравнивая это равенство с равенством (3), получаем  $x_1 = \frac{\lambda}{\mu}x'_1, x_2 = \frac{\lambda}{\mu}x'_2, x_3 = \frac{\lambda}{\mu}x'_3$ , где  $\frac{\lambda}{\mu} \neq 0$ . Итак, заданием проективного репера координаты произвольной точки плоскости  $\sigma$  определяются с точностью до общего множителя.

Вершины репера  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  и единичная точка в самом репере  $R$  имеют координаты  $A_1(1, 0, 0), A_2(0, 1, 0), A_3(0, 0, 1), E(1, 1, 1)$ . В самом деле, пусть система  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$  согласована относительно репера  $R$ . Тогда  $\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ . Отсюда и следует, что точка  $E$  имеет координаты  $(1, 1, 1)$ . Так как вектор  $\vec{a}_1$  порождает точку  $A_1$  и  $\vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3$ , то точка  $A_1$  имеет координаты  $(1, 0, 0)$ . Аналогично получаем координаты точек  $A_2$  и  $A_3$ .

**Л е м м а 2.** Если  $(x_1, x_2, x_3)$  — координаты точки  $X$  в репере  $R$ , а  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$  — какая-нибудь система векторов, согласованная относительно репера  $R$ , то вектор  $\vec{y} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$  порождает точку  $X$ .

□ Так как  $(x_1, x_2, x_3)$  — координаты точки  $X$  в репере  $R$ , то имеется такая система векторов  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$ , согласованная относительно репера  $R$ , что вектор  $\vec{x} = x_1\vec{a}'_1 + x_2\vec{a}'_2 + x_3\vec{a}'_3$  порождает точку  $X$ . По лемме 1 существует такое число  $\lambda \neq 0$ , что выполняются равенства (2). Таким образом,  $\vec{x} = \lambda(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3) = \lambda\vec{y}$ . Отсюда следует, что вектор  $\vec{y}$  порождает точку  $X$ . ■

**3. Докажем следующую теорему.**

**Т е о р е м а 1.** Три точки  $X(x_1, x_2, x_3), Y(y_1, y_2, y_3)$  и  $Z(z_1, z_2, z_3)$ , за-

данные координатами в репере  $R$ , лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

□ Пусть  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$  — система векторов, согласованная относительно репера  $R$ . По лемме 2 векторы  $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$ ,  $\vec{y} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3$ ,  $\vec{z} = z_1\vec{a}_1 + z_2\vec{a}_2 + z_3\vec{a}_3$  порождают соответственно точки  $X, Y$  и  $Z$ . Эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{x}, \vec{y}$  и  $\vec{z}$  принадлежат двумерному векторному подпространству, т. е. когда они компланарны. По теореме § 53 ч. I условие компланарности этих векторов выражается равенством (4). ■

Из этой теоремы следует, что точка  $X(x_1, x_2, x_3)$  лежит на координатной прямой  $A_1A_2$  тогда и только тогда, когда координаты точек  $X(x_1, x_2, x_3)$ ,  $A_1(1, 0, 0)$ ,  $A_2(0, 1, 0)$  удовлетворяют равенству (4), или  $x_3 = 0$ .

Аналогично можно показать, что точка  $X$  лежит на координатной прямой  $A_1A_3$  (на прямой  $A_2A_3$ ) тогда и только тогда, когда  $x_2 = 0$  ( $x_1 = 0$ ).

4. По аналогии с предыдущим введем понятие координат точек на проективной прямой. Упорядоченную систему трех точек  $A_1, A_2, E$  проективной прямой  $l$  называют *проективным репером* прямой и обозначают так:  $R = (A_1, A_2, E)$ . Точки  $A_1, A_2$  называют *вершинами* репера, а точку  $E$  — *единичной точкой*.

Если векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$ , порождающие вершины и единичную точку проективного репера  $R$ , выбраны так, что  $\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ , то будем говорить, что система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$  *согласована относительно репера*  $R$ . Так же как и в случае проективной плоскости, легко доказать, что существует бесконечное множество систем векторов, каждая из которых согласована относительно данного репера, и что если  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$  и  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{e}'$  согласованы относительно данного репера, то существует такое число  $\lambda \neq 0$ , что  $\vec{a}'_1 = \lambda\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}'_2 = \lambda\vec{a}_2$ ,  $\vec{e}' = \lambda\vec{e}$ .

Пусть  $X$  — произвольная точка прямой  $l$ , на которой задан репер  $R = (A_1, A_2, E)$ . Рассмотрим какой-нибудь вектор  $\vec{x}$ , порождающий точку  $X$ , и систему векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$ , согласованную относительно репера  $R$ . Примем векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  за базис двумерного векторного пространства  $L$ , порождающего прямую  $l$ , и разложим вектор  $\vec{x}$  по этому базису:  $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$ . Числа  $x_1, x_2$  называются *проективными координатами точки  $X$  в репере  $R$* ; пишут:  $X(x_1, x_2)$ . Так же как и на плоскости, можно доказать, что заданием проективного репера на прямой  $l$  координаты произвольной точки прямой определяются с точностью до общего множителя.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что вершины и единичная точка репера  $R = (A_1, A_2, E)$  в самом репере имеют координаты  $A_1(1, 0)$ ,  $A_2(0, 1)$ ,  $E(1, 1)$ .

5. Рассмотрим на плоскости  $\sigma$  проективный репер  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ . Пусть  $X$  — произвольная точка плоскости  $\sigma$ , отличная от точки  $A_3$ , а  $X_3$  — точка пересечения прямых  $A_1A_2$  и  $A_3X$  (рис. 5). Точка  $X_3$  называется проекцией точки  $X$  из центра  $A_3$  на прямую  $A_1A_2$ . Ясно, что каждая точка плоскости  $\sigma$ , отличная от точки  $A_3$ , имеет проекцию из точки  $A_3$  на прямую  $A_1A_2$ . Проекция каждой точки прямой  $A_1A_2$  совпадает с самой точкой.

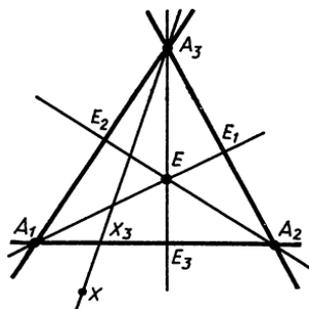


Рис. 5

Обозначим через  $E_3$  проекцию единичной точки репера  $R$  из центра  $A_3$  на прямую  $A_1A_2$  (рис. 5). Упорядоченная система точек  $A_1, A_2, E_3$  на прямой  $A_1A_2$  образует проективный репер, который будем обозначать через  $R_3$ . Аналогично можно ввести реперы  $R_2 = (A_1, A_3, E_2)$  и  $R_1 = (A_2, A_3, E_1)$  (рис. 5). Итак, если на плоскости задан репер  $R$ , то на каждой из координатных прямых возникает свой репер:  $R_1$  на прямой  $A_2A_3$ ,  $R_2$  на прямой  $A_1A_3$  и  $R_3$  на прямой  $A_1A_2$ .

Докажем теорему о координатах проекции точки на координатную прямую.

**Т е о р е м а 2.** Если произвольная точка  $X$  плоскости, отличная от точки  $A_3$ , в репере  $R$  имеет координаты  $x_1, x_2, x_3$ , то проекция  $X_3$  точки  $X$  из центра  $A_3$  на прямую  $A_1A_2$  в репере  $R_3$  имеет координаты  $x_1, x_2$ .

□ Найдем сначала координаты точки  $X_3(y_1, y_2, y_3)$  в репере  $R$  (рис. 5). Эта точка лежит на координатной прямой  $A_1A_2$ , поэтому  $y_3 = 0$ . Так как точки  $X, X_3$  и  $A_3$  лежат на одной прямой, то

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, числа  $(x_1, x_2, 0)$  являются координатами точки  $X_3$ . Аналогично находим координаты точки  $E_3$  в репере  $R : E_3(1, 1, 0)$ .

Возьмем систему векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ , согласованную относительно репера  $R$ . Так как точки  $X_3$  и  $E_3$  имеют координаты  $(x_1, x_2, 0)$  и  $(1, 1, 0)$ , то векторы

$$\vec{e}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \tag{1}$$

$$\vec{x}_3 = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \tag{2}$$

порождают соответственно точки  $E_3$  и  $X_3$ .

Равенство (1) означает, что система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}_3$  согласована относительно репера  $R_3$  проективной прямой  $A_1A_2$ . Из равенства (2) мы заключаем, что точка  $X_3$  на прямой  $A_1A_2$  в репере  $R_3$  имеет координаты  $(x_1, x_2)$ . ■

**З а м е ч а н и е.** Аналогично можно доказать, что если произвольная точка  $X$  плоскости, отличная от  $A_2$ , в репере  $R$  имеет координаты

$x_1, x_2, x_3$ , то проекция  $X_2$  точки  $X$  из центра  $A_2$  на прямую  $A_1A_3$  в репере  $R_2$  имеет координаты  $x_1, x_3$ , т. е.  $X_2(x_1, x_3)$ , а проекция  $X_1$  точки  $X$  из центра  $A_1$  (точки, отличной от  $A_1$ ) в репере  $R_1$  имеет координаты  $x_2, x_3$ , т. е.  $X_1(x_2, x_3)$ .

#### § 4. Модели проективной плоскости и проективного пространства

1. Напомним, что в § 2 проективное пространство было введено как некоторое непустое множество  $P$  элементов, называемых точками, в предположении, что задано отображение  $f: V' \rightarrow P$ , которое удовлетворяет аксиомам проективного пространства. Здесь  $V'$  — множество ненулевых векторов некоторого векторного пространства  $V$ . При этом мы не интересовались конкретной природой элементов множества  $P$  и отображения  $f$ .

Если найдено конкретное множество  $P$  и конкретное отображение  $f: V' \rightarrow P$ , удовлетворяющее аксиомам проективного пространства, то говорят, что построена *интерпретация* (реализация) данной системы аксиом. Само множество  $P$  называется *моделью* проективного пространства. Рассмотрим некоторые модели проективной плоскости и проективного пространства.

2. Пусть  $A_3$  — трехмерное аффинное пространство над векторным пространством  $V$  (ч. I, § 85). Обозначим через  $P_2$  множество всех прямых пространства  $A_3$ , проходящих через некоторую фиксированную точку  $O$  (связка прямых с центром в точке  $O$ ). Рассмотрим отображение  $f: V' \rightarrow P_2$  по следующему закону: ненулевому вектору  $\vec{a}$  из  $V$  поставим в соответствие прямую, проходящую через точку  $O$  и параллельную вектору  $\vec{a}$ . Отображение  $f$ , очевидно, удовлетворяет аксиомам проективного пространства (см. § 2, п. 1), поэтому  $P_2$  — модель проективной плоскости. В этой модели проективными точками являются прямые связки с центром  $O$ , а проективными прямыми — множество всех прямых, проходящих через точку  $O$  и лежащих в некоторой плоскости.

Аналогично можно построить модель трехмерного проективного пространства. Пусть  $A_4$  — четырехмерное аффинное пространство над векторным пространством  $V$ . Обозначим через  $P_3$  множество всех прямых пространства  $A_4$ , проходящих через некоторую точку  $O$ . Рассмотрим отображение  $f: V' \rightarrow P_3$ , при котором ненулевому вектору  $\vec{a}$  ставится в соответствие прямая, проходящая через точку  $O$  и параллельная вектору  $\vec{a}$ . Это отображение удовлетворяет аксиомам проективного пространства, поэтому  $P_3$  — модель трехмерного проективного пространства. Проективными точками, как и в модели  $P_2$ , являются прямые пространства  $A_4$ , проходящие через точку  $O$ . Проективными прямыми (плоскостями) является множество всех прямых, проходящих через точку  $O$  и лежащих в двумерной (трехмерной) плоскости пространства  $A_4$ .

3. Построим другую модель проективной плоскости, основанную

на понятии расширенного аффинного или евклидова пространства.

Пусть  $\bar{\pi}$  — расширенная плоскость трехмерного расширенного аффинного или евклидова пространства над векторным пространством  $V$ . Возьмем собственную точку  $O$  этого пространства, не лежащую в плоскости  $\bar{\pi}$ , и рассмотрим отображение  $f: V' \rightarrow \bar{\pi}$  по следующему закону: каждому ненулевому вектору  $\vec{a}$  из  $V$  поставим в соответствие точку, в которой прямая, проходящая через  $O$  параллельно вектору  $\vec{a}$ , пересекает плоскость  $\bar{\pi}$  (рис. 6). Так как любая прямая, проходящая через точку  $O$ , пересекает плоскость  $\bar{\pi}$  в собственной или несобственной точке, то каждому ненулевому вектору ставится в соответствие некоторая (собственная или несобственная) точка плоскости  $\bar{\pi}$ . На рисунке 6 вектору  $\vec{a}$  соответствует собственная точка  $A$ , а вектору  $\vec{b}$  — несобственная точка  $B_\infty$ .

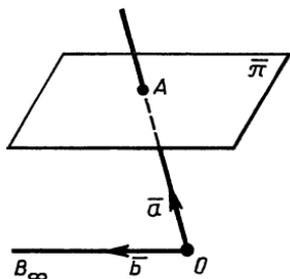


Рис. 6

Примем теперь новое соглашение: собственные и несобственные точки плоскости  $\bar{\pi}$  будем считать равноправными; их будем называть просто *проективными точками*. Если через  $P_2$  обозначить множество всех проективных точек, то  $f$  есть отображение множества векторов  $V'$  на множество  $P_2$ , или  $f: V' \rightarrow P_2$ . Это отображение удовлетворяет аксиомам проективного пространства, поэтому  $P_2$  — модель проективной плоскости. В этой модели точками являются проективные точки, т. е. собственные и несобственные точки расширенной плоскости  $\bar{\pi}$ , а прямыми — проективные прямые, т. е. обычные (собственные) прямые плоскости  $\bar{\pi}$ , каждая из которых пополнена несобственной точкой, и несобственная прямая плоскости  $\bar{\pi}$ . В дальнейшем мы часто будем пользоваться этой моделью. Однако заметим следующее. Так как на проективной плоскости все точки равноправны, то, используя расширенную плоскость как модель проективной плоскости, мы не должны различать собственные и несобственные элементы (точки, прямые).

Для дальнейшего изложения нам нужна следующая лемма.

**Лемма.** На расширенной прямой  $\bar{d}$  выбран репер  $\bar{R}_\infty = (A_\infty, B, E)$ , где  $A_\infty$  — несобственная точка этой прямой. Если собственная точка  $M$  прямой  $\bar{d}$  в репере  $\bar{R}_\infty$  имеет координаты  $x_1, x_2$ , то та же точка в системе координат  $B, BE$  аффинной прямой  $d$  имеет координату  $\frac{x_1}{x_2}$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Напомним, что координатой точки  $M$  аффинной прямой в системе координат  $O, e$  называется такое число  $x$ , что  $\vec{OM} = xe$ .

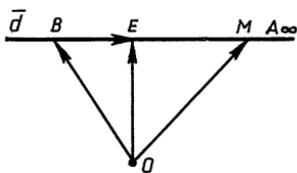


Рис. 7

□ Возьмем собственную точку  $O$  расширенного пространства, не лежащую на прямой  $\bar{d}$ , и обозначим через  $x$  аффинную координату точки  $M$  в системе  $B, \bar{BE}$ ; тогда  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BE}$ .

Векторы  $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}$  порождают вершины проективного репера  $\bar{R}_\infty$  (рис. 7). Так как  $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{OB}$ , то система векторов  $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}$  согласована относительно репера  $\bar{R}_\infty$ . Но  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ , поэтому, так как  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BE}$ , получаем  $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{OB}$ . Вектор  $\overrightarrow{OM}$  порождает точку  $M$ , поэтому из этого равенства следует, что числа  $(x, 1)$  являются координатами точки  $M$  в репере  $\bar{R}_\infty$ . По условию леммы  $(x_1, x_2)$  также координаты точки  $M$  в этом репере, следовательно,  $(x, 1)$  и  $(x_1, x_2)$  пропорциональны, т. е.  $x = \frac{x_1}{x_2}$ . ■

4. Аналогично предыдущему можно показать, что расширенное трехмерное аффинное или евклидово пространство  $\bar{A}_3$  является моделью проективного пространства трех измерений, если в нем считать равноправными собственные и несобственные точки. Мы не будем подробно рассматривать этот вопрос, отметим лишь, что в этой модели проективными точками являются собственные и несобственные точки пространства  $\bar{A}_3$ , проективными прямыми — обычные собственные прямые, каждая из которых пополнена несобственной точкой, и несобственные прямые, а проективными плоскостями — обычные плоскости, каждая из которых пополнена несобственной прямой, и несобственная плоскость.

В этой модели, очевидно, имеют место свойства  $1^0 - 6^0$ , рассмотренные в § 2, п. 3. В частности, справедливо утверждение  $6^0$ : *любые две проективные плоскости пересекаются по проективной прямой*. В самом деле, если данными плоскостями являются непараллельные плоскости расширенного пространства, то их пересечением является обычная прямая этого пространства, а если ими являются параллельные плоскости расширенного пространства, то их пересечением является несобственная прямая. Если, наконец, одной из плоскостей является обычная плоскость расширенного пространства, а другой — несобственная плоскость, то их пересечением является несобственная прямая обычной плоскости. Мы видим, что в любом случае пересечением двух проективных плоскостей является проективная прямая.

## § 5. Преобразование координат точек на плоскости и на прямой

1. На проективной плоскости рассмотрим два проективных репера  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  и  $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$  и допустим, что верши-

ны репера  $R'$  в репере  $R$  имеют координаты  $A'_1(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ ,  $A'_2(a_{12}, a_{22}, a_{32})$ ,  $A'_3(a_{13}, a_{23}, a_{33})$ ,  $E'(a_{10}, a_{20}, a_{30})$ .

Матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \quad (1)$$

назовем *матрицей перехода* от репера  $R$  к реперу  $R'$ .

Пусть система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$  согласована относительно репера  $R$ . По лемме 2 §3 векторы

$$\begin{aligned} \vec{a}'_1 &= a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2 + a_{31}\vec{a}_3, \\ \vec{a}'_2 &= a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2 + a_{32}\vec{a}_3, \\ \vec{a}'_3 &= a_{13}\vec{a}_1 + a_{23}\vec{a}_2 + a_{33}\vec{a}_3, \\ \vec{e}' &= a_{10}\vec{a}_1 + a_{20}\vec{a}_2 + a_{30}\vec{a}_3 \end{aligned} \quad (2)$$

порождают вершины репера  $R'$  и его единичную точку  $E'$ . Из этих равенств получаем  $\vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3 - \vec{e}' = (a_{11} + a_{12} + a_{13} - a_{10})\vec{a}_1 + (a_{21} + a_{22} + a_{23} - a_{20})\vec{a}_2 + (a_{31} + a_{32} + a_{33} - a_{30})\vec{a}_3$ .

Так как векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  не компланарны, то из этого равенства следует, что система векторов  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$  согласована относительно репера  $R'$  (т. е.  $\vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3 = \vec{e}'$ ) тогда и только тогда, когда четвертый столбец матрицы (1) является суммой первых трех столбцов. В этом случае будем говорить, что столбцы матрицы (1) перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$  *согласованы*.

Если столбцы матрицы (1) перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$  не согласованы, то, учитывая, что координаты вершин репера  $R'$  и его единичной точки определяются с точностью до числового множителя, всегда можно добиться того, чтобы столбцы этой матрицы были согласованы. В самом деле, найдем  $k_1, k_2$  и  $k_3$ , удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 &= a_{10}, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 &= a_{20}, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 &= a_{30}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как определитель этой системы отличен от нуля, то  $k_1, k_2$  и  $k_3$  из этой системы определяются однозначно, причем  $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 \neq 0$  и  $k_3 \neq 0$ . Действительно, если предположить, например, что  $k_1 = 0$ , то из равенств (3) будет следовать, что точка  $E'$  лежит на прямой  $A'_2A'_3$ , что невозможно, так как  $R'$  — репер.

Матрица

$$\begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_2a_{12} & k_3a_{13} & a_{10} \\ k_1a_{21} & k_2a_{22} & k_3a_{23} & a_{20} \\ k_1a_{31} & k_2a_{32} & k_3a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \quad (4)$$

является матрицей перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$ , причем теперь уже столбцы этой матрицы согласованы.

2. Сформулируем задачу преобразования координат точек проективной плоскости.

З а д а ч а 1. Произвольная точка  $X$  проективной плоскости в реперах  $R$  и  $R'$  имеет соответственно координаты  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Выразить  $x_1, x_2, x_3$  через  $x'_1, x'_2, x'_3$ , если дана матрица (1) перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$ , столбцы которой согласованы.

Р е ш е н и е. Пусть система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$  согласована относительно репера  $R$ . По лемме 2 § 3 векторы  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$ , определяемые формулами (2), порождают вершины репера  $R'$ . Так как столбцы матрицы (1) согласованы, то эти векторы согласованы относительно репера  $R'$ .

Пусть  $\vec{y}$  — вектор, который порождает точку  $X$ , а  $(y_1, y_2, y_3)$  и  $(y'_1, y'_2, y'_3)$  — координаты этого вектора соответственно в базисах  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  и  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ . Используя равенства (2), по формулам (6) § 54, ч. I получаем:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 + a_{13}y'_3, \\ y_2 &= a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2 + a_{23}y'_3, \\ y_3 &= a_{31}y'_1 + a_{32}y'_2 + a_{33}y'_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как  $y_1, y_2, y_3$  и  $x_1, x_2, x_3$  являются координатами точки  $X$  в репере  $R$ , то эти числа пропорциональны:  $y_1 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2, y_3 = \lambda x_3$ , где  $\lambda \neq 0$ . Аналогично  $y'_1 = \lambda' x'_1, y'_2 = \lambda' x'_2, y'_3 = \lambda' x'_3$ , где  $\lambda' \neq 0$ .

Подставив эти значения  $y_i$  и  $y'_i$  в (5) и положив  $\frac{\lambda}{\lambda'} = \rho$ , получаем искомые формулы преобразования координат точек проективной плоскости:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, \\ \rho x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, \\ \rho x_3 &= a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3. \end{aligned} \quad (6)$$

П р и м е р. Записать формулы преобразования координат точек проективной плоскости, если матрица перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Столбцы этой матрицы несогласованы, поэтому сначала запишем формулы (3) для данной матрицы:

$$2k_1 + 4k_2 = 5, \quad k_1 + 3k_2 = 4, \quad k_3 = 3.$$

Отсюда получаем  $k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = \frac{3}{2}, k_3 = 3$ . Теперь запишем матрицу (4) перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$ , затем искомые формулы преобразования (6):

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= -x'_1 + 6x'_2, \\ \rho x_2 &= -\frac{1}{2}x'_1 + \frac{9}{2}x'_2, \\ \rho x_3 &= 3x'_3.\end{aligned}$$

3. Рассмотрим теперь задачу преобразования координат точек на проективной прямой. Пусть на проективной прямой даны два репера  $R = (A_1, A_2, E)$  и  $R' = (A'_1, A'_2, E')$ , причем известны координаты вершин репера  $R'$  в репере  $R$ :  $A'_1(a_{11}, a_{21})$ ,  $A'_2(a_{12}, a_{22})$ ,  $E'(a_{10}, a_{20})$ . Матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \quad (7)$$

назовем *матрицей перехода* от репера  $R$  к реперу  $R'$ . Если третий столбец этой матрицы является суммой первых двух столбцов, то будем говорить, что столбцы матрицы (7) *согласованы*.

З а д а ч а 2. Произвольная точка  $X$  проективной прямой в реперах  $R$  и  $R'$  имеет соответственно координаты  $(x_1, x_2)$  и  $(x'_1, x'_2)$ . Выразить  $x_1, x_2$  через  $x'_1, x'_2$ , если дана матрица (7) перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$ , столбцы которой согласованы.

Р е ш е н и е. Пусть система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{e}$  согласована относительно репера  $R$ . Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned}\vec{a}'_1 &= a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2, \\ \vec{a}'_2 &= a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2, \\ \vec{e}' &= a_{10}\vec{a}_1 + a_{20}\vec{a}_2.\end{aligned} \quad (8)$$

Так же как и в случае координат точек на плоскости (см. доказательство леммы 2 § 3), эти векторы порождают вершины репера  $R'$ . В силу согласованности столбцов матрицы (7) система векторов  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{e}'$  согласована относительно репера  $R'$ .

Пусть  $\vec{y}$  — вектор, который порождает точку  $X$ , а  $(y_1, y_2)$  и  $(y'_1, y'_2)$  — координаты этого вектора соответственно в базисах  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  и  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2$ . Используя равенства (8), по формулам (5) ч. I, § 15 получаем:

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2, \\ y_2 &= a_{21}y'_1 + a_{22}y'_2.\end{aligned} \quad (9)$$

Так как  $(y_1, y_2)$  и  $(x_1, x_2)$  являются координатами точки  $X$  в репере  $R$ , то эти числа пропорциональны:  $y_1 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2, \lambda \neq 0$ . Аналогично  $y'_1 = \lambda' x'_1, y'_2 = \lambda' x'_2$ , где  $\lambda' \neq 0$ . Подставив эти значения в равенства (9) и положив  $\frac{\lambda}{\lambda'} = \rho$ , получаем искомые формулы преобразования координат точек проективной прямой:

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2, \\ \rho x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2.\end{aligned} \quad (10)$$

## § 6. Уравнение прямой. Координаты прямой

1. Пусть  $\Phi$  — фигура, т. е. любое множество точек. Уравнением фигуры  $\Phi$  в выбранном репере называется такое уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки этой фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этой фигуре. На проективной плоскости, так же как и на евклидовой плоскости, в качестве фигур чаще всего рассматриваются линии (примером линии является прямая). В этом случае уравнение фигуры называется *уравнением линии*. Выведем уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть на проективной плоскости выбран репер  $R$  и в этом репере известны координаты двух точек  $A(a_1, a_2, a_3)$  и  $B(b_1, b_2, b_3)$  данной прямой  $d$ . Напишем уравнение прямой  $d$ . По теореме 1 § 3 точка  $M(x_1, x_2, x_3)$  лежит на этой прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Это и есть уравнение прямой  $d$ .

Так как  $A$  и  $B$  — различные точки, то

$$\text{ранг} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 2, \quad (2)$$

поэтому из равенства (1) следует, что  $x_1, x_2, x_3$  линейно выражаются через  $a_1, a_2, a_3$  и  $b_1, b_2, b_3$ . Это означает, что существуют числа  $\lambda$  и  $\mu$  (не равные одновременно нулю), такие, что

$$x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \quad x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \quad x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3. \quad (3)$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями* прямой  $d$ . Их смысл заключается в следующем: каковы бы ни были числа  $\lambda$  и  $\mu$ , не равные нулю одновременно, точка с координатами  $x_1, x_2, x_3$ , удовлетворяющими условиям (3), лежит на прямой  $d$ . Обратно: если  $(x_1, x_2, x_3)$  — точка прямой  $d$ , то всегда найдутся числа  $\lambda$  и  $\mu$ , такие, что  $x_1, x_2, x_3$  выражаются через  $a_1, a_2, a_3$  и  $b_1, b_2, b_3$  при помощи равенств (3).

В качестве примера запишем уравнения координатных прямых  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1$  данного репера  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ . Так как точки  $A_1$  и  $A_2$  имеют координаты  $A_1(1, 0, 0), A_2(0, 1, 0)$ , то уравнение (1) прямой  $A_1A_2$  имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } x_3 = 0.$$

Аналогично получаем уравнения двух других координатных прямых:

$$A_2A_3 : x_1 = 0; \quad A_3A_1 : x_2 = 0.$$

2. Разложив по элементам первого столбца определитель, стоящий в левой части уравнения (1), получим:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad (4)$$

где

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

В силу (2) хотя бы один из коэффициентов  $u_1, u_2, u_3$  не равен нулю. Таким образом, уравнение любой прямой в произвольном проективном репере является однородным уравнением первой степени.

Докажем обратное утверждение.

**Т е о р е м а 1.** *Фигура на проективной плоскости, заданная в проективном репере однородным уравнением первой степени (4), есть прямая.*

□ Пусть  $\gamma$  — линия, заданная уравнением (4). Предположим для определенности, что  $u_1 \neq 0$ . Уравнению (4) удовлетворяют координаты двух точек  $P(-u_2, u_1, 0), Q(-u_3, 0, u_1)$ . Напишем уравнение (1) прямой  $PQ$ :

$$\begin{vmatrix} x_1 & -u_2 & -u_3 \\ x_2 & u_1 & 0 \\ x_3 & 0 & u_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad u_1^2x_1 + u_1u_2x_2 + u_1u_3x_3 = 0.$$

Отсюда, разделив на  $u_1$ , получим данное уравнение (4). Таким образом, уравнение фигуры  $\gamma$  совпадает с уравнением прямой  $PQ$ , поэтому  $\gamma$  — прямая линия. ■

3. Рассмотрим прямые  $d_1$  и  $d_2$ , заданные уравнениями

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad (5)$$

$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0. \quad (6)$$

Эти прямые совпадают тогда и только тогда, когда уравнения (5) и (6) эквивалентны. Используя соответствующую теорему из алгебры, мы приходим к следующей теореме.

**Т е о р е м а 2.** *Прямые, заданные уравнениями (5) и (6), совпадают тогда и только тогда, когда ранг  $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$ .*

**С л е д с т в и е.** *Прямые, заданные уравнениями (5) и (6), пересекаются тогда и только тогда, когда ранг  $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$ .*

4. Если прямая  $d$  в репере  $R$  задана уравнением (4), то коэффициенты  $u_1, u_2, u_3$  этого уравнения называются *координатами прямой  $d$*  в репере  $R$ , пишут:  $d(u_1, u_2, u_3)$ . Координаты прямой одновременно не равны нулю, и из теоремы 2 следует, что они определяются с точностью до числового множителя. Из теоремы 1 заключаем, что любые три числа, не равные нулю одновременно, являются координатами некоторой прямой.

Мы замечаем, что понятия координат точки и координат прямой обладают аналогичными свойствами. Это обстоятельство не являет-

ся случайным. В нем находит свое проявление так называемый принцип двойственности на проективной плоскости, которому посвящен следующий параграф.

Найдем координаты координатных прямых  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  и  $A_3A_1$  данного репера  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ . Так как прямая  $A_1A_2$  имеет уравнение  $x_3 = 0$  или  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$ , то эта прямая имеет координаты  $A_1A_2(0, 0, 1)$ . Аналогично получаем координаты двух других координатных прямых:  $A_2A_3(1, 0, 0)$ ,  $A_3A_1(0, 1, 0)$ .

## § 7. Принцип двойственности

1. В этом параграфе мы сформулируем одно из важных положений проективной геометрии — принцип двойственности на плоскости. Предварительно сделаем ряд замечаний.

Отношение взаимной принадлежности точек и прямых проективной плоскости, как известно, мы выражаем словами «точка лежит на прямой» или «прямая проходит через точку». Здесь же нам будет более удобно вместо этих выражений употреблять следующие: «точка принадлежит прямой» или «прямая принадлежит точке».

Пусть  $\pi'$  — множество всех прямых проективной плоскости  $\pi$ . Возьмем на плоскости  $\pi$  репер  $R$  и рассмотрим отображение  $\psi: \pi \rightarrow \pi'$ , которое каждой точке  $M$  с координатами  $(a_1, a_2, a_3)$  ставит в соответствие прямую  $m$  с теми же координатами. Докажем, что это отображение является биекцией. В самом деле, если точки  $A$  и  $B$  различны, то их координаты не пропорциональны, поэтому соответствующие прямые не совпадают (§ 6, следствие теоремы 2), т. е.  $\psi$  — инъекция. Отображение  $\psi$  является также сюръекцией, так как если  $d$  — произвольная прямая, которая в репере  $R$  имеет координаты  $(a_1, a_2, a_3)$ , то точка  $D$  с теми же координатами переходит в прямую  $d$ . Итак,  $\psi$  — биекция. Отсюда следует, что обратное отображение  $\psi^{-1}: \pi' \rightarrow \pi$ , при котором каждой прямой множества  $\pi'$  ставится в соответствие точка плоскости  $\pi$ , также является биекцией.

Важно заметить, что при отображениях  $\psi$  и  $\psi^{-1}$  сохраняется принадлежность точек и прямых, т. е. если  $A \in d$  и  $a' = \psi(A)$ ,  $D' = \psi^{-1}(d)$ , то  $D' \in a'$ . В самом деле, пусть точка  $A$  и прямая  $d$  имеют координаты  $A(a_1, a_2, a_3)$ ,  $d(u_1, u_2, u_3)$ . Так как  $A \in d$ , то

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0. \quad (1)$$

По определению отображения  $\psi$  имеем  $a'(a_1, a_2, a_3)$  и  $D'(u_1, u_2, u_3)$ . Равенство (1) означает, что  $D' \in a'$ . Используя это утверждение, докажем, что если три точки принадлежат одной прямой, то их образы в отображении  $\psi$  принадлежат некоторому пучку. Пусть точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  принадлежат прямой  $d$  и  $a' = \psi(A)$ ,  $b' = \psi(B)$ ,  $c' = \psi(C)$ . Рассмотрим точку  $D' = \psi^{-1}(d)$ . Так как  $A \in d$ , то  $D' \in a'$ . Аналогично  $D' \in b'$ ,  $D' \in c'$ , т. е. прямые  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  принадлежат пучку с центром  $D'$ . Учитывая, что  $\psi$  — биекция, мы приходим к выводу, что в отображении  $\psi$  образом прямой является пучок прямых (рис. 8). Следовательно, при отображении  $\psi^{-1}$  образом пучка прямых является прямая.

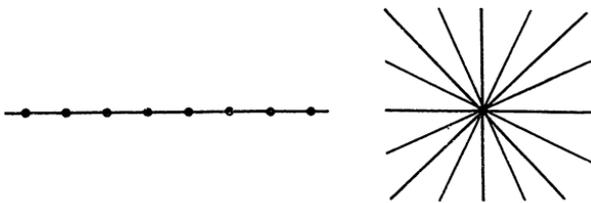


Рис. 8

2. Принцип двойственности на плоскости заключается в следующем. Если справедливо утверждение  $\Delta$ , в котором говорится о точках, прямых на проективной плоскости и об их взаимной принадлежности, то справедливо и так называемое двойственное предложение  $\Delta^*$ , которое получается из  $\Delta$  заменой слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка».

Для обоснования этого принципа возьмем на проективной плоскости репер  $R$  и рассмотрим отображения  $\psi$  и  $\psi^{-1}$ , которые были введены в п. 1. Пусть справедливо предложение  $\Delta$  о принадлежности точек и прямых, относящееся к некоторому множеству  $F$ , которое состоит из точек и прямых проективной плоскости. Рассмотрим образы всех точек из множества  $F$  в отображении  $\psi$  и образы всех прямых этого множества в отображении  $\psi^{-1}$  и обозначим через  $F^*$  полученное таким образом множество точек и прямых.

Предложению  $\Delta$  может быть сопоставлено предложение  $\Delta^*$  о принадлежности точек и прямых, относящихся к множеству  $F^*$ . Предложение  $\Delta^*$  получено из предложения  $\Delta$  заменой слова «точка» словом «прямая», а слова «прямая» словом «точка». Слова, выражающие отношение принадлежности, сохранены без изменения. Важно подчеркнуть, что если справедливо предложение  $\Delta$ , то справедливо предложение  $\Delta^*$ . Поясним это утверждение на примере.

Пусть  $\Delta$  — предложение: «Каковы бы ни были две точки, существует одна и только одна прямая, принадлежащая этим точкам». Мы имеем верное утверждение, сформулированное для элементов множества  $F$ , состоящего из двух точек. Преобразование  $\psi$  множество  $F$  переводит во множество  $F^*$ , состоящее из двух прямых. В силу существования отображения  $\psi$  мы можем принять без доказательства следующее утверждение  $\Delta^*$  для элементов множества  $F^*$ : «Каковы бы ни были две прямые, существует одна и только одна точка, принадлежащая этим прямым». В самом деле, если предположить, что  $\Delta^*$  не имеет места, то это бы означало, что для каких-то двух прямых не существует точки, принадлежащей им. Но тогда, очевидно, через прообразы этих прямых не проходит ни одна прямая, т. е. не имеет места предложение  $\Delta$ .

Приведем другие примеры двойственных предложений.

1. Каждой прямой принадлежит бесконечное множество точек.

1\*. Каждой точке принадлежит бесконечное множество прямых (т. е. через каждую точку проходит бесконечное множество прямых).

2. Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

2\*. Существуют по крайней мере три прямые, не принадлежащие одной точке (т. е. не проходящие через одну точку).

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться принципом двойственности на плоскости. Этот принцип позволяет принять без доказательства одно из двойственных предложений, если доказано другое предложение.

3. В трехмерном проективном пространстве имеет место другой принцип, который называется *принципом двойственности в пространстве*. Он заключается в следующем.

Если справедливо положение  $\Delta$ , в котором говорится о точках, прямых и плоскостях проективного пространства и об их взаимной принадлежности, то справедливо и так называемое двойственное предложение  $\Delta^*$  в пространстве, которое получается из  $\Delta$  при замене слов «точка», «прямая», «плоскость» соответственно словами «плоскость», «прямая», «точка».

Рассмотрим примеры двойственных предложений в пространстве.

1. Для любой прямой и не принадлежащей ей точки существует одна и только одна плоскость, принадлежащая им обеим (т. е. проходящая через точку и прямую).

2. Каковы бы ни были две точки, существует одна и только одна прямая, принадлежащая этим точкам.

1\*. Для любой прямой и не принадлежащей ей плоскости существует одна и только одна точка, принадлежащая им обеим.

2\*. Каковы бы ни были две плоскости, существует одна и только одна прямая, принадлежащая этим плоскостям.

Обоснование принципа двойственности в пространстве мы опускаем.

## § 8. Теорема Дезарга

1. *Трехвершинником* называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех прямых, соединяющих попарно эти точки. Указанные точки называются *вершинами*, а прямые — *сторонами* трехвершинника. Трехвершинник с вершинами  $A, B, C$  обозначается так:  $ABC$  (рис. 9).

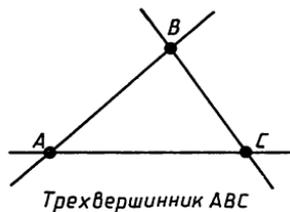


Рис. 9

На проективной плоскости рассмотрим два трехвершинника  $ABC$  и  $A'B'C'$ , вершины каждого из которых заданы в том порядке, в котором они записаны. Вершины  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ ,  $C$  и  $C'$  будем называть соответственными, также будем называть соответственными сторонами  $AB$  и  $A'B'$ ,  $BC$  и  $B'C'$ ,  $CA$  и  $C'A'$ .

**Теорема 1** (теорема Дезарга)<sup>1</sup>. Если прямые, проходящие через соответственные вершины двух трехвершинников, проходят через одну точку, то соответственные стороны этих трехвершинников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой.

□ Пусть  $ABC$  и  $A'B'C'$  — данные трехвершинники,  $O$  — точка, через которую проходят прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , а  $M, N$  и  $P$  — точки пересечения прямых  $BC$  и  $B'C'$ ,  $AC$  и  $A'C'$ ,  $AB$  и  $A'B'$  (рис. 10). Докажем, что точки  $M, N$  и  $P$  лежат на одной прямой.

Если точка  $O$  лежит на одной из прямых  $AB, BC, CA$ , то утверждение теоремы очевидно. Если какие-нибудь из соответственных вершин трехвершинников  $ABC$  и  $A'B'C'$  совпадают, то утверждение теоремы также очевидно. В самом деле, если, например, точки  $A$  и  $A'$  совпадают, то в этом случае точки  $P$  и  $N$  совпадают с точкой  $A$ , поэтому точки  $M, N$  и  $P$  лежат на одной прямой (рис. 11). Докажем теорему для случая, когда  $A$  и  $A', B$  и  $B', C$  и  $C'$  — различные точки.

Рассмотрим проективный репер  $R = (A, B, C, O)$  и введем в рассмотрение координаты точек  $A', B'$  и  $C'$  в этом репере. Точка  $A'$  лежит на прямой  $OA$  с уравнением  $x_2 - x_3 = 0$  и не совпадает с точкой  $A(1, 0, 0)$ , поэтому ее координаты можно обозначить так:  $A'(a, 1, 1)$ , где  $a$  — некоторое действительное число. Аналогично координаты точек  $B'$  и  $C'$  обозначим так:  $B'(1, b, 1), C'(1, 1, c)$ .

Найдем координаты точек  $M, N$  и  $P$  в репере  $R$ . Прямые  $BC$  и  $B'C'$  задаются уравнениями  $x_1 = 0, (bc - 1)x_1 - (c - 1)x_2 + (1 - b)x_3 = 0$ . Поэтому точка  $M$  имеет координаты:  $M(0, 1 - b, c - 1)$ .

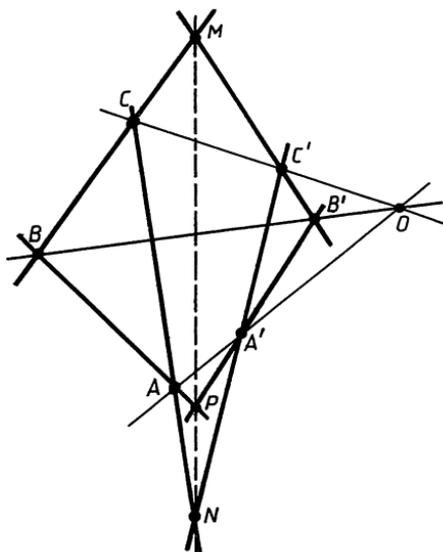


Рис. 10

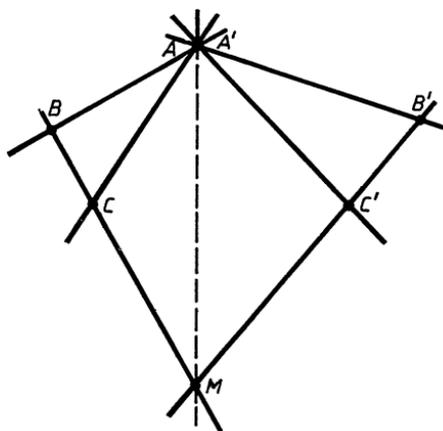


Рис. 11

<sup>1</sup> Ж. Дезарг (1593—1662) — французский математик, инженер и архитектор. Внес существенный вклад в создание основ проективной геометрии.

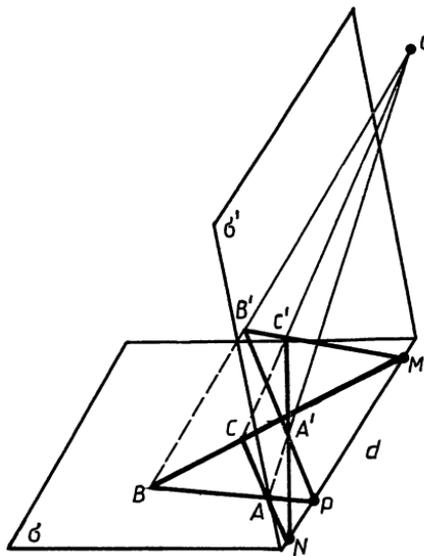


Рис. 12

Аналогично получаем координаты точек  $N$  и  $P$ :  $N(a-1, 0, 1-c)$ ,  $P(a-1, 1-b, 0)$ . Точки  $M$ ,  $N$  и  $P$  лежат на одной прямой, так как

$$\begin{vmatrix} 0 & a-1 & a-1 \\ 1-b & 0 & 1-b \\ c-1 & 1-c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(§ 3, теорема 1). ■

**З а м е ч а н и е.** Теорема Дезарга верна и в том случае, когда данные трехвершинники лежат в разных плоскостях трехмерного проективного пространства. В самом деле, рассмотрим трехвершинники  $ABC$  и  $A'B'C'$ , лежащие в двух плоскостях  $\sigma$  и  $\sigma'$  (рис. 12). Так как прямые  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в точке  $O$ , то точки  $B, C, B', C'$  лежат в одной плоскости, поэтому прямые  $BC$  и  $B'C'$  пересекаются в некоторой точке  $M$ . Прямая  $BC$  лежит в плоскости  $\sigma$ , а прямая  $B'C'$  — в плоскости  $\sigma'$ , поэтому точка  $M$  лежит на прямой  $d$ , по которой эти плоскости пересекаются.

Аналогично доказывается, что точки  $N$  и  $P$  пересечения прямых  $AC$  и  $A'C'$ ,  $AB$  и  $A'B'$  лежат на прямой  $d$ . Таким образом, точки  $M, N$  и  $P$  лежат на одной прямой.

2. Сформулируем предложение, двойственное теореме Дезарга на плоскости. Для этого заметим, что фигурой, двойственной трехвершиннику, является трехвершинник. Иногда эту фигуру называют *трехсторонником*.

**Т е о р е м а 2** (обратная теореме Дезарга). *Если точки пересечения соответственных сторон двух трехвершинников лежат на одной прямой, то прямые, проходящие через соответственные вершины этих трехвершинников, проходят через одну точку.*

Теорема не требует доказательства, так как справедливость ее непосредственно устанавливается по принципу двойственности на плоскости.

Мы замечаем, что теорема 2 является обратной теореме 1.

## §9. Сложное отношение четырех точек прямой

1. Пусть на проективной прямой  $d$  даны точки  $A, B, C$  и  $D$  так, что  $A, B$  и  $C$  — различные точки, а  $D$  не совпадает с точкой  $A$ . Рассмотрим проективный репер  $R_0 = (A, B, C)$  прямой  $d$  и обозначим через  $(x_1, x_2)$  координаты точки  $D$  в этом репере. Так как точка  $D$  не совпадает с точкой  $A$ , то  $x_2 \neq 0$ . Число  $\frac{x_1}{x_2}$  называется *сложным (двойным или ангармоническим) отношением точек  $A, B, C, D$*  и обозначается так:  $(AB, CD)$ .

**Теорема 1.** Если  $A, B$  и  $C$  — различные точки прямой, а  $\lambda$  — любое действительное число, то на данной прямой существует одна и только одна точка  $X$ , такая, что  $(AB, CX) = \lambda$ .

□ На данной прямой введем репер  $R = (A, B, C)$  и в этом репере рассмотрим точку  $X$  с координатами  $(\lambda, 1)$ . По определению  $(AB, CX) = \lambda$ . Докажем теперь, что точка  $X$ , удовлетворяющая условию теоремы, единственная. Пусть для какой-то точки  $X'$   $(x_1, x_2)$  данной прямой  $(AB, CX') = \lambda$ . Тогда по определению сложного отношения  $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ , или  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda}{1}$ . Мы видим, что координаты точек  $X$  и  $X'$  пропорциональны, поэтому эти точки совпадают. ■

**С л е д с т в и е.** Если на прямой даны точки  $A, B, C, D$  и  $D'$ , удовлетворяющие условию  $(AB, CD) = (AB, CD')$ , то точки  $D$  и  $D'$  совпадают.

Докажем теорему, позволяющую вычислить сложное отношение четырех точек прямой по их координатам.

**Теорема 2.** Если точки  $A, B, C, D$ , лежащие на некоторой прямой, имеют в репере  $R$  координаты  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$ ,  $C(c_1, c_2)$  и  $D(d_1, d_2)$ , причем точки  $A, B, C$  различны и точка  $D$  не совпадает с точкой  $A$ , то

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1c_1 \\ a_2c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1d_1 \\ b_2d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1d_1 \\ a_2d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1c_1 \\ b_2c_2 \end{vmatrix}}. \quad (1)$$

□ Рассмотрим репер  $R_0 = (A, B, C)$  и запишем формулы преобразования координат при переходе от репера  $R$  к реперу  $R_0$ . Для этого заметим, что координаты точек  $A$  и  $B$  могут быть записаны в виде  $A(k_1a_1, k_1a_2)$ ,  $B(k_2b_1, k_2b_2)$ . Матрица перехода от репера  $R$  к реперу  $R_0$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k_1a_1 & k_2b_1 & c_1 \\ k_1a_2 & k_2b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Подберем числа  $k_1$  и  $k_2$  так, чтобы столбцы этой матрицы были согласованы (см. § 5, п. 3):

$$\begin{aligned} k_1a_1 + k_2b_1 &= c_1, \\ k_1a_2 + k_2b_2 &= c_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда формулы (10) § 5 принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= k_1a_1x'_1 + k_2b_1x'_2, \\ \rho x_2 &= k_1a_2x'_1 + k_2b_2x'_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть  $y_1, y_2$  — координаты точки  $D$  в репере  $R_0$ . По формулам (3) получаем:

$$\begin{aligned} \rho d_1 &= a_1k_1y_1 + b_1k_2y_2, \\ \rho d_2 &= a_2k_1y_1 + b_2k_2y_2. \end{aligned}$$

Отсюда находим  $y_1$  и  $y_2$ :

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho d_1 & k_2 b_1 \\ \rho d_2 & k_2 b_2 \end{vmatrix}}{k_1 k_2 \Delta}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 a_1 & \rho d_1 \\ k_1 a_2 & \rho d_2 \end{vmatrix}}{k_1 k_2 \Delta},$$

где  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$  Таким образом,

$$(AB, CD) = \frac{y_1}{y_2} = \frac{k_2 \begin{vmatrix} d_1 b_1 \\ d_2 b_2 \end{vmatrix}}{k_1 \begin{vmatrix} a_1 d_1 \\ a_2 d_2 \end{vmatrix}}.$$

Решив систему (2) относительно  $k_1$  и  $k_2$ , получим:

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем искомое равенство (1). ■

2. Имеют место следующие свойства сложного отношения четырех точек прямой.

$$1^0. (AB, CD) = (CD, AB).$$

$$2^0. (AB, CD) = \frac{1}{(AB, DC)}, \quad (AB, CD) = \frac{1}{(BA, CD)}, \text{ если } (AB, CD) \neq 0.$$

$$3^0. (AB, CD) = (BA, DC).$$

$$4^0. (AB, CC) = 1, \quad (AB, CB) = 0.$$

$$5^0. (AB, CD) + (AC, BD) = 1.$$

Для доказательства свойств  $1^0$ — $3^0$  выберем на прямой произвольный репер и введем в рассмотрение координаты точек:  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$ ,  $C(c_1, c_2)$ ,  $D(d_1, d_2)$ . Пользуясь формулой (1), непосредственным вычислением убеждаемся в справедливости этих свойств. Свойство  $4^0$  непосредственно следует из определения сложного отношения четырех точек прямой.

Для доказательства свойства  $5^0$  рассмотрим репер  $R_0 = (A, B, C)$  и обозначим через  $(d_1, d_2)$  координаты точки  $D$  в этом репере. В репере  $R_0$  точки  $A$ ,  $C$  и  $B$  имеют координаты:  $A(1, 0)$ ,  $C(1, 1)$ ,  $B(0, 1)$ , поэтому по формуле (1) получаем:

$$(AC, BD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1d_1 \\ 1d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1d_1 \\ 0d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{d_2 - d_1}{d_2} = 1 - \frac{d_1}{d_2}.$$

Так как  $\frac{d_1}{d_2} = (AB, CD)$ , то из этого соотношения следует равенство  $5^0$ .

Заметим, что если известно сложное отношение точек  $A, B, C, D$ , заданных в определенном порядке, то, пользуясь формулами  $1^0$ — $5^0$ , можно найти сложное отношение тех же точек, заданных в любом другом порядке. В самом деле, пусть  $(AB, CD) = \xi \neq 0$ . Найдем, например,  $(AD, BC)$ . По свойству  $5^0$   $(AD, BC) = 1 - (AB, DC)$ . Но

$$(AB, DC) = \frac{1}{(AB, CD)} = \frac{1}{\xi}, \text{ поэтому } (AD, BC) = 1 - \frac{1}{\xi} = \frac{\xi - 1}{\xi}.$$

3. Пусть  $A, B, C, D$  — четыре точки прямой  $g$ . Будем говорить, что пара точек  $A, B$  *разделяет пару точек  $C, D$* , если  $(AB, CD) < 0$ , и *не разделяет пару точек  $C, D$* , если  $(AB, CD) > 0$ . Из свойств  $1^0 - 3^0$  п. 2 следует, что понятие разделенности не зависит от того, в каком порядке рассматриваются пары  $A, B$  и  $C, D$ , и от того, в каком порядке рассматриваются точки в каждой паре. Другими словами, если пара  $A, B$  разделяет пару  $C, D$ , то пара  $C, D$  разделяет пару  $A, B$ , пара  $A, B$  разделяет пару  $D, C$ , пара  $D, C$  разделяет пару  $A, B$  и т. д. С другой стороны, если пара  $A, B$  разделяет пару  $C, D$ , то из свойства  $5^0$  п. 2 следует, что пара  $A, C$  не разделяет пару  $B, D$ .

Имеет место следующая теорема, доказательство которой мы опускаем. *Две точки  $A$  и  $B$  проективной прямой  $g$  разделяют множество всех остальных точек прямой на два непустых подмножества так, что если точки  $M$  и  $N$  принадлежат разным подмножествам, то пара  $A, B$  разделяет пару  $M, N$ , а если они принадлежат одному подмножеству, то пара  $A, B$  не разделяет пару  $M, N$ .* Каждое из этих подмножеств вместе с точками  $A$  и  $B$  называется *проективным отрезком* с концами  $A$  и  $B$ . Таким образом, на проективной прямой две точки определяют не один отрезок, как на евклидовой прямой, а два отрезка аналогично тому, как две точки окружности на евклидовой плоскости определяют две дуги с концами в этих точках.

4. Докажем теорему, которая раскрывает геометрический смысл сложного отношения четырех точек расширенной прямой.

**Теорема 3.** *Если  $A, B, C, D$  — собственные точки, а  $P_\infty$  — несобственная точка расширенной прямой, то*

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}, \quad (4)$$

$$(AB, CP_\infty) = -(AB, C), \quad (5)$$

где  $(AB, C)$  и  $(AB, D)$  — простые отношения соответствующих точек.

□ На расширенной прямой выберем репер  $\bar{R} = (P_\infty, A, B)$  и введем в рассмотрение координаты данных точек в этом репере:  $P_\infty(1, 0), A(0, 1), B(1, 1), C(c_1, c_2), D(d_1, d_2)$ . Здесь  $c_1, c_2, d_1, d_2$  — действительные числа, причем  $c_2 \neq 0, d_2 \neq 0$ .

По формуле (1) находим:

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1(d_2 - d_1)}{d_1(c_2 - c_1)} = \frac{c(1 - d)}{d(1 - c)}, \quad (6)$$

$$(AB, CP_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1}{c_1 - c_2} = \frac{-c}{1 - c}, \quad (7)$$

где  $c = \frac{c_1}{c_2}, \quad d = \frac{d_1}{d_2}$ .

Напомним, что  $\lambda = \frac{(M_1M_2, M)}{(M_1M_2, M)}$  есть отношение, в котором точка  $M$  делит отрезок  $M_1M_2$ :  $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$ . Если точки  $M_1, M_2, M$  в системе

координат  $A, \overrightarrow{AB}$  имеют соответственно координаты  $x_1, x_2, x$ , то очевидно, что  $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\overrightarrow{AB}$ , поэтому

$$(M_1M_2, M) = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \quad (8)$$

По лемме § 4 точки  $A, B, C, D$  в системе  $A, \overrightarrow{AB}$  имеют координаты:  $A(0), B(1), C(c), D(d)$ . По формуле (8) находим:

$$(AB, C) = \frac{c}{1-c}, \quad (AB, D) = \frac{d}{1-d}.$$

Отсюда, учитывая выражения (6) и (7), приходим к искомым формулам (4) и (5). ■

## § 10. Сложное отношение четырех прямых пучка

1. Рассмотрим две прямые  $g$  и  $g'$  проективной плоскости и точку  $O$  этой плоскости, не лежащую на данных прямых. Пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $g$ , а  $M'$  — точка пересечения прямых  $OM$  и  $g'$ . Точка  $M'$  называется *проекцией точки  $M$  на прямую  $g'$*  (из центра  $O$ ).

**Т е о р е м а.** Если  $A, B, C, D$  — точки прямой  $g$ , а  $A', B', C', D'$  — их проекции на прямую  $g'$  из точки  $O$ , то  $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ .

□ Рассмотрим на плоскости два проективных репера  $R = (A, B, O, E)$  и  $R' = (A', B', O, E)$ , где  $E$  — точка на прямой  $OC$ , отличная от точек  $O, C$  и  $C'$  (рис. 13). Точка  $A'$  лежит на прямой  $OA$  с уравнением  $x_2 = 0$  и не совпадает с точкой  $O$ , поэтому ее координаты в репере  $R$  можно обозначить так:  $A'(1, 0, a)$ . Аналогично координаты точки  $B'$  обозначим так:  $B'(0, 1, b)$ . Точки  $O$  и  $E$  в репере  $R$  имеют координаты:  $O(0, 0, 1), E(1, 1, 1)$ .

Запишем матрицу перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$  в виде (4) § 5:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & 0 & 1 \\ k_1a & k_2b & k_3 & 1 \end{pmatrix}$$

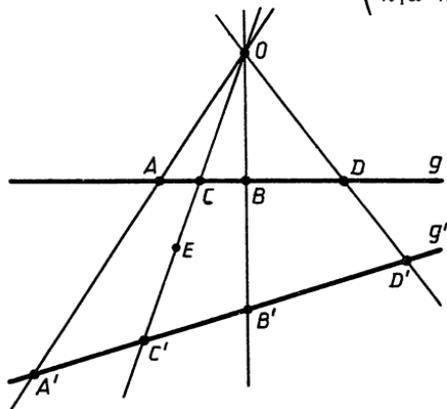


Рис. 13

и подберем  $k_1, k_2$  и  $k_3$  так, чтобы столбцы этой матрицы были согласованы:  $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 1 - a - b$ . Тогда формулы (6) § 5 в данном случае принимают вид  $\rho x_1 = x'_1, \rho x_2 = x'_2, \rho x_3 = ax'_1 + bx'_2 + (1 - a - b)x'_3$ . Если точка  $D$  в реперах  $R$  и  $R'$  имеет соответственно координаты  $D(y_1, y_2, 0), D(y'_1, y'_2, y'_3)$ , то из первых двух равенств получаем  $\frac{y_1}{y_2} = \frac{y'_1}{y'_2}$ .

По теореме о координатах проекции точки на координатную пря-

мую (§ 3, теорема 2) точка  $D$  на прямой  $g$  в репере  $(A, B, C)$  имеет координаты  $(y_1, y_2)$ , а точка  $D'$  на прямой  $g'$  в репере  $(A', B', C')$  — координаты  $(y'_1, y'_2)$ . Поэтому  $(AB, CD) = \frac{y_1}{y_2}$ ,  $(A'B', C'D') = \frac{y'_1}{y'_2}$ , и, следовательно,  $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ . ■

2. Пользуясь доказанной теоремой, решим следующую задачу, необходимую для дальнейшего изложения.

З а д а ч а. В репере  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  задана прямая параметрическими уравнениями

$$x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1, \quad x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2, \quad x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3,$$

проходящая через две точки  $P(p_1, p_2, p_3)$  и  $Q(q_1, q_2, q_3)$ . Доказать, что если две точки  $M_1$  и  $M_2$  этой прямой имеют параметры  $M_1(\lambda_1, \mu_1)$ ,  $M_2(\lambda_2, \mu_2)$ , то

$$(PQ, M_1M_2) = \frac{\mu_1\lambda_2}{\lambda_1\mu_2}. \quad (1)$$

Р е ш е н и е. Предположим, что прямая  $PQ$  не проходит через точку  $A_3$ . Обозначим через  $P', Q', M'_1, M'_2$  проекции точек  $P, Q, M_1, M_2$  на прямую  $A_1A_2$  из центра  $A_3$ . По теореме 2 § 3 эти точки имеют следующие координаты на прямой  $A_1A_2$  в репере  $R_3 = (A_1, A_2, E_3)$ , где  $E_3$  — точка пересечения прямых  $A_3E$  и  $A_1A_2$ :  $P'(p_1, p_2)$ ,  $Q'(q_1, q_2)$ ,  $M'_1(\lambda_1 p_1 + \mu_1 q_1, \lambda_1 p_2 + \mu_1 q_2)$ ,  $M'_2(\lambda_2 p_1 + \mu_2 q_1, \lambda_2 p_2 + \mu_2 q_2)$ .

Пользуясь формулой (1) § 9, после несложных выкладок получим

$$(P'Q', M'_1M'_2) = \frac{\mu_1\lambda_2}{\lambda_1\mu_2}.$$

По предыдущей теореме  $(P'Q', M'_1M'_2) = (PQ, M_1M_2)$ , поэтому справедливо равенство (1).

Равенство (1) верно также и в том случае, когда прямая  $PQ$  проходит через точку  $A_3$ . В этом случае одна из точек  $A_1$  или  $A_2$ , например  $A_2$ , не лежит на этой прямой. Тогда точки  $P, Q, M_1, M_2$  проектируем из центра  $A_2$  на прямую  $A_1A_3$  и аналогично предыдущему приходим к формуле (1).

3. Пользуясь теоремой, доказанной в п. 1, введем понятие сложного отношения четырех прямых пучка. Пусть  $a, b, c, d$  — четыре прямые некоторого пучка с центром  $O$  (рис. 14). Рассмотрим произвольную прямую  $g$ , не проходящую через точку  $O$ , и обозначим через  $A, B, C, D$  точки пересечения прямой  $g$  с прямыми  $a, b, c, d$ . Число  $(AB, CD)$  называется *сложным отношением прямых  $a, b, c$  и  $d$*  и обозначается так:  $(ab, cd)$ . Из теоремы, доказанной в п. 1, следует, что  $(ab, cd)$  не зависит от выбора прямой  $g$ .

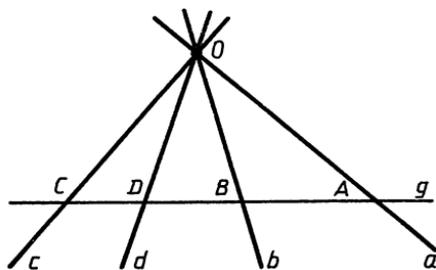


Рис. 14

Из свойств сложного отноше-

ния четырех точек прямой, рассмотренных в п. 2 § 9, вытекают следующие свойства сложного отношения четырех прямых пучка.

$$1^0. (ab, cd) = (cd, ab).$$

$$2^0. (ab, cd) = \frac{1}{(ab, dc)}, (ab, cd) = \frac{1}{(ba, cd)}, \text{ если } (ab, cd) \neq 0.$$

$$3^0. (ab, cd) = (ba, dc).$$

$$4^0. (ab, cc) = 1, (ab, cb) = 0.$$

$$5^0. (ab, cd) + (ac, bd) = 1.$$

## § 11. Проективные преобразования плоскости

1. Преобразование проективной плоскости называется *проективным*, если точкам любой прямой соответствуют точки, лежащие на некоторой прямой так, что сохраняется сложное отношение четырех точек<sup>1</sup>, т. е. для любых четырех точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$  одной прямой и их образов  $M'_1, M'_2, M'_3, M'_4$  выполняется равенство  $(M_1M_2, M_3M_4) = (M'_1M'_2, M'_3M'_4)$ .

Наиболее простым примером проективного преобразования плоскости является *тождественное преобразование*, в котором каждая точка плоскости является инвариантной, т. е. переходит сама в себя. Докажем следующие 2 леммы:

**Л е м м а 1.** Пусть  $R = (M_1, M_2, M_3, E)$  и  $R' = (M'_1, M'_2, M'_3, E')$  — проективные реперы проективной плоскости. Тогда отображение  $f$ , которое каждой точке с заданными координатами в репере  $R$  ставит в соответствие точку с теми же координатами в репере  $R'$ , является проективным преобразованием.

□ Пусть в отображении  $f$  точка  $M(x_1, x_2, x_3)_R$  переходит в точку  $M'(x_1, x_2, x_3)_{R'}$ . Докажем, что  $f$  — проективное преобразование плоскости.

Отображение  $f$ , очевидно, является преобразованием плоскости. Если точки  $X(x_1, x_2, x_3)_R, Y(y_1, y_2, y_3)_R, Z(z_1, z_2, z_3)_R$  лежат на одной прямой, то по теореме 1 § 3 их образы  $X'(x_1, x_2, x_3)_{R'}, Y'(y_1, y_2, y_3)_{R'}, Z'(z_1, z_2, z_3)_{R'}$  также лежат на одной прямой.

Докажем, что при преобразовании  $f$  сохраняется сложное отношение четырех точек. Пусть  $A(a_1, a_2, a_3)_R, B(b_1, b_2, b_3)_R, C(c_1, c_2, c_3)_R, D(d_1, d_2, d_3)_R$  — четыре точки прямой  $d$ , а  $A'(a_1, a_2, a_3)_{R'}, B'(b_1, b_2, b_3)_{R'}, C'(c_1, c_2, c_3)_{R'}, D'(d_1, d_2, d_3)_{R'}$  — их образы, лежащие на прямой  $d'$ . Хотя бы одна из точек  $M_1, M_2, M_3$  не лежит на прямой  $d$ ; пусть, например, точка  $M_3$  не лежит на прямой  $d$ . Тогда, очевидно, точка  $M'_3$  не лежит на прямой  $d'$ .

<sup>1</sup> В это определение из методических соображений включено избыточное требование (по аналогии с определением аффинного преобразования, ср. ч. I, § 48). Можно исходить из определения: преобразование проективной плоскости называется *проективным*, если точкам любой прямой соответствуют точки, также лежащие на одной прямой, и доказать, что при этом сохраняется сложное отношение четырех точек прямой. Однако доказательство этого утверждения сложное и выходит за рамки настоящего курса (см., например, [11], гл. V).

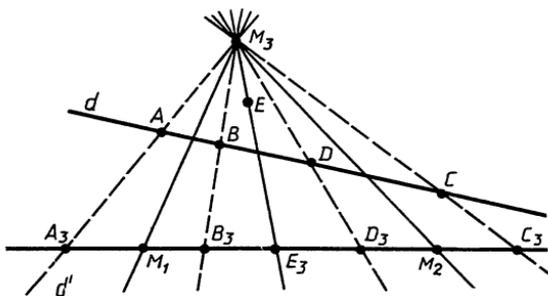


Рис. 15

Обозначим проекции точек  $A, B, C, D$  на прямую  $M_1M_2$  из центра  $M_3$  через  $A_3, B_3, C_3, D_3$  (рис. 15). По теореме о координатах проекции точек на координатную прямую (§ 3, теорема 2) эти точки в репере  $(M_1, M_2, E_3)$ , где  $E_3$  — проекция точки  $E$  на прямую  $M_1M_2$  из центра  $M_3$ , имеют координаты  $A_3(a_1, a_2), B_3(b_1, b_2), C_3(c_1, c_2), D_3(d_1, d_2)$ . По теореме § 10, используя формулу (1) § 9, получаем:

$$(AB, CD) = (A_3B_3, C_3D_3) = \alpha, \text{ где } \alpha = \left| \frac{a_1c_1}{a_2c_2} \right| \left| \frac{b_1d_1}{b_2d_2} \right| : \left| \frac{a_1d_1}{a_2d_2} \right| \left| \frac{b_1c_1}{b_2c_2} \right|.$$

Обозначим проекции точек  $A', B', C', D'$  на прямую  $M'_1M'_2$  из центра  $M'_3$  через  $A'_3, B'_3, C'_3, D'_3$ . По теореме 2 § 3 эти точки в репере  $(M'_1, M'_2, E'_3)$ , где  $E'_3$  — проекция точки  $E'$  на прямую  $M'_1M'_2$  из центра  $M'_3$ , имеют координаты:  $A'_3(a_1, a_2), B'_3(b_1, b_2), C'_3(c_1, c_2), D'_3(d_1, d_2)$ . По аналогии с предыдущим получаем  $(A'B', C'D') = (A'_3B'_3, C'_3D'_3) = \alpha$ , поэтому  $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ . ■

**Лемма 2.** Если проективные преобразования  $f_1$  и  $f_2$  три точки  $A, B$  и  $C$  некоторой прямой  $g$  переводят соответственно в точки  $A', B'$  и  $C'$ , то  $f_1(M) = f_2(M)$ , где  $M$  — любая точка прямой  $g$ .

□ Пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $g$ , отличная от точек  $A, B$  и  $C$ , а  $M' = f_1(M), M'' = f_2(M)$ . Докажем, что точки  $M'$  и  $M''$  совпадают.

Так как  $f_1$  и  $f_2$  — проективные преобразования, то  $(AB, CM) = (A'B', C'M')$  и  $(AB, CM) = (A'B', C'M'')$ , поэтому  $(A'B', C'M') = (A'B', C'M'')$ . Отсюда следует, что точки  $M'$  и  $M''$  совпадают (§ 9, следствие из теоремы 1). ■

**2.** Докажем теперь следующую основную теорему.

**Теорема.** Пусть  $R = (M_1, M_2, M_3, E)$  и  $R' = (M'_1, M'_2, M'_3, E')$  — произвольные реперы проективной плоскости. Тогда существует одно и только одно проективное преобразование, которое переводит репер  $R$  в репер  $R'$ . При этом точка с данными координатами в репере  $R$  переходит в точку с теми же координатами<sup>1</sup> в репере  $R'$ .

<sup>1</sup> Так как точки с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ , где  $\lambda \neq 0$ , совпадают, то это утверждение эквивалентно следующему: точка с данными координатами в репере  $R$  переходит в точку с пропорциональными координатами в репере  $R'$ .

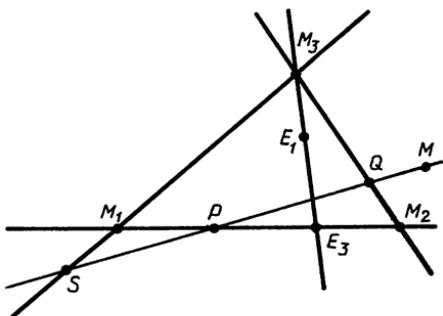


Рис. 16

$R$  переводит в репер  $R'$ . Если  $E_3$  — точка пересечения прямых  $M_1M_2$  и  $M_3E_1$ , а  $E_3'$  — точка пересечения прямых  $M_1M_2$  и  $M_3E_1'$ , то, очевидно,  $f'(E_3) = E_3'$ . Тогда по лемме 2 любая точка прямой  $M_1M_2$  при преобразованиях  $f$  и  $f'$  переходит в одну и ту же точку прямой  $M_1M_2$ . Аналогично можно показать, что любая точка прямой  $M_2M_3$  (или прямой  $M_1M_3$ ) переходит в одну и ту же точку прямой  $M_2M_3$  (или прямой  $M_1M_3$ ).

Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости, не лежащая на координатных прямых. Проведем через нее прямую, пересекающую прямые  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3$  и  $M_3M_1$  соответственно в точках  $P$ ,  $Q$  и  $S$  (рис. 16). По доказанному  $f(P) = f'(P)$ ,  $f(Q) = f'(Q)$  и  $f(S) = f'(S)$ , поэтому по лемме 2  $f(M) = f'(M)$ .

Таким образом, преобразования  $f$  и  $f'$  совпадают, т. е.  $f$  — единственное проективное преобразование, которое переводит репер  $R$  в репер  $R'$ . В этом проективном преобразовании по лемме 1 точка  $M$  с данными координатами в репере  $R$  переходит в точку  $M'$  с теми же координатами в репере  $R'$ . ■

Так как тождественное преобразование является проективным преобразованием, то из этой теоремы следует утверждение.

*Следствие. Если вершины и единичная точка некоторого репера являются инвариантными точками проективного преобразования, то оно является тождественным преобразованием.*

### 3. Рассмотрим основные свойства проективных преобразований.

1<sup>0</sup>. При проективном преобразовании три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также не лежащие на одной прямой.

□ Доказательство проведем методом от противного, т. е. предположим, что в проективном преобразовании  $f$  какие-то три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащие на одной прямой, переходят в точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ , лежащие на одной прямой  $g'$  (рис. 17). Докажем, что при этом предположении образы всех точек плоскости лежат на прямой  $g'$ . В самом деле, пусть  $M$  — произвольная точка плоскости, отличная от точки  $C$ , а  $M'$  — образ этой точки. Обозначим через  $N$  точку пересечения прямых  $MC$  и  $AB$ . Так как точки  $A$ ,  $B$ ,  $N$  лежат на одной прямой, то образ  $N'$  точки  $N$  лежит на прямой  $A'B'$ , т. е. на прямой  $g'$ . Но точки  $C$ ,  $M$  и  $N$  также лежат на одной прямой, поэтому точка  $M'$

□ По лемме 1 существует проективное преобразование  $f$ , которое репер  $R$  переводит в репер  $R'$ . В этом преобразовании точки  $M_1(1, 0, 0)$ ,  $M_2(0, 1, 0)$ ,  $M_3(0, 0, 1)$ ,  $E(1, 1, 1)$  переходят соответственно в точки с теми же координатами в репере  $R'$ , т. е. в точки  $M_1'$ ,  $M_2'$ ,  $M_3'$ ,  $E'$ .

Докажем, что  $f$  — единственное проективное преобразование, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть  $f'$  — какое-то проективное преобразование, которое репер

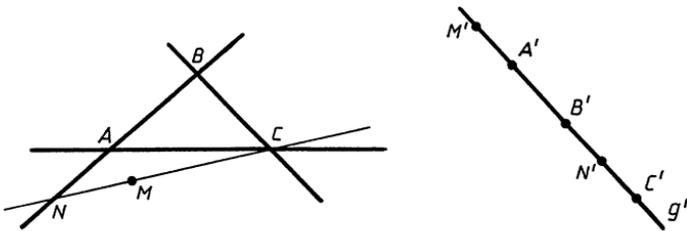


Рис. 17

лежит на прямой  $g'$ . Мы пришли к выводу, что отображение  $f$  не является взаимно однозначным. Это противоречит определению проективного преобразования. ■

Отсюда непосредственно следует утверждение.

2<sup>0</sup>. При проективном преобразовании любой репер переходит в репер.

3<sup>0</sup>. При проективном преобразовании прямая переходит в прямую.

□ Выберем на плоскости репер  $R$  и рассмотрим его образ  $R'$  в данном проективном преобразовании. Пусть произвольная прямая  $d$  в репере  $R$  определяется уравнением  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ . По предыдущей теореме образ  $d'$  этой прямой (т. е. множество образов всех точек прямой  $d$ ) в репере  $R'$  определяется тем же уравнением, поэтому является прямой (§ 6, теорема 1). ■

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что при проективном преобразовании пучок прямых переходит в пучок прямых.

4. Нетождественное проективное преобразование называется *гомологией*, если оно имеет по крайней мере три инвариантные точки, лежащие на одной прямой.

Докажем, что если точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , лежащие на одной прямой, являются инвариантными точками гомологии, то все точки прямой  $AB$  являются инвариантными точками этой гомологии. В самом деле, пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $AB$ , а  $M'$  — ее образ. Тогда  $(AB, CM) = (AB, CM')$ , и поэтому точки  $M$  и  $M'$  совпадают (§ 9, следствие теоремы 1). Прямая инвариантных точек называется *осью гомологии*.

Рассмотрим свойства гомологии.

1<sup>0</sup>. Прямая, проходящая через несовпадающие соответственные точки гомологии, является инвариантной прямой.

□ Пусть в гомологии с осью  $g_0$  точка  $A$  переходит в точку  $A'$ , отличную от точки  $A$ . Прямая  $AA'$  не совпадает с прямой  $g_0$ , поэтому пересекает ее в некоторой точке  $C$ . Так как  $C$  — инвариантная точка, то  $A$  и  $C$  — различные точки. Точки  $A$  и  $C$  переходят соответственно в точки  $A'$  и  $C$ , поэтому прямая  $AC$  переходит в ту же прямую  $AC$ . ■

2<sup>0</sup>. Прямые, проходящие через несовпадающие соответственные точки гомологии, принадлежат одному пучку, центр которого является инвариантной точкой гомологии.

□ Пусть в гомологии  $f$  с осью  $g_0$  точка  $A$  переходит в точку  $A'$ ,

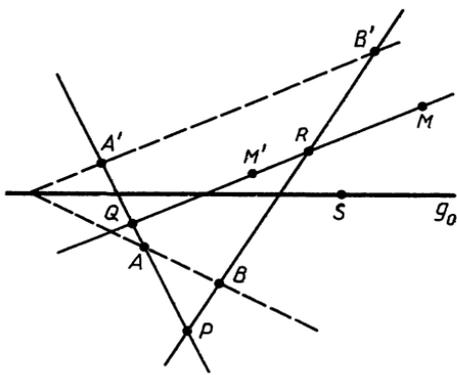


Рис. 18

отличную от точки  $A$ , а точка  $B$ , не лежащая на прямой  $AA'$ , — в точку  $B'$ , отличную от  $B$  (рис. 18). Так как  $AA'$  и  $BB'$  — инвариантные прямые, то точка  $P$  пересечения прямых  $AA'$  и  $BB'$  — инвариантная точка гомологии  $f$ .

Рассмотрим произвольную точку  $M$  и ее образ  $M'$ , не совпадающий с ней, и докажем, что прямая  $MM'$  проходит через точку  $P$ . Допустим, что это утверждение неверно. Тогда прямая  $MM'$  пересекает прямые  $AA'$  и  $BB'$  в двух точках  $Q$  и  $R$  (рис. 18). Точки

$P, Q$  и  $R$  не лежат на одной прямой и являются инвариантными точками гомологии  $f$ . Возьмем на прямой  $g_0$  точку  $S$  так, чтобы  $P, Q, R$  и  $S$  были точками общего положения. По следствию теоремы п. 2 преобразование  $f$  является тождественным преобразованием. Но это противоречит определению гомологии. Таким образом, наше предположение неверно, поэтому прямая  $MM'$  проходит через точку  $P$ . ■

Точка пересечения прямых, проходящих через соответственные точки гомологии, называется *центром гомологии*. Если центр гомологии не лежит на оси гомологии, то гомология называется *гиперболической*; если же центр гомологии лежит на оси, то гомология называется *параболической*. Из следствия основной теоремы вытекает, что гиперболическая гомология, кроме центра гомологии, не имеет других инвариантных точек, не лежащих на оси гомологии. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что параболическая гомология не имеет инвариантных точек, не лежащих на оси гомологии.

Используя основную теорему, нетрудно доказать, что если на проективной плоскости даны три точки  $P, A$  и  $A'$ , лежащие на одной прямой, и прямая  $g_0$ , не проходящая через точки  $A$  и  $A'$ , то существует

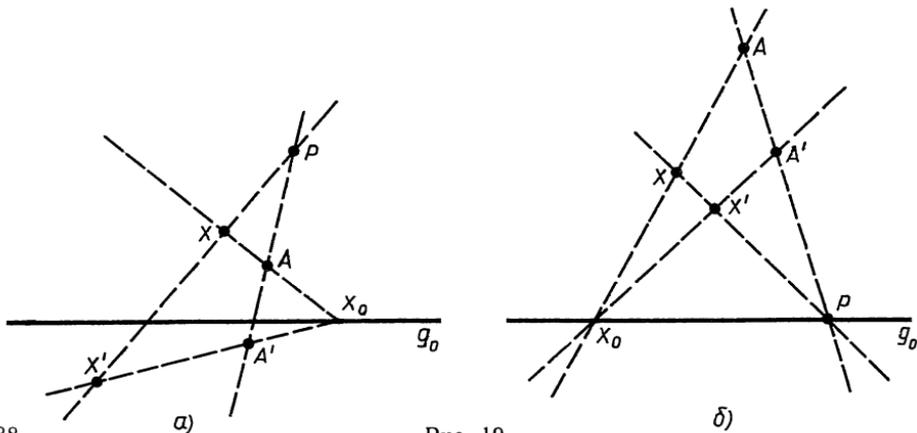


Рис. 19

одна и только одна гомология с осью  $g_0$  и центром  $P$ , которая переводит точку  $A$  в точку  $A'$ .

Таким образом, гомологию можно задать осью, центром и парой соответственных точек. На рисунке 19, *а, б* выполнено построение образа точки  $X$ , если гомология задана осью  $g_0$ , центром  $P$  и парой соответственных точек  $A$  и  $A'$  (рис. 19, *а* соответствует случаю, когда гомология гиперболическая, а рис. 19, *б* — когда она параболическая).

Сначала строим образ прямой  $XA$ , для чего точку пересечения  $X_0$  прямых  $XA$  и  $g_0$  соединяем с точкой  $A'$ . Так как точки  $X$ ,  $X'$  и  $P$  лежат на одной прямой, то  $X'$  — точка пересечения прямых  $X_0A'$  и  $PX$ .

## §12. Предмет проективной геометрии. Аналитическое выражение проективных преобразований

1. По теореме 2 § 40 ч. I множество *всех* преобразований проективной плоскости  $\pi$  является группой. Обозначим через  $H$  множество всех проективных преобразований плоскости  $\pi$ . Ясно, что  $H$  — непустое подмножество группы всех преобразований плоскости  $\pi$ . Докажем, что  $H$  — группа. Для этого согласно теореме 1 § 40 ч. I достаточно доказать, что: 1) если  $f_1 \in H$ ,  $f_2 \in H$ , то  $f_2f_1 \in H$ , и 2) если  $f \in H$ , то  $f^{-1} \in H$ .

1) Так как  $f_1$  и  $f_2$  — преобразования, то  $f_2f_1$  — преобразование. Каждое из преобразований  $f_1$  и  $f_2$  четыре точки, лежащие на одной прямой, переводит в четыре точки, лежащие на одной прямой, и сохраняет их сложное отношение, поэтому преобразование  $f_2f_1$  обладает теми же свойствами, т. е. является проективным преобразованием. Таким образом,  $f_2f_1 \in H$ .

2) Пусть  $f \in H$ . Докажем, что  $f^{-1} \in H$ . Допустим, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой. Тогда точки  $A' = f^{-1}(A)$ ,  $B' = f^{-1}(B)$ ,  $C' = f^{-1}(C)$  также лежат на одной прямой, так как если предположить обратное, то три точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , не лежащие на одной прямой, в преобразовании  $f$  перейдут в три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , лежащие на одной прямой. Но это противоречит свойству 1<sup>о</sup> п. 3, § 11. Таким образом, преобразование  $f^{-1}$  точки, лежащие на одной прямой, переводит в точки, лежащие на одной прямой, и, очевидно, сохраняет сложное отношение четырех точек.

Таким образом, мы доказали, что множество  $H$  образует группу. Единицей этой группы является тождественное преобразование. Эта группа называется *группой проективных преобразований плоскости*.

Фигуры  $F$  и  $F'$  проективной плоскости называются *проективно-эквивалентными*, если они  $H$ -эквивалентны (ч. I, § 40), т. е. если существует такое проективное преобразование, которое фигуру  $F$  переводит в фигуру  $F'$ . Проективная эквивалентность является отношением эквивалентности на множестве всех фигур проективной плоскости. Примерами проективно-эквивалентных фигур являются любые две прямые или любые два пучка прямых. Из основной теоремы (§ 11) следует, что любые два репера проективно-эквивалентны. С другой стороны, если  $F$  — фигура, состоящая из трех точек, не

лежащих на одной прямой, а  $F'$  — фигура, состоящая из трех точек, лежащих на одной прямой, то  $F$  и  $F'$  не являются проективно-эквивалентными фигурами.

Рассмотрим другой пример. Пусть  $F$  — фигура, состоящая из прямой  $a$  и четырех ее отмеченных точек  $A, B, C, D$ , а  $F'$  — другая фигура, состоящая из прямой  $a'$  и четырех ее отмеченных точек  $A', B', C', D'$ . Эти фигуры проективно-эквивалентны тогда и только тогда, когда  $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ .

2. Рассмотрим теоретико-групповую схему истолкования проективной геометрии (ч. I, § 73, п. 2 и 3). Для упрощения изложения мы ограничимся случаем геометрии проективной плоскости. В качестве пространства рассмотрим множество всех точек проективной плоскости, а в качестве группы преобразований — группу  $H$  всех проективных преобразований этой плоскости. Проективная геометрия изучает такие свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях группы  $H$ .

В проективной геометрии можно рассматривать только такие понятия, которые сохраняются при проективных преобразованиях. Например, точка, прямая, репер — проективные понятия. Сложное отношение четырех точек прямой также является проективным понятием, так как оно инвариантно относительно проективных преобразований. Сложное отношение четырех точек — основной инвариант группы проективных преобразований. В следующей главе мы познакомимся с другими инвариантными свойствами (инвариантами) проективных фигур. Но для этого необходимо найти аналитическое выражение проективных преобразований, т. е. формулы, которые связывают координаты произвольной точки и ее образа в одном и том же репере. Этому вопросу посвящен следующий пункт.

3. Пусть  $f$  — данное проективное преобразование проективной плоскости. Возьмем на этой плоскости репер  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  и выразим координаты точки  $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$  через координаты ее образа  $M(x_1, x_2, x_3)$ . Для решения задачи рассмотрим образ репера  $R: R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ . Так как  $f$  — данное проективное преобразование, то мы считаем, что репер  $R'$  задан, т. е. даны координаты точек  $A'_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}), A'_2(a_{12}, a_{22}, a_{32}), A'_3(a_{13}, a_{23}, a_{33}), E'(a_{10}, a_{20}, a_{30})$  в репере  $R$ . При этом предполагается, что столбцы матрицы перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$  согласованы.

Из основной теоремы (§ 11) следует, что точка  $M'$  в репере  $R'$  имеет координаты  $x_1, x_2, x_3$ . Числа  $x'_1, x'_2, x'_3$  являются координатами той же точки в репере  $R$ , поэтому если в формулы (6) § 5 подставить вместо  $x'_1, x'_2, x'_3$  выражения  $x_1, x_2, x_3$  и вместо  $x_1, x_2, x_3$  выражения  $x'_1, x'_2, x'_3$  и обозначить  $\rho$  через  $\rho'$ , то получим аналитическое выражение проективного преобразования  $f$ :

$$\begin{aligned} \rho' x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho' x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho' x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как точки  $A'_1, A'_2, A'_3$  не лежат на одной прямой, то  $\det \|a_{ij}\| \neq 0$ .

Таким образом, *любое проективное преобразование плоскости определяется линейными формулами (1) с определителем, отличным от нуля.*

Можно доказать обратное утверждение.

**Т е о р е м а.** *Если отображение проективной плоскости в некотором репере  $R$  задано аналитически формулами (1), где  $\det \|a_{ij}\| \neq 0$ , то это отображение является проективным преобразованием.*

□ Пусть  $f$  — отображение, которое в репере  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  задано формулами (1). Так как  $\det \|a_{ij}\| \neq 0$ , то  $f$  — преобразование плоскости.

Обозначим через  $A'_1, A'_2, A'_3, E'$  образы вершин репера  $R$  и найдем их координаты. Для этого достаточно подставить координаты точек  $A_1(1, 0, 0), A_2(0, 1, 0), A_3(0, 0, 1), E(1, 1, 1)$  в формулы (1):

$$A'_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}), A'_2(a_{12}, a_{22}, a_{32}), A'_3(a_{13}, a_{23}, a_{33}), \quad (2)$$

$$E'(a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33}).$$

Так как  $\det \|a_{ij}\| \neq 0$ , то, пользуясь теоремой 1 § 3, убеждаемся в том, что никакие три из точек  $A'_1, A'_2, A'_3, E'$  не лежат на одной прямой, т. е. что эти точки образуют некоторый репер  $R'$ .

По основной теореме (§ 11) существует проективное преобразование  $f_1$ , которое переводит репер  $R$  в репер  $R'$ . Столбцы матрицы перехода от репера  $R$  к реперу  $R'$  согласованы (см. (2)), поэтому аналитическое выражение преобразования  $f_1$  имеет вид (1). Таким образом, преобразования  $f$  и  $f_1$  совпадают, т. е.  $f$  — проективное преобразование. ■

## § 13. Полный четырехвершинник. Задачи на построение

1. Рассмотрим на проективной прямой четыре точки  $A, B, C, D$ . Будем говорить, что пара точек  $A$  и  $B$  *гармонически разделяет* пару точек  $C, D$  (или *гармонически сопряжена* с парой точек  $C, D$ ), если  $(AB, CD) = -1$ .

Нетрудно видеть, что если  $(AB, CD) = -1$ , то имеют место соотношения  $(BA, CD) = -1$ ,  $(AB, DC) = -1$ ,  $(CD, AB) = -1$ . Таким образом, точки, составляющие как первую, так и вторую пару, равноправны между собой. Равноправны также пары  $A, B$  и  $C, D$ .

2. *Полным четырехвершинником* называется фигура, состоящая из четырех точек проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и шести прямых, соединяющих попарно эти точки. Указанные точки называются *вершинами*, а прямые — *сторонами* полного четырехвершинника. На рисунке 20 изображен полный четырехвершинник  $ABCD$  с вершинами в точках  $A, B, C$  и  $D$  и сторонами  $AB, BC, CD, DA, AC$  и  $BD$ . Стороны, не имеющие общей вершины, называются *противоположными*. В четырехвершиннике  $ABCD$  противоположными являются стороны  $AB$  и  $CD, BC$  и  $DA, AC$  и  $BD$ . Точки пересечения противоположных сторон называются *диагональными точками*, а прямые, попарно соединяющие диагональные точки, — *диагоналями* полного четырехвершинника. На рисунке 20  $P, Q$  и  $R$  — диагональные точки, а  $PQ, QR$  и  $RP$  — диагонали полного четырехвершинника  $ABCD$ .

*Лемма. Диагональные точки полного четырехвершинника не лежат на одной прямой.*

□ Рассмотрим полный четырехвершинник  $ABCD$  и докажем, что его диагональные точки  $P, Q$  и  $R$  не лежат на одной прямой (рис. 20). Для этого рассмотрим репер  $(A, B, C, D)$  и найдем координаты точек  $P, Q$  и  $R$  в этом репере. Прямые  $AC$  и  $BD$  имеют уравнения  $x_2 = 0, x_1 = x_3$ , поэтому точка  $R$  имеет координаты:  $R(1, 0, 1)$ . Аналогично находим координаты двух других диагональных

точек  $P(0, 1, 1), Q(1, 1, 0)$ . Так как  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ , то по теореме 1 § 3

точки  $P, Q$  и  $R$  не лежат на одной прямой. ■

3. Докажем теперь следующую важную теорему.

**Теорема.** *На каждой диагонали полного четырехвершинника диагональные точки гармонически разделяют две точки, в которых эта диагональ пересекает стороны, проходящие через третью диагональную точку.*

□ Пусть  $ABCD$  — полный четырехвершинник,  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — его диагональные точки (рис. 21). Докажем, что на диагонали  $PQ$  точки  $P$ ,  $Q$  гармонически разделяют пару точек  $M$  и  $N$ , в которых эта диагональ пересекает стороны  $BD$  и  $AC$ , проходящие через точку  $R$ . Для этого спроектируем точки  $P$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  на прямую  $AC$  сначала из центра  $B$ , а затем из центра  $D$ . По теореме § 10 имеем:

$$(PQ, MN) = (AC, RN), \quad (1)$$

$$(PQ, MN) = (CA, RN). \quad (2)$$

Так как  $(AC, RN) = \frac{1}{(CA, RN)}$ , то из равенств (1) и (2) получаем

$$(PQ, MN) = \frac{1}{(PQ, MN)} \quad \text{или}$$

$$(PQ, MN)^2 = 1. \quad \text{Точки } M \text{ и } N \text{ не совпадают,}$$

поэтому

$$(PQ, MN) \neq 1, \quad \text{т. е. } (PQ, MN) = -1. \quad \blacksquare$$

Из равенства (1), учитывая, что  $(PQ, MN) = -1$ , следует, что  $(AC, RN) = -1$ . Мы пришли к следующему утверждению.

**Следствие 1.** *Две вершины, лежащие на стороне полного четырехвершинника, гармонически разделяют пару точек, состоящую из диагональной точки и точки, в которой эта сторона пересекает диагональ, проходящую через две другие диагональные точки.*

Рассмотрим четыре прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  некоторого пучка. Будем говорить, что пара прямых  $a$ ,  $b$  гармонически разделяет пару прямых  $c$ ,  $d$ , если  $(ab, cd) = -1$ .

На рисунке 21 пара прямых  $RM$ ,  $RN$  гармонически разделяет пару  $RP$ ,  $RQ$ , так как  $(MN, PQ) = -1$ . Таким образом, приходим к утверждению.

**Следствие 2.** *Две противоположные стороны полного четырехвершинника гармонически разделяют две диагонали, проходящие через точку пересечения этих сторон.*

4. На проективной плоскости, так же как и на евклидовой плоско-

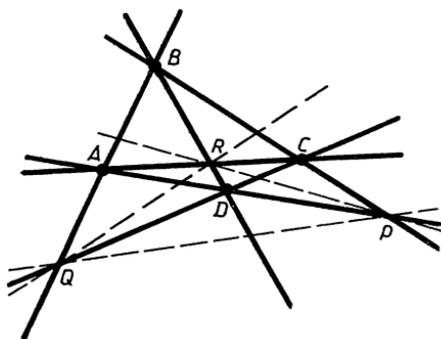


Рис. 20

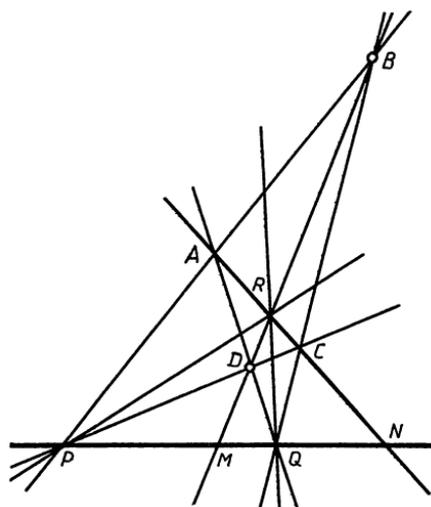


Рис. 21

сти, можно решать задачи на построение. Теория геометрических построений на проективной плоскости во многом аналогична той, которую мы изложили в § 96, ч. I, когда изучали геометрические построения на евклидовой плоскости. Существенное отличие заключается в том, что на проективной плоскости циркуль, как инструмент построения, не может быть использован, так как в проективной геометрии нет понятия окружности. Здесь задачи на построение решаются только с помощью линейки. При этом предполагается, что с помощью линейки как инструмента геометрических построений можно строить прямые, проходящие через данные или построенные точки.

Таким образом, при решении задач на построение основными фигурами на проективной плоскости являются точки и прямые (ср. построение одной линейкой, ч. I, § 106). Так же, как и на евклидовой плоскости, точки и прямые, заданные условиями задачи на построение, считаются построенными фигурами и множество построенных фигур конечно. Кроме того, мы считаем, что существует хотя бы одна построенная прямая, на любой построенной прямой существуют по крайней мере три построенные точки и вне построенной прямой существуют построенные точки.

Сформулируем постулаты построений на проективной плоскости, т. е. утверждения о допустимых шагах построений.

1. Построение прямой, проходящей через две построенные точки.
2. Построение точки пересечения двух построенных прямых.

Постановка задачи на построение на проективной плоскости формулируется следующим образом (ч. I, § 96). Дано конечное множество построенных точек и прямых и описано свойство, характеризующее искомую непостроенную точку или прямую. Требуется, используя постулаты построений, получить *конечное* множество точек и прямых, содержащих искомые элементы.

Рассмотрим пример решения задачи на построение. Условимся называть точку  $D$  *четвертой гармонической* к трем точкам  $A, B, C$ , если  $(AB, CD) = -1$ .

**З а д а ч а.** На проективной прямой  $d$  даны три точки  $P, Q$  и  $M$ . Построить точку  $X$  так, чтобы она была четвертой гармонической к точкам  $P, Q$  и  $M$ .

**Р е ш е н и е.** Для решения задачи воспользуемся предыдущей теоремой. Построим полный четырехвершинник  $ABCD$  так, чтобы точки  $P$  и  $Q$  были диагональными точками, а  $M$  — точкой пересечения прямой  $PQ$  со стороной, проходящей через третью диагональную точку  $R$  (рис. 22). Тогда сторона  $BD$  пересечет прямую  $PQ$  в искомой точке  $X$ .

Из этого анализа вытекает следующий способ построения искомой точки. Пусть  $P, Q, M$  — данные точки на прямой  $d$  (рис. 22).

Через точку  $P$  проведем какую-нибудь прямую, не совпадающую с прямой  $d$ , и возьмем на этой прямой две точки  $A$  и  $B$ . Построим прямые  $QA, QB, MA$  и обозначим через  $C$  точку пересечения прямых  $MA$  и  $QB$ . Построим затем прямую  $PC$  и обозначим через  $D$  точку пересечения этой прямой с прямой  $AQ$  (на рис. 22 прямые, которые

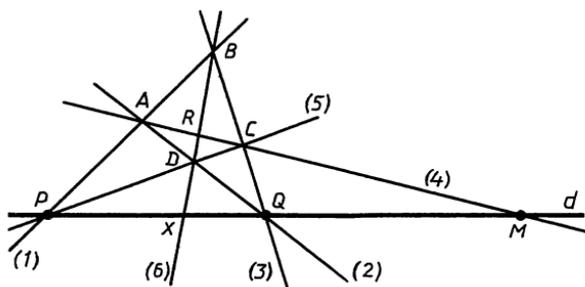


Рис. 22

мы строим, обозначены цифрами, причем цифры соответствуют той последовательности, в которой проводятся прямые). Построив, наконец, прямую  $BD$ , получаем искомую точку  $X$  как точку пересечения прямых  $BD$  и  $d$ .

Задача решена правильно, так как  $ABCD$  — полный четырехвершинник с диагональными точками  $P$ ,  $Q$  и  $R$ , где  $R$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ . По доказанной теореме  $(PQ, MX) = -1$ .

#### § 14. Проективные отображения прямых и пучков

1. Пусть  $g$  и  $g'$  — две прямые проективной плоскости. Взаимно однозначное отображение множества точек прямой  $g$  на множество точек прямой  $g'$  называется *проективным*, если оно сохраняет сложное отношение четырех точек, т. е. если  $M_1, M_2, M_3, M_4$  — четыре произвольные точки прямой  $g$ , а  $M'_1, M'_2, M'_3$  и  $M'_4$  — их образы, то  $(M_1M_2, M_3M_4) = (M'_1M'_2, M'_3M'_4)$ . Ясно, что при проективном отображении прямой на прямую сохраняется гармоническая разделенность пар точек.

Докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** Если  $R = (M_1, M_2, M_3)$  и  $R' = (M'_1, M'_2, M'_3)$  — произвольные реперы на прямых  $g$  и  $g'$ , то существует одно и только одно проективное отображение прямой  $g$  на прямую  $g'$ , которое репер  $R$  переводит в репер  $R'$ .

□ 1) Докажем сначала, что существует проективное отображение прямой  $g$  на прямую  $g'$ , которое репер  $R$  переводит в репер  $R'$ . Пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $g$ , которая в репере  $R$  имеет координаты  $(x_1, x_2)$ . Точке  $M$  поставим в соответствие точку  $M'$  прямой  $g'$ , которая в репере  $R'$  имеет те же координаты  $(x_1, x_2)$ . Ясно, что построенное отображение  $f$  является взаимно однозначным отображением прямой  $g$  на прямую  $g'$ , которое репер  $R$  переводит в репер  $R'$ . Докажем, что это отображение является проективным, т. е. сохраняет сложное отношение четырех точек. Пусть  $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2), D(d_1, d_2)$  — четыре точки прямой  $g$ , заданные своими координатами в репере  $R$ . Их образы  $A', B', C', D'$  на прямой  $g'$  в репере  $R'$  имеют те же координаты:  $A'(a_1, a_2), B'(b_1, b_2), C'(c_1, c_2), D'(d_1, d_2)$ . Пользуясь формулой (1) § 9, мы убеждаемся в том, что  $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ .

2) Докажем теперь, что  $f$  — единственное отображение, удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть  $f' : g \rightarrow g'$  — какое-то проективное отображение, которое переводит репер  $R$  в репер  $R'$ . Рассмотрим произвольную точку  $M$  прямой  $g$ , отличную от точек  $M_1, M_2, M_3$ , и обозначим через  $M'$  и  $M''$  образы этой точки в отображениях  $f$  и  $f' : M' = f(M), M'' = f'(M)$ . Так как проективные отображения  $f$  и  $f'$  репер  $R$  переводят в репер  $R'$ , то  $(M_1M_2, M_3M) = (M'_1M'_2, M'_3M')$  и  $(M_1M_2, M_3M) = (M'_1M'_2, M'_3M'')$ . Отсюда следует, что  $(M'_1M'_2, M'_3M') = (M'_1M'_2, M'_3M'')$ . По следствию из теоремы 1 § 9 точки  $M'$  и  $M''$  совпадают. Таким образом, отображения  $f$  и  $f'$  совпадают, т. е.  $f$  — единственное проективное отображение, которое репер  $R$  переводит в репер  $R'$ . ■

Из доказанной теоремы мы заключаем, что если даны две произвольные прямые, то существует бесконечное множество проективных отображений одной из этих прямых на другую.

2. Пусть  $g$  и  $g'$  — две прямые, а  $O$  — точка, не лежащая на этих прямых. Каждой точке  $M$  прямой  $g$  поставим в соответствие проекцию  $M'$  этой точки на прямую  $g'$  из центра  $O$  (рис. 23). Так как на проективной плоскости любые две прямые пересекаются, то полученное отображение  $f$  является взаимно однозначным. По теореме § 10 при этом отображении сохраняется сложное отношение четырех точек, т. е. отображение  $f$  является проективным. Оно называется *перспективным отображением прямой  $g$  на прямую  $g'$* . Точка  $O$  называется *центром перспективы*.

Докажем теорему, выражающую признак перспективного отображения.

**Теорема 2.** *Для того чтобы данное проективное отображение  $f : g \rightarrow g'$  было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы точка пересечения прямых  $g$  и  $g'$  переходила в себя.*

□ Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $g$  и  $g'$ . Если  $f$  — перспективное отображение, то, очевидно,  $f(P) = P$  (см. рис. 23).

Допустим теперь, что в проективном отображении  $f : g \rightarrow g'$  точка  $P$  переходит в себя, и докажем, что  $f$  — перспективное отображение. Возьмем на прямой  $g$  две точки  $A$  и  $B$ , отличные от точки  $P$ , и рассмотрим их образы  $A'$  и  $B'$ . Так как  $g$  и  $g'$  — различные прямые, то

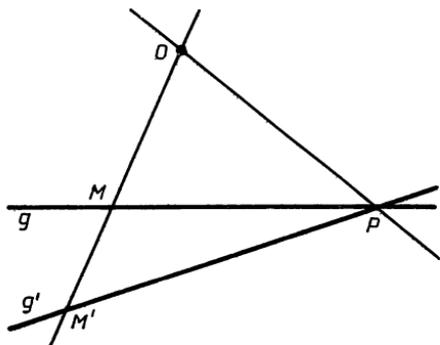


Рис. 23

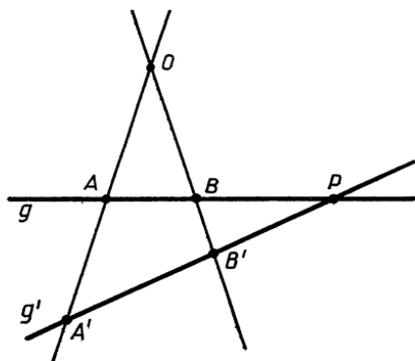


Рис. 24

прямые  $AA'$  и  $BB'$  не совпадают (рис. 24), поэтому пересекаются в некоторой точке  $O$ , не лежащей на прямых  $g$  и  $g'$ . Рассмотрим перспективное отображение  $f: g \rightarrow g'$  с центром  $O$ . Оно переводит точки  $A, B, P$  соответственно в точки  $A', B', P$ , поэтому согласно теореме 1 совпадает с отображением  $f$ . Таким образом,  $f$  — перспективное отображение. ■

3. Рассмотрим задачу на построение образов точек при проективном отображении прямых.

**Задача 1.** В проективном отображении  $f: g \rightarrow g'$  репер  $R = (A, B, C)$  переходит в репер  $R' = (A', B', C')$ . Построить образ произвольной точки прямой  $g$ .

**Решение.** Для решения задачи попытаемся представить отображение  $f$  как произведение двух перспективных отображений. Проведем прямую  $AA'$  и возьмем на ней две точки  $O$  и  $O'$ , отличные от точек  $A$  и  $A'$ . Пусть  $B_0$  — точка пересечения прямых  $OB, O'B'$ , а  $C_0$  — точка пересечения прямых  $OC$  и  $O'C'$  (рис. 25). Обозначим через  $g_0$  прямую  $B_0C_0$  и рассмотрим перспективное отображение  $f_1: g \rightarrow g_0$  с центром в точке  $O$  и другое перспективное отображение  $f_2: g_0 \rightarrow g'$  с центром в точке  $O'$ . Отображение  $f_2f_1: g \rightarrow g'$  переводит точки  $A, B, C$  соответственно в точки  $A', B', C'$ , поэтому по теореме 1 оно совпадает с отображением  $f$ , т. е.  $f = f_2f_1$ .

Отсюда следует простой способ построения образа  $M'$  произвольной точки  $M$  прямой  $g$ . Проведем прямую  $OM$  и обозначим через  $M_0$  точку пересечения этой прямой с прямой  $g_0$ . Проведем затем прямую  $M_0O'$ , которая пересекает прямую  $g'$  в искомой точке  $M'$ . В самом деле,  $M_0 = f_1(M)$ ,  $M' = f_2(M_0)$ , поэтому  $f(M) = f_2f_1(M) = f_2(M_0) = M'$ . ■

4. Пользуясь принципом двойственности, введем понятие проективного отображения пучков. Рассмотрим два пучка прямых с центрами в точках  $O$  и  $O'$ . *Взаимно однозначное отображение пучка  $O$  на пучок  $O'$  называется проективным, если оно сохраняет сложное отношение четырех прямых.*

Имеет место теорема, двойственная теореме 1.

**Теорема 3.** *Если  $a, b, c$  — три произвольные прямые пучка  $O$ ,  $a', b', c'$  — три произвольные прямые пучка  $O'$ , то существует одно и только одно проективное отображение пучка  $O$  на пучок  $O'$ , которое прямые  $a, b, c$  переводит соответственно в прямые  $a', b', c'$ .*

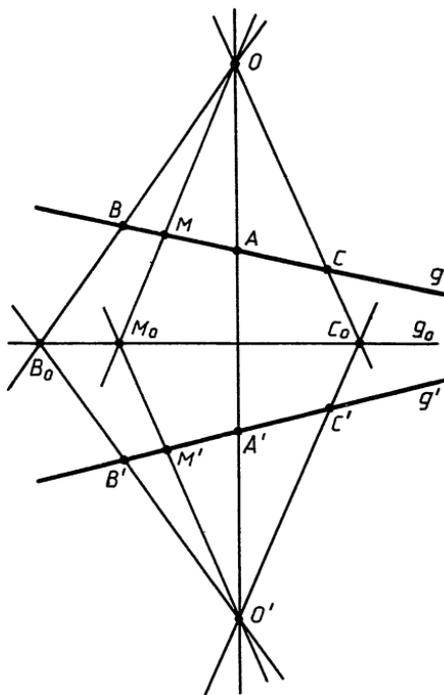


Рис. 25

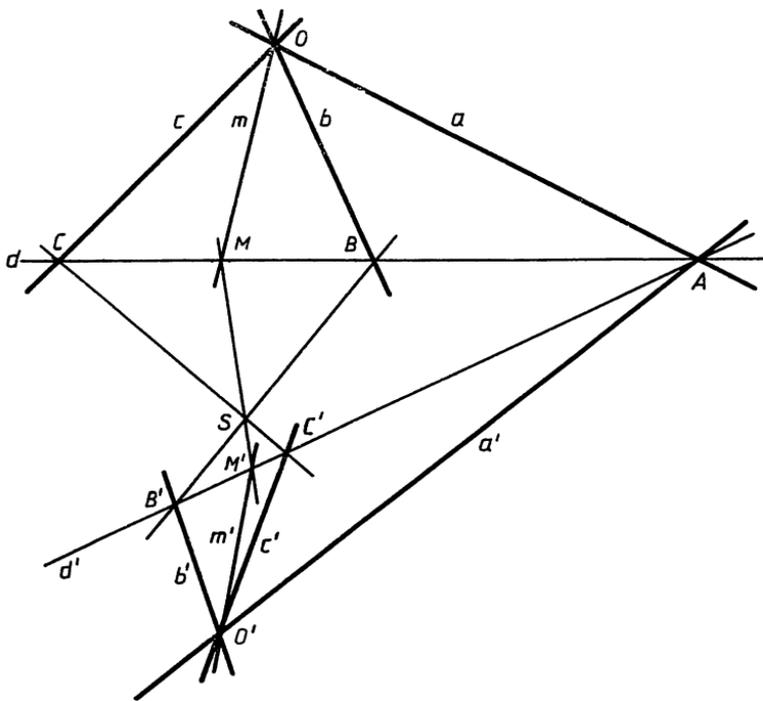


Рис. 26

Рассмотрим пучки с центрами в двух точках  $O$  и  $O'$  и прямую  $d$ , не проходящую через точки  $O$  и  $O'$ . Каждой прямой  $a$  пучка  $O$  поставим в соответствие прямую  $a'$  пучка  $O'$ , которая проходит через точку пересечения прямых  $a$  и  $d$ . Построенное отображение пучка  $O$  на пучок  $O'$  является, очевидно, проективным и называется *перспективным отображением пучка  $O$  на пучок  $O'$* . Прямая  $d$  называется *осью перспективы*.

Имеет место теорема, двойственная теореме 2.

**Т е о р е м а 4.** *Для того чтобы данное проективное отображение одного пучка на другой пучок было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы прямая, проходящая через центры пучков, переходила в себя.*

Рассмотрим задачу на построение образов прямых при проективном отображении пучков. Эта задача двойственна задаче 1, и ее решение получается из решения задачи 1 по принципу двойственности.

**З а д а ч а 2.** В проективном отображении  $f$  пучка  $O$  на пучок  $O'$  три прямые  $a, b, c$  переходят соответственно в прямые  $a', b', c'$ . Построить образ произвольной прямой  $m$  пучка  $O$ .

**Р е ш е н и е.** Через точку  $A$  пересечения прямых  $a$  и  $a'$  проведем две прямые  $d$  и  $d'$ , отличные от прямых  $a$  и  $a'$ , и обозначим через  $B$  и  $C$  точки пересечения прямых  $b$  и  $c$  с прямой  $d$ , а через  $B'$  и  $C'$  точки пересечения прямых  $b'$  и  $c'$  с прямой  $d'$  (рис. 26). Отображение  $f$  по-

рождает проективное отображение  $\varphi: d \rightarrow d'$  по закону: точке  $M$  прямой  $d$  ставится в соответствие такая точка  $M'$  прямой  $d'$ , что  $O'M' = f(OM)$ . Так как  $f$  — проективное отображение, то и  $\varphi$  — проективное отображение. Но  $\varphi(A) = A$ , поэтому  $\varphi$  — перспективное отображение и его центром является точка  $S$  пересечения прямых  $BB'$  и  $CC'$ .

Для построения образа произвольной прямой  $m$  пучка  $O$  находим сначала точку  $M = m \cap d$ , а затем  $M' = SM \cap d'$ . Прямая  $O'M'$  искомая.

## § 15. Проективные преобразования прямой. Инволюции

1. Если прямые  $g$  и  $g'$  совпадают, то проективное отображение прямой  $g$  на прямую  $g'$  называется *проективным преобразованием* прямой  $g$ . Наиболее простым примером проективного преобразования прямой является *тождественное преобразование*, т. е. преобразование, в котором каждая точка переходит в себя.

При доказательстве теоремы 1 § 14 мы не предполагали, что  $g$  и  $g'$  — различные прямые, поэтому теорема верна также и в том случае, когда эти прямые совпадают, т. е. имеет место теорема.

**Т е о р е м а 1.** *Если  $R$  и  $R'$  — произвольные реперы на прямой  $g$ , то существует одно и только одно проективное преобразование прямой  $g$ , которое репер  $R$  переводит в репер  $R'$ .*

Пусть  $f: g \rightarrow g$  — проективное преобразование прямой  $g$ . Точку этой прямой назовем *инвариантной (неподвижной) точкой* преобразования  $f$ , если она переходит в себя в этом преобразовании. Из теоремы 1 легко заключить, что существуют проективные преобразования, имеющие неподвижные точки.

В самом деле, пусть  $A, B, C, B', C'$  — какие-то пять точек прямой  $g$ . Тогда проективное преобразование этой прямой, которое точки  $A, B, C$  переводит соответственно в точки  $A, B', C'$ , имеет по крайней мере одну неподвижную точку (точку  $A$ ); проективное преобразование, которое переводит точки  $A, B, C$  соответственно в точки  $A, B, C'$ , имеет по крайней мере две неподвижные точки (точки  $A$  и  $B$ ).

Докажем, что нетождественное проективное преобразование прямой не может иметь более двух неподвижных точек.

**Т е о р е м а 2.** *Если проективное преобразование прямой имеет три неподвижные точки, то оно является тождественным преобразованием.*

□ Пусть  $A, B$  и  $C$  — три неподвижные точки проективного преобразования  $f: g \rightarrow g$ . Рассмотрим тождественное преобразование  $f_0: g \rightarrow g$  прямой  $g$ . Так как в преобразованиях  $f$  и  $f_0$  репер  $R = (A, B, C)$  переходит в себя, то по теореме 1 эти преобразования совпадают, т. е.  $f$  — тождественное преобразование. ■

2. Рассмотрим задачу построения образов точек при проективном преобразовании прямой.

**З а д а ч а.** При проективном преобразовании  $f: g \rightarrow g$  репер  $R = (A, B, C)$  переходит в репер  $R' = (A', B', C')$ . Построить образ произвольной точки  $M$  прямой  $g$ .

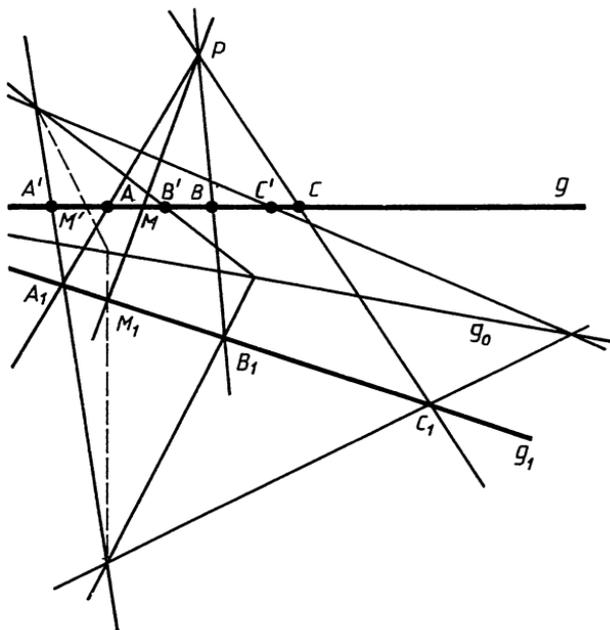


Рис. 27

**Решение.** Проведем какую-нибудь прямую  $g_1$ , отличную от прямой  $g$ , и возьмем точку  $P$ , не лежащую на прямых  $g$  и  $g_1$  (рис. 27). Построим образы точек  $A, B, C$  и  $M$  в перспективном отображении  $f_1: g \rightarrow g_1$  с центром  $P$  (на рис. 27 образы этих точек обозначены через  $A_1, B_1, C_1, M_1$ ). Затем, пользуясь задачей 1 § 14, построим образ  $M'$  точки  $M_1$  в проективном отображении  $f_2: g_1 \rightarrow g$ , которое репер  $(A_1, B_1, C_1)$  переводит в репер  $(A', B', C')$ . Ясно, что  $f_2 f_1$  — проективное преобразование прямой  $g$ , которое переводит репер  $R$  в репер  $R'$ , поэтому  $f_2 f_1 = f$ . Отсюда следует, что  $M'$  — искомая точка, так как  $f(M) = f_2 f_1(M) = f_2(M_1) = M'$ .

**3.** Пусть  $f$  — проективное преобразование прямой  $g$ . Преобразование  $f^{-1}$ , обратное преобразованию  $f$ , также является проективным преобразованием прямой  $g$ , так как оно является взаимно однозначным отображением и сохраняет сложное отношение четырех точек. Нетождественное проективное преобразование прямой называется *инволюцией*, если оно совпадает с обратным преобразованием.

Из этого определения следует, что если произвольная точка  $M$  в данной инволюции переходит в точку  $M'$ , то точка  $M'$  в той же инволюции переходит в точку  $M$ . Таким образом, инволюция  $f: g \rightarrow g$  разбивает все точки прямой  $g$  на пары точек, соответствующих друг другу.

Докажем теорему, выражающую признак инволюции.

**Теорема 3.** Если в данном проективном преобразовании  $f: g \rightarrow g$  какая-то точка  $A$  прямой  $g$  переходит в точку  $B$ , отличную от точки  $A$ , а точка  $B$  переходит в точку  $A$ , то  $f$  — инволюция.

□ Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что если  $M$  — произвольная точка прямой  $g$ , отличная от точек  $A$  и  $B$ , а  $M'$  — образ этой точки, то  $M = f(M')$ . Обозначим через  $M''$  образ точки  $M'$  в преобразовании  $f$ . Из определения проективного преобразования следует, что  $(AB, MM') = (BA, M'M'')$ , поэтому  $(AB, M'M) = (AB, M'M'')$ . Отсюда следует, что  $M$  и  $M''$  совпадают, т. е.  $M = f(M')$ . ■

Так как инволюция — нетождественное преобразование прямой, то по теореме 2 она не может иметь более двух инвариантных точек. Докажем, что *любая инволюция либо не имеет ни одной инвариантной точки, либо имеет две инвариантные точки*. Для этого достаточно доказать, что если инволюция имеет одну инвариантную точку, то она имеет еще одну инвариантную точку. Пусть  $A$  — инвариантная точка инволюции  $f$ , а  $M$  и  $M'$  — пара точек, соответствующих в этом преобразовании. По теореме 1 § 9 существует точка  $B$ , такая, что

$$(MM', AB) = -1. \quad (1)$$

Ясно, что точка  $B$  не совпадает с точкой  $A$ . Пусть  $B'$  — образ точки  $B$  в инволюции  $f$ . Четыре точки  $M, M', A, B$  переходят соответственно в точки  $M', M, A, B'$ , поэтому  $(MM', AB) = (M'M, AB')$ . Отсюда, учитывая равенство (1), получаем  $(M'M, AB') = -1$  или  $(MM', AB') = -1$ . Таким образом,  $(MM', AB) = (MM', AB')$ . По следствию теоремы 1 § 9 точки  $B$  и  $B'$  совпадают, значит,  $B$  — инвариантная точка инволюции  $f$ .

Инволюция называется *эллиптической*, если она не имеет инвариантных точек, и *гиперболической*, если она имеет две инвариантные точки.

В заключение отметим следующее интересное свойство гиперболической инволюции: *две инвариантные точки гиперболической инволюции гармонически разделяют любые две несовпадающие соответствующие точки этой инволюции*. Это утверждение непосредственно следует из равенства (1).

## § 16. Мнимые точки проективной плоскости. Линии второго порядка

1. Если на проективной плоскости задан репер  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ , то любая точка плоскости имеет проективные координаты  $(x_1, x_2, x_3)$ , которые являются действительными числами, не равными нулю одновременно. Обратное: любые три действительные числа, не равные одновременно нулю, взятые в определенном порядке, являются координатами некоторой точки.

Для большей общности дальнейших исследований расширим понятие точки, т. е. дополним проективную плоскость так называемыми мнимыми точками. Введем следующее соглашение: при выбранном репере  $R$  точкой назовем любую тройку чисел  $(x_1, x_2, x_3)$ , не равных одновременно нулю, взятых в определенном порядке. Здесь  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ , где  $\mathbb{C}$  — множество всех комплексных чисел. Числа  $x_1, x_2, x_3$  называются *координатами* точки. Точки  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(y_1, y_2, y_3)$  совпадают тогда и только тогда, когда существует число  $\lambda \in \mathbb{C}$ , такое,

что  $y_1 = \lambda x_1$ ,  $y_2 = \lambda x_2$ ,  $y_3 = \lambda x_3$ . Таким образом, координаты точки определены с точностью до общего множителя  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Точка  $M$  называется *вещественной*, если ее координаты — вещественные числа или могут быть приведены к вещественным числам умножением на какое-то комплексное число  $\lambda \neq 0$ ; в противном случае точка называется *мнимой*. Например, точки  $A(1, -2, 3)$  и  $B(2i, i, 5i)$  вещественные, а точка  $C(i, 1 + i, 1)$  мнимая.

Мы будем рассматривать только такие реперы плоскости, для каждого из которых все вершины и единичная точка являются вещественными точками. Поэтому можно считать, что элементы матрицы (1) § 5 перехода от одного репера к другому — вещественные числа.

Если точка  $M$  в репере  $R$  имеет координаты  $(x_1, x_2, x_3)$ , то будем считать, что та же точка в репере  $R'$  имеет координаты  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , где  $x'_1, x'_2, x'_3$  определяются из формул (6) § 5. Так как в этих формулах  $a_{ij}$  — вещественные числа, *понятие мнимой точки не зависит от выбора системы координат*. Отметим, что вещественным точкам соответствуют обычные точки проективной плоскости, поэтому для краткости их называют просто точками. Множество всех вещественных и мнимых точек называется *комплексной проективной плоскостью*.

Две точки  $A_1$  и  $A_2$  называются *комплексно-сопряженными точками*, если их координаты могут быть записаны в виде  $A_1(a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, a_3 + b_3i)$ ,  $A_2(a_1 - b_1i, a_2 - b_2i, a_3 - b_3i)$ , где  $a_i, b_i$  — вещественные числа. Например,  $A_1(2 + i, 3 - i, 4)$  и  $A_2(4 - 2i, 6 + 2i, 8)$  — комплексно-сопряженные точки, так как, умножив координаты точки  $A_2$  на  $\frac{1}{2}$ , получаем:  $A_2(2 - i, 3 + i, 4)$ .

Легко доказать, что понятие комплексно-сопряженных точек также не зависит от выбора репера.

Прямой линией комплексной проективной плоскости называем множество всех (вещественных и мнимых) точек, координаты  $(x_1, x_2, x_3)$  которых при выбранном репере удовлетворяют уравнению:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

причем коэффициенты  $u_1, u_2, u_3$  (координаты прямой) — комплексные числа, которые не равны одновременно нулю. Координаты прямой определены с точностью до общего множителя  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Прямая называется *вещественной*, если ее координаты — вещественные числа или могут быть приведены к вещественным числам умножением на какое-то комплексное число  $\lambda \neq 0$ ; в противном случае прямая называется *мнимой*. Очевидно, эти понятия не зависят от выбора репера.

Нетрудно доказать следующие утверждения.

$1^0$ . На каждой вещественной прямой лежит бесконечное множество мнимых точек.

$2^0$ . На каждой мнимой прямой лежит только одна вещественная точка.

$3^0$ . Через две точки проходит одна и только одна прямая. Через комплексно-сопряженные точки проходит вещественная прямая.

4<sup>0</sup>. Любые две прямые пересекаются в одной точке (вещественной или мнимой).

2. Введем понятие сложного отношения четырех точек (вещественных или мнимых), лежащих на вещественной прямой комплексной проективной плоскости.

Пусть  $d$  — вещественная прямая, а  $A, B, C, D$  — четыре точки на ней. Репер  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  возьмем так, чтобы точки  $A_1$  и  $A_2$  лежали на этой прямой. Тогда координаты данных точек можно обозначить так:  $A(a_1, a_2, 0)$ ,  $B(b_1, b_2, 0)$ ,  $C(c_1, c_2, 0)$ ,  $D(d_1, d_2, 0)$ .

Сложным отношением этих точек называется число  $(AB, CD)$ , которое определяется формулой (1) §9. Можно доказать, что это понятие не зависит от выбора репера, т. е. если выбрать другой репер  $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$  так, чтобы  $A'_1, A'_2 \in d$ , то для точек  $A, B, C, D$  в репере  $R'$  получим то же значение сложного отношения, что и в репере  $R$ .

Пары точек  $A, B$  и  $C, D$  называются *гармонически сопряженными*, если  $(AB, CD) = -1$ . Докажем следующую лемму.

*Лемма 1. Если  $J_1$  и  $J_2$  — комплексно-сопряженные точки вещественной прямой  $d$ , а  $P$  — произвольная вещественная точка этой прямой, то существует на этой прямой единственная вещественная точка  $Q_1$ , такая, что  $(J_1 J_2, P Q_1) = -1$ , и другая единственная вещественная точка  $Q_2$ , такая, что  $(J_1 J_2, P Q_2) = i$ .*

□ Репер  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  выберем так, чтобы точки  $A_1$  и  $A_2$  лежали на прямой  $d$  и точка  $P$  совпала с точкой  $A_2$ . В этом репере имеем:  $J_1(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, 0)$ ,  $J_2(a_1 - ib_1, a_2 - ib_2, 0)$ ,  $P(0, 1, 0)$ . Разделив координаты точки  $J_1$  на  $a_1 + ib_1$ , а координаты точки  $J_2$  на  $a_1 - ib_1$ , получаем координаты этих точек в виде:  $J_1\left(1, \frac{a_2 + ib_2}{a_1 + ib_1}, 0\right)$ ,  $J_2\left(1, \frac{a_2 - ib_2}{a_1 - ib_1}, 0\right)$ , или  $J_1(1, a + ib, 0)$ ,  $J_2(1, a - ib, 0)$ .

Координаты произвольной точки  $Q$ , лежащей на прямой  $d$  и отличной от точки  $P$ , могут быть записаны так:  $Q(1, y, 0)$ .

По формуле (1) §9 имеем:

$$(J_1 J_2, P Q) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a + ib & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a - ib & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a + ib & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a - ib & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y - a + ib}{y - a - ib}.$$

Положив  $(J_1 J_2, P Q) = -1$ , получаем  $\frac{y - a + ib}{y - a - ib} = -1$ , или  $y = a$ .

Таким образом, существует единственная точка  $Q_1(1, a, 0)$ , удовлетворяющая условию  $(J_1 J_2, P Q) = -1$ . Аналогично доказываем, что существует единственная точка  $Q_2(1, a + b, 0)$ , удовлетворяющая условию  $(J_1, J_2, P Q_2) = i$ . ■

3. Множество всех точек проективной плоскости, координаты которых в некотором репере  $R$  удовлетворяют однородному уравнению второй степени, т. е. уравнению вида

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, \quad (1)$$

называется *линией или кривой второго порядка*.

Мы предполагаем, что все коэффициенты  $a_{ij}$  в уравнении (1) — действительные числа, не обращающиеся одновременно в нуль, и  $a_{ij} = a_{ji}$  при  $i, j = 1, 2, 3$ .

Уравнение (1) в сокращенном виде запишется так<sup>1</sup>:

$$\sum a_{ij}x_ix_j = 0. \quad (2)$$

Нетрудно доказать, что понятие линии второго порядка не зависит от выбора репера  $R$ . В самом деле, пусть фигура  $\gamma$  в репере  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  имеет уравнение (2). Если  $R'$  — новый проективный репер, то формулы преобразования координат точек при переходе от репера  $R$  к реперу  $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$  можно записать в виде (см. формулы (6) § 5)

$$\rho x_i = c_{i1}x'_1 + c_{i2}x'_2 + c_{i3}x'_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), получим уравнение фигуры  $\gamma$  в новом репере:

$$\sum a'_{ij}x'_ix'_j = 0, \quad (3)$$

где

$$a_{ij} = \sum c_{ki}a_{kl}c_{lj}, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Рассмотрим векторное пространство  $V$  трех измерений, которое порождает проективную плоскость. Если  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  — векторы, порождающие точки  $A_1, A_2, A_3$ , а  $\vec{a}'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31}), \vec{a}'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32}), \vec{a}'_3(c_{31}, c_{32}, c_{33})$  — векторы, порождающие точки  $A'_1, A'_2, A'_3$ , то формулы (4) в точности совпадают с формулами (4) § 91, ч. I, по которым меняются коэффициенты квадратичной формы на пространстве  $V$  при переходе от базиса  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  к базису  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$  по формулам (5) § 5. Поэтому левая часть уравнения (1) (где по условию матрица  $A = \|a_{ij}\|$  ненулевая) определяет на пространстве  $V$  некоторую квадратичную форму

$$g(\vec{x}) = \sum a_{ij}x_ix_j. \quad (5)$$

Следовательно, матрицы  $A = \|a_{ij}\|$  и  $A' = \|a'_{ij}\|$  имеют один и тот же ранг, равный рангу квадратичной формы  $g(\vec{x})$ . Отсюда, в частности, следует, что матрица  $A'$  ненулевая, т. е. в репере  $R'$  фигура  $\gamma$  определяется уравнением второй степени (3). Тем самым доказано, что понятие линии второго порядка не зависит от выбора репера.

4. Ранг квадратичной формы (5) называется *рангом линии второго порядка*, заданной уравнением (1). Линия называется *невыврожденной*, если ранг  $r$  этой линии равен трем, и *вырожденной*, если  $r < 3$ .

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем двойную сумму вида  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_ix_j$  коротко обозначаем так:  $\sum a_{ij}x_ix_j$ .

Характерное свойство невырожденной линии второго порядка выражено в следующей лемме.

*Лемма 2. Любая прямая пересекает невырожденную линию второго порядка не более чем в двух точках.*

□ Утверждение леммы докажем методом от противного. Пусть какая-то прямая  $d$  имеет, по крайней мере, три общие точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  с данной линией второго порядка  $\gamma$ . Проективный репер  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  выберем так, чтобы точки  $A_1$  и  $A_2$  совпали с точками  $M_1$  и  $M_2$ , а точка пересечения прямых  $A_1A_2$  и  $A_3E$  — с точкой  $M_3$  (рис. 28, на этом рисунке линия  $\gamma$  не изображена). Запишем уравнение линии  $\gamma$  в виде (1). Точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  имеют координаты  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(1, 1, 0)$ , поэтому, подставив эти значения в уравнение (1), получаем  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ . Мы пришли к противоречию, так как отсюда следует, что  $\gamma$  — вырожденная линия. ■

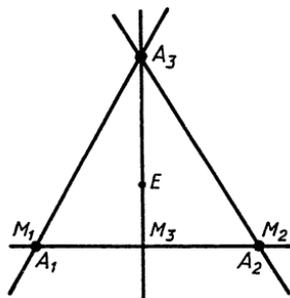


Рис. 28

5. Покажем, что понятия линии второго порядка и ее ранга являются проективными понятиями, т. е. не меняются при проективных преобразованиях плоскости. В самом деле, пусть в репере  $R$  линия второго порядка ранга  $r$  задана уравнением (1).

Рассмотрим произвольное проективное преобразование  $f$  плоскости и обозначим через  $\gamma'$  образ линии  $\gamma$ , а через  $R'$  образ репера  $R$  в этом преобразовании. По основной теореме (§ 11) в преобразовании  $f$  каждая точка  $M$  плоскости с координатами  $x_1, x_2, x_3$  в репере  $R$  переходит в точку  $M'$  с координатами  $x_1, x_2, x_3$  в репере  $R'$ . Поэтому множество  $\gamma'$  в репере  $R'$  задается тем же уравнением (1). Отсюда следует, что  $\gamma'$  — линия второго порядка ранга  $r$ . Итак, доказана теорема.

*Теорема. При любом проективном преобразовании линия второго порядка ранга  $r$  переходит в линию второго порядка того же ранга  $r$ .*

## § 17. Проективная классификация линий второго порядка

1. Пусть линия второго порядка  $\gamma$  в репере  $R$  имеет уравнение

$$\sum a_{ij}x_ix_j = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$q(\vec{x}) = \sum a_{ij}x_ix_j \quad (2)$$

в векторном пространстве  $V$  трех измерений, которое порождает проективную плоскость. По теореме 2 § 91, ч. 1 в пространстве  $V$  всегда существует базис  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ , в котором квадратичная форма (2) имеет нормальный вид. Рассмотрим точки  $A'_1, A'_2, A'_3, E'$ , которые порождаются векторами  $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3, \vec{e}'$ , где  $\vec{e}' = \vec{a}'_1 + \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3$ . В ре-

пере  $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$  уравнение линии  $\gamma$  имеет вид:

$$\varepsilon_1 x'_1 x'_1 + \varepsilon_2 x'_2 x'_2 + \varepsilon_3 x'_3 x'_3 = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  равны  $-1, +1$  или  $0$ , но не все они одновременно равны нулю.

Рассмотрим три возможных случая в зависимости от ранга  $r$  линии  $\gamma$ .

а)  $r = 3$ . В этом случае можно считать, что в уравнении (3)  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = \pm 1$ . Мы получаем два типа невырожденных линий второго порядка:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad (4)$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \quad (5)$$

Линия, заданная уравнением (4), не имеет ни одной вещественной точки; она называется *нулевой линией второго порядка*. Линия, заданная уравнением (5), называется *овальной линией второго порядка*.

б)  $r = 2$ . Можно считать, что в уравнении (3)  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 0$  или  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = 0$ . Получаем два типа линий второго порядка ранга 2:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad (6)$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0. \quad (7)$$

Уравнением (6) задается линия, распадающаяся на пару мнимых прямых:  $x_1 + ix_2 = 0$  и  $x_1 - ix_2 = 0$ , пересекающихся в вещественной точке  $(0, 0, 1)$ . Уравнением (7) задается линия, которая распадается на пару вещественных прямых:  $x_1 + x_2 = 0$  и  $x_1 - x_2 = 0$ .

в)  $r = 1$ . Можно считать, что в уравнении (3)  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ . Получаем линию, заданную уравнением

$$x_1^2 = 0. \quad (8)$$

В этом случае говорят, что линия  $\gamma$  представляет собой пару совпадающих прямых:  $x_1 = 0$  и  $x_1 = 0$ .

Уравнения (4) — (8) называются *каноническими уравнениями соответствующих линий*. Итак, *на проективной плоскости существует пять типов линий второго порядка, представленных в следующей таблице:*

	Название линии	Каноническое уравнение	Ранг линии
1	Овальная линия	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	3
2	Нулевая линия	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	3
3	Пара прямых	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	2
4	Пара мнимых прямых	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2
5	Пара совпадающих прямых	$x_1^2 = 0$	1

2. Эта классификация проведена по рангу линий второго порядка и по наличию вещественных точек. Эти характеристики линий второ-

го порядка не меняются при любых проективных преобразованиях плоскости. Поэтому указанные типы линий проективно различны, т. е. не существует проективного преобразования, которое переводит линию одного типа в линию другого типа.

С другой стороны, любые две линии одного и того же типа проективно-эквивалентны. Пусть, например,  $\gamma$  и  $\gamma'$  — две овальные линии, которые в реперах  $R$  и  $R'$  заданы каноническими уравнениями:

$$\begin{aligned}(\gamma): x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0, \\(\gamma'): x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Рассмотрим проективное преобразование  $f$ , которое репер  $R$  переводит в репер  $R'$ . В этом преобразовании каждая точка плоскости с координатами  $x_1, x_2, x_3$  переходит в точку с координатами  $x_1' = \lambda x_1, x_2' = \lambda x_2, x_3' = \lambda x_3$ , поэтому образ линии  $\gamma$  в репере  $R'$  имеет уравнение (9). Это означает, что в преобразовании  $f$  линия  $\gamma$  переходит в линию  $\gamma'$ .

В дальнейшем мы не будем рассматривать линии, которые распадаются на пару прямых.

## § 18. Полюс и поляра

1. Пусть  $\gamma$  — невырожденная линия второго порядка, которая в репере  $R$  задана уравнением

$$\sum a_{ij} x_i x_j = 0, \quad (1)$$

а  $d$  — прямая, проходящая через точки  $(p_1, p_2, p_3)$  и  $(q_1, q_2, q_3)$ , задана в том же репере параметрическими уравнениями:

$$x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1, \quad x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2, \quad x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3. \quad (2)$$

Найдем координаты точек пересечения линии  $\gamma$  с прямой  $d$ . Для этого подставим значения  $x_1, x_2, x_3$  из равенств (2) в уравнение (1). После несложных преобразований получим уравнение для определения параметров  $\lambda$  и  $\mu$  точек пересечения:

$$A_{11}\lambda^2 + 2A_{12}\lambda\mu + A_{22}\mu^2 = 0, \quad (3)$$

где

$$A_{11} = \sum a_{ij} p_i p_j, \quad A_{12} = \sum a_{ij} p_i q_j, \quad A_{22} = \sum a_{ij} q_i q_j. \quad (4)$$

Каждой паре значений  $\mu$  и  $\lambda$ , удовлетворяющих равенству (3) и не равных одновременно нулю, отвечает точка пересечения линии  $\gamma$  и прямой  $d$ , причем точка является вещественной тогда и только тогда, когда ее параметры — вещественные числа. Координаты этой точки находятся из равенств (2). При этом точки  $M_1$  и  $M_2$  соответственно с параметрами  $(\lambda_1, \mu_1)$  и  $(\lambda_2, \mu_2)$  различны тогда и только тогда, когда параметры не пропорциональны.

Так как  $\gamma$  — невырожденная линия, то прямая  $d$  имеет с этой линией не более чем две общие точки (§ 16, лемма 2), поэтому в уравнении (3) хотя бы один из коэффициентов  $A_{11}, A_{12}$  или  $A_{22}$  отличен от нуля.

Уравнение (3) совпадает с уравнением (5) § 32, ч. I для нахождения асимптотических направлений линий второго порядка, которое нами было исследовано в § 32, ч. I. В соответствии с теоремой из

этого параграфа возможны следующие случаи в зависимости от значения определителя  $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$ :

а)  $\Delta > 0$ . Уравнение (3) не имеет вещественных решений относительно  $\lambda$ ,  $\mu$ , но имеет (с точностью до числового множителя) два непропорциональных комплексно-сопряженных решения. Поэтому прямая  $d$  пересекается с линией  $\gamma$  в двух комплексно-сопряженных точках.

б)  $\Delta < 0$ . Уравнение (3) имеет (с точностью до числового множителя) два непропорциональных вещественных решения. Поэтому прямая  $d$  пересекается с линией  $\gamma$  в двух точках.

в)  $\Delta = 0$ . Уравнение (3) имеет только одно решение (с точностью до числового множителя), поэтому прямая  $d$  имеет только одну общую точку  $M_0$  с кривой  $\gamma$ . В этом случае прямая  $d$  называется касательной к линии в точке  $M_0$ .

2. Докажем, что в каждой точке невырожденной линии второго порядка существует единственная касательная.

Пусть  $\gamma$  — невырожденная линия второго порядка, заданная уравнением (1), а  $P(p_1, p_2, p_3)$  — любая ее точка. Рассмотрим произвольную точку  $Q(q_1, q_2, q_3)$  плоскости, отличную от точки  $P$ , и зададим прямую  $PQ$  параметрическими уравнениями (2). Прямая  $PQ$  является касательной к линии  $\gamma$  тогда и только тогда, когда  $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0$ . Так как  $P \in \gamma$ , то  $A_{11} = 0$ . Мы приходим к следующему выводу: точка  $Q$  лежит на касательной к линии  $\gamma$  в точке  $P$  тогда и только тогда, когда  $A_{12} = 0$ , т. е. когда координаты точки  $Q$  удовлетворяют уравнению

$$\left( \sum_{i=1}^3 a_{i1}p_i \right) x_1 + \left( \sum_{i=1}^3 a_{i2}p_i \right) x_2 + \left( \sum_{i=1}^3 a_{i3}p_i \right) x_3 = 0. \quad (5)$$

Так как  $\gamma$  — невырожденная линия, то в уравнении (5) не все коэффициенты при  $x_1, x_2, x_3$  равны нулю (предлагаем читателю самостоятельно обосновать это утверждение). По теореме 1 §6 уравнением (5) определяется прямая. Итак, в точке  $P$  линии  $\gamma$  имеется одна и только одна касательная (5). Нами доказана теорема о касательной к невырожденной линии второго порядка:

**Теорема 1.** В каждой точке  $P(p_1, p_2, p_3)$  невырожденной линии второго порядка, заданной уравнением (1), существует единственная касательная, определяемая уравнением (5).

3. Точки  $P(p_1, p_2, p_3)$  и  $Q(q_1, q_2, q_3)$  называются сопряженными относительно линии  $\gamma$ , заданной уравнением (1), если выполняется условие

$$\sum a_{ij}p_iq_j = 0. \quad (6)$$

Из этого равенства следует, что понятие сопряженности не зависит от порядка, в котором берутся точки  $P$  и  $Q$ . Ясно, что каждая точка линии (1) является самосопряженной точкой.

Докажем, что понятие сопряженности двух точек относительно

невырожденной линии второго порядка имеет геометрический смысл и поэтому не зависит от выбора репера. Пусть  $P$  и  $Q$  — две точки плоскости. Если хотя бы одна из них, например  $P$ , лежит на данной невырожденной линии второго порядка, то геометрический смысл сопряженности точек  $P$  и  $Q$  непосредственно следует из предыдущей теоремы. В самом деле, сравнивая формулы (5) и (6), мы приходим к выводу, что точки  $P$  и  $Q$  сопряжены относительно линии  $\gamma$  тогда и только тогда, когда точка  $Q$  лежит на касательной к линии  $\gamma$  в точке  $P$ .

Докажем теорему, которая раскрывает геометрический смысл сопряженности двух точек, не лежащих на данной линии.

**Т е о р е м а 2.** *Две точки  $P$  и  $Q$ , не лежащие на невырожденной линии второго порядка  $\gamma$ , сопряжены относительно этой линии тогда и только тогда, когда прямая  $PQ$  пересекается с линией  $\gamma$  в двух точках, гармонически сопряженных с данными точками  $P$  и  $Q$ .*

□ Пусть в выбранном репере данные точки имеют координаты  $P(p_1, p_2, p_3)$  и  $Q(q_1, q_2, q_3)$ , а линия  $\gamma$  определяется уравнением (1). Если записать параметрические уравнения прямой  $PQ$  в виде (2), то параметры точек пересечений  $M_1$  и  $M_2$  прямой  $PQ$  с линией  $\gamma$  определяются из равенства (3). Так как точка  $Q$  не лежит на линии  $\gamma$ , то  $A_{22} \neq 0$ , поэтому  $\lambda \neq 0$ , и, следовательно, уравнение (3) эквивалентно следующему уравнению:

$$A_{22}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + 2A_{12}\frac{\mu}{\lambda} + A_{11} = 0.$$

Если  $(\lambda_1, \mu_1)$  и  $(\lambda_2, \mu_2)$  — параметры точек  $M_1$  и  $M_2$ , то  $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$  и  $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$  являются корнями этого квадратного уравнения. По теореме Виета

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = -\frac{2A_{12}}{A_{22}}.$$

Из этого равенства следует, что точки  $P$  и  $Q$  сопряжены относительно линии  $\gamma$  (т. е.  $A_{12} = 0$ ) тогда и только тогда, когда  $\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = 0$  или  $\frac{\mu_1\lambda_2}{\lambda_1\mu_2} = -1$ . По формуле (1) § 10 это равенство эквивалентно равенству  $(PQ, M_1M_2) = -1$ . ■

**З а м е ч а н и е.** Если овальная линия (или нулевая линия)  $\gamma$  в репере  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  задана каноническим уравнением  $x_1^2 + x_2^2 + \epsilon x_3^2 = 0$ , где  $\epsilon = \pm 1$ , то согласно формуле (6) условие сопряженности точек относительно этой линии принимает вид  $p_1q_1 + p_2q_2 + \epsilon p_3q_3 = 0$ . Так как вершины трехвершинника  $A_1A_2A_3$  имеют координаты  $A_1(1, 0, 0)$ ,  $A_2(0, 1, 0)$ ,  $A_3(0, 0, 1)$ , то каждые две вершины этого трехвершинника сопряжены относительно линии  $\gamma$ . Такой трехвершинник называется *автополярным трехвершинником (первого рода)* относительно линии  $\gamma$ .

**4.** Пусть на проективной плоскости задана невырожденная линия второго порядка  $\gamma$  уравнением (1). Возьмем какую-нибудь

точку  $P(p_1, p_2, p_3)$  плоскости и рассмотрим множество  $g$  всех точек  $X(x_1, x_2, x_3)$ , каждая из которых сопряжена с точкой  $P$  относительно линии  $\gamma$ . Используя соотношение (6), получаем уравнение множества  $g$ :

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_{i1}p_i\right)x_1 + \left(\sum_{i=1}^3 a_{i2}p_i\right)x_2 + \left(\sum_{i=1}^3 a_{i3}p_i\right)x_3 = 0. \quad (7)$$

Так как  $\gamma$  — невырожденная линия второго порядка, то в этом уравнении не все коэффициенты при  $x_1, x_2, x_3$  равны нулю, поэтому множество  $g$  — прямая линия. Эта прямая называется *полярной точки  $P$* , а сама точка  $P$  — *полюсом прямой  $g$* . Поляра данной точки проходит через саму точку тогда и только тогда, когда координаты точки  $P$  удовлетворяют уравнению (7), т. е. когда точка  $P$  лежит на линии  $\gamma$ . В этом случае, как видно из уравнений (7) и (5), полярной точки является касательная к линии  $\gamma$  в данной точке. Из теоремы 2 следует утверждение, которое раскрывает геометрический смысл поляры данной точки: если точка  $P$  не принадлежит невырожденной линии второго порядка  $\gamma$ , то точка  $Q$ , не принадлежащая этой линии, лежит на поляре точки  $P$  тогда и только тогда, когда прямая  $PQ$  пересекает линию  $\gamma$  в двух точках, гармонически разделяющих пару точек  $P, Q$ .

Для каждой точки  $P$  плоскости существует определенная поляра (7), и обратно: для каждой прямой

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

существует единственный полюс  $P$ , координаты  $(p_1, p_2, p_3)$  которого находим из системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 a_{i1}p_i = \lambda u_1, \quad \sum_{i=1}^3 a_{i2}p_i = \lambda u_2, \quad \sum_{i=1}^3 a_{i3}p_i = \lambda u_3.$$

Определитель  $\|a_{ij}\|$  этой системы не равен нулю, поэтому точка  $P(p_1, p_2, p_3)$  определяется однозначно. Поляры двух различных точек не совпадают, так как в противном случае одна и та же прямая имела бы два полюса, что противоречит предыдущему выводу.

Таким образом, любая невырожденная линия второго порядка определяет биекцию  $\psi: \pi \rightarrow \pi'$  проективной плоскости  $\pi$  на множество  $\pi'$  ее прямых. Эта биекция называется *поляритетом*.

В равенстве (6) коэффициенты  $a_{ij}$  симметричны относительно индексов  $i$  и  $j$ , так как  $a_{ij} = a_{ji}$  при  $i = 1, 2, 3$ . Поэтому, используя (7) и (6), мы приходим к следующей теореме взаимности поляритета.

**Т е о р е м а 3.** Пусть дана невырожденная линия второго порядка. Если точка  $Q$  лежит на поляре точки  $P$ , то точка  $P$  лежит на поляре точки  $Q$ .

Из этой теоремы непосредственно следует утверждение: в поляритете  $\psi: \pi \rightarrow \pi'$  множество всех точек прямой  $a$  проективной плоскости  $\pi$  переходит в пучок с центром  $A$  множества  $\pi'$ , где  $A$  — полюс данной прямой. Можно доказать, что сложное отношение любых четырех точек прямой  $a$  равно сложному отношению соответствующих четырех точек пучка  $A$ .

## § 19. Овальная линия второго порядка

В этом параграфе рассмотрим некоторые конструктивные теоремы теории овальных линий второго порядка.

1. Точка  $M$  плоскости, не лежащая на данной овальной линии второго порядка  $\gamma$ , называется *внутренней* точкой относительно линии  $\gamma$ , если любая прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает линию  $\gamma$  в двух вещественных точках. Если же точка  $M$  не лежит на линии  $\gamma$  и не является внутренней, то она называется *внешней* относительно линии  $\gamma$ .

Из определения следует, что точки, лежащие на касательной и линии  $\gamma$ , не могут быть внутренними относительно линии  $\gamma$ . Отсюда мы заключаем, что любая точка касательной, отличная от точки касания, является внешней точкой.

*Л е м м а.* Точка  $M(m_1, m_2, m_3)$  является внутренней точкой относительно овальной линии, заданной уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (1)$$

тогда и только тогда, когда  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$ .

□ Пусть  $M(m_1, m_2, m_3)$  — внутренняя точка относительно линии (1). Тогда, очевидно,  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 \neq 0$ . Допустим, что  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0$ , и докажем, что при этом предположении прямая  $MN$ , где  $N$  — точка с координатами  $(-m_2, m_1, 0)$ , не пересекает линию  $\gamma$  в двух вещественных точках. В самом деле, если записать параметрические уравнения прямой  $MN$  в виде (2) § 18, то коэффициенты (4) § 18 имеют вид  $A_{11} = m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0$ ,  $A_{12} = m_1(-m_2) + m_1m_2 = 0$ ,  $A_{22} = m_2^2 + m_1^2 > 0$ , поэтому  $\Delta = A_{11}A_{22} > 0$ . Итак, предположение, что  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0$ , привело к противоречию, поэтому  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$ .

Обратно, пусть координаты точки  $M$  удовлетворяют условию  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$ . Докажем, что  $M$  — внутренняя точка относительно линии (1), т. е. что любая прямая  $l$ , проходящая через точку  $M$ , пересекает линию  $\gamma$  в двух вещественных точках. Возьмем на прямой  $l$  точку  $N(n_1, n_2, n_3)$  так, чтобы  $n_3 = 0$ . Такой выбор точки, очевидно, всегда возможен. Тогда коэффициенты (4) § 18 имеют вид  $A_{11} = m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$ ,  $A_{22} = n_1^2 + n_2^2 > 0$ , поэтому  $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 < 0$ , и, следовательно, прямая  $l$  пересекает линию  $\gamma$  в двух вещественных точках. ■

Из этой леммы следует, что точка  $M(m_1, m_2, m_3)$  является внешней точкой относительно овальной линии (1) тогда и только тогда, когда  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0$ .

Докажем, что через любую точку, внешнюю относительно овальной линии  $\gamma$ , проходят две и только две касательные. В самом деле, пусть  $A(a_1, a_2, a_3)$  — внешняя точка относительно овальной линии  $\gamma$ , заданной уравнением (1), а  $d$  — поляра этой точки. Докажем сначала, что прямая  $d$  пересекает линию  $\gamma$  в двух вещественных точках. Проведем через точку  $A$  какую-нибудь прямую так, чтобы она пересекала линию  $\gamma$  в двух вещественных точках  $M_1$  и  $M_2$ , и возьмем точку  $B(b_1, b_2, b_3)$  на этой прямой, гармонически сопряженную с точкой  $A$

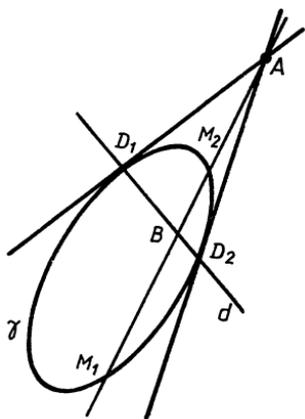


Рис. 29

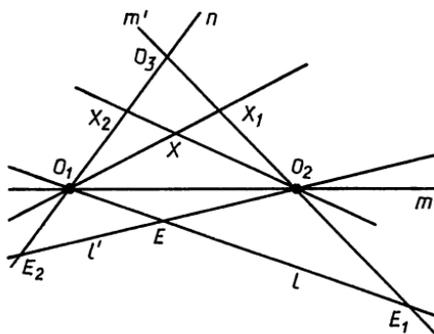


Рис. 30

относительно точек  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 29). По теореме 2 § 18  $B \in d$ . Если записать параметрические уравнения (2) § 18, приняв точки  $A$  и  $B$  за исходные точки  $P$  и  $Q$ , то коэффициенты (4) § 18 примут вид:

$$A_{11} = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 > 0, A_{12} = 0, A_{22} = b_1^2 + b_2^2 - b_3^2.$$

Так как прямая  $AB$  пересекает линию  $\gamma$  в двух вещественных точках, то  $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 < 0$ . Отсюда, учитывая, что  $A_{11} > 0$ ,  $A_{12} = 0$ , получаем  $A_{22} < 0$ . Итак,  $B$  — точка, внутренняя относительно линии  $\gamma$ . Поэтому прямая  $d$  пересекает линию  $\gamma$  в двух точках  $D_1$  и  $D_2$ . Касательные  $d_1$  и  $d_2$  в этих точках, очевидно, проходят через точку  $A$  (рис. 29).

Если предположить, что через точку  $A$  проходит еще одна касательная  $d_3$  в некоторой точке  $D_3$  линии  $\gamma$ , то эта точка должна лежать на поляре  $d$  точки  $A$ , что невозможно, так как прямая  $d$  пересекает линию  $\gamma$  только в двух точках  $D_1$  и  $D_2$ .

2. Докажем две теоремы, первая из которых называется теоремой Штейнера.

**Теорема 1.** *Даны два пучка с различными центрами  $O_1$  и  $O_2$  и установлено проективное, но не перспективное отображение  $f$  первого пучка на второй. Тогда множество  $\gamma$  точек пересечения соответственных прямых этих пучков является овальной линией второго порядка, проходящей через точки  $O_1$  и  $O_2$ .*

□ Обозначим через  $t$  прямую  $O_1O_2$  и рассмотрим прообраз  $n$  этой прямой:  $t = f(n)$ . Отображение  $f$  зададим с помощью трех прямых  $n, t, l$  пучка  $O_1$  и их образов  $t, t', l'$  в пучке  $O_2$  (§ 14, теорема 3). Так как  $f$  не является перспективным отображением, то прямые  $n, t$ , и  $t'$  попарно различны, поэтому точки  $O_1 = n \cap t$ ,  $O_2 = t \cap t'$ ,  $O_3 = n \cap t'$  не лежат на одной прямой (рис. 30). Точка  $E = l \cap l'$  не лежит на прямых  $t, t', n$ , поэтому точки  $O_1, O_2, O_3, E$  образуют репер, который обозначим через  $R$ .

Запишем уравнение множества  $\gamma$  в репере  $R$ . Пусть  $X(x_1, x_2, x_3)$  — произвольная точка плоскости, не лежащая на сторонах трехвер-

шинника  $O_1O_2O_3$ . По определению сложного отношения прямых (§ 10, п. 3)  $(mn, lO_1X) = (O_2O_3, E_1X_1)$ , а  $(m'm, l'O_2X) = (O_3O_1, E_2X_2)$  (относительно обозначений точек и прямых см. рис. 30). На прямой  $m'$  точка  $X_1$  в репере  $R_1 = (O_2, O_3, E_1)$  имеет координаты  $(x_2, x_3)$  (см. § 3, замечание), поэтому  $(O_2O_3, E_1X_1) = \frac{x_2}{x_3}$ . Аналогично  $(O_3O_1, E_2X_2) = \frac{x_3}{x_1}$ . Таким образом,  $(mn, lO_1X) = \frac{x_2}{x_3}$ ,  $(m'm, l'O_2X) = \frac{x_3}{x_1}$ .

Если  $X \in \gamma$ , то  $(mn, lO_1X) = (m'm, l'O_2X)$ , поэтому  $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1}$ , или

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \quad (2)$$

Если  $x \notin \gamma$ , то  $(mn, lO_1X) \neq (m'm, l'O_2X)$ , поэтому  $\frac{x_2}{x_3} \neq \frac{x_3}{x_1}$ , т. е. координаты точки  $X$  не удовлетворяют уравнению (2).

Если точка  $X$  лежит на сторонах трехвершинника  $O_1O_2O_3$ , то ее координаты удовлетворяют равенству (2) тогда и только тогда, когда она совпадает с одной из точек  $O_1$  и  $O_2$ , которые принадлежат множеству  $\gamma$ . Таким образом, уравнение (2) является уравнением множества точек  $\gamma$ . Этим уравнением определяется невырожденная линия второго порядка, на которой имеются действительные точки, т. е. овальная линия. ■

Касательные к линии (2) в точках  $O_1(1, 0, 0)$  и  $O_2(0, 1, 0)$  имеют уравнения (см. (5) § 18)  $x_2 = 0$  и  $x_1 = 0$ , поэтому мы приходим к утверждению.

*С л е д с т в и е.* Если  $f$  — отображение, указанное в теореме 1, то прямые  $f(O_1O_2)$  и  $f^{-1}(O_1O_2)$  являются касательными к линии  $\gamma$  соответственно в точках  $O_2$  и  $O_1$ .

*З а м е ч а н и е.* Если пучки с центрами  $O_1$  и  $O_2$  перспективны и  $d$  — ось перспективы, то множество  $\gamma$  общих точек соответственных прямых этих пучков совпадает с множеством всех точек прямых  $d$  и  $O_1O_2$  (рис. 31). Таким образом, и в этом случае  $\gamma$  — линия второго порядка, но она распадается на пару прямых.

Докажем обратную теорему.

*Т е о р е м а 2.* Дана овальная линия второго порядка  $\gamma$  и на ней две произвольные точки  $O_1$  и  $O_2$ . Каждой прямой  $O_1M$  пучка с центром  $O_1$  поставим в соответствие прямую  $O_2M$  пучка с центром  $O_2$ , где  $M$  — произвольная точка линии  $\gamma$ , не совпадающая с точками  $O_1$  и  $O_2$ . Касательной в точке  $O_1$  поставим в соответствие прямую  $O_2O_1$ , а прямой  $O_1O_2$  — касательную в точке  $O_2$ . Полученное отображение  $f$  является проективным, но не перспективным отображением пучка с центром  $O_1$  на пучок с центром  $O_2$ .

□ Возьмем на плоскости репер  $R = (O_1, O_2, O_3, E)$ , где  $O_3$  — точка пере-

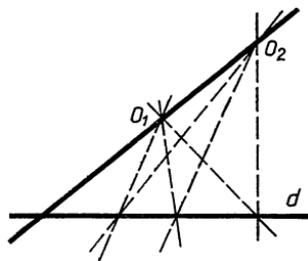


Рис. 31

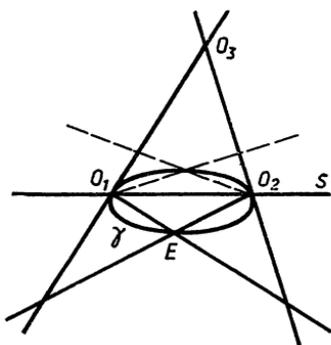


Рис. 32

сечения касательных к линии  $\gamma$  в точках  $O_1$  и  $O_2$ , а  $E$  — произвольная точка линии  $\gamma$ , отличная от точек  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 32). Пусть  $\sum a_{ij}x_i x_j = 0$  — уравнение линии  $\gamma$  в этом репере. Так как  $O_1 \in \gamma$  и  $O_2 \in \gamma$ , то  $a_{11} = a_{22} = 0$ . Учитывая, что прямые  $x_2 = 0$  и  $x_1 = 0$  являются касательными к линии  $\gamma$  в точках  $O_1$  и  $O_2$ , приходим к выводу, что  $a_{13} = 0$  и  $a_{23} = 0$ . Таким образом, уравнение линии имеет вид  $2a_{12}x_1x_2 + a_{33}x_3x_3 = 0$ . Точка  $E(1, 1, 1)$  лежит на этой линии, следовательно,  $2a_{12} + a_{33} = 0$ . Итак, уравнение линии  $\gamma$  в репере  $R$  можно записать в виде (2).

Рассмотрим проективное отображение  $f'$  пучка с центром  $O_1$  на пучок с центром  $O_2$ , при котором прямые  $O_1O_3$ ,  $O_1O_2$ ,  $O_1E$  переходят соответственно в прямые  $O_2O_1$ ,  $O_2O_3$ ,  $O_2E$ . По теореме 1 соответственные прямые в отображении  $f'$  пересекаются на линии, заданной в репере  $R$  уравнением (2), т. е. на линии  $\gamma$ . Таким образом, отображение  $f'$  и есть отображение  $f$ . ■

**З а м е ч а н и е.** Теорема Штейнера позволяет дать геометрическое определение овальной линии второго порядка при помощи проективного отображения одного пучка прямых на другой; обратная теорема устанавливает, что центры этих пучков на овальной линии можно выбрать произвольно.

**3.** Пусть  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  — шесть точек общего положения, заданных в определенном порядке. Фигура, образованная этими точками и шестью прямыми  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ , называется *шестивершинником* и обозначается так:  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . Данные точки называются *вершинами*, а прямые  $A_1A_2, \dots, A_6A_1$  — *сторонами*. Стороны  $A_1A_2$  и  $A_4A_5$ ,  $A_2A_3$  и  $A_5A_6$ ,  $A_3A_4$  и  $A_6A_1$  называются *противоположными*. На рисунке 33 изображены шестивершинники  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  и  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ . Во втором шестивершиннике противоположными являются стороны  $B_1B_2$  и  $B_4B_5$ ,  $B_2B_3$  и  $B_5B_6$ ,  $B_3B_4$  и  $B_6B_1$ .

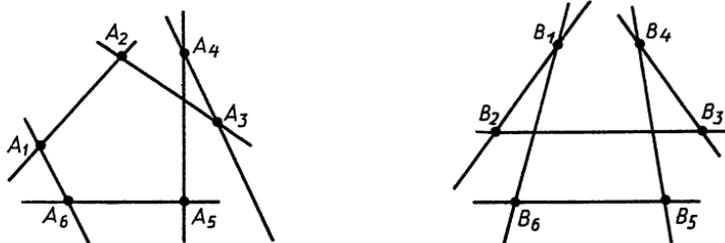


Рис. 33

**Теорема 3** (теорема Паскаля)<sup>1</sup>. Точки пересечения противоположных сторон любого шестивершинника, вписанного в овальную линию второго порядка, лежат на одной прямой.

□ Пусть вершины шестивершинника  $O_1ABC O_2M$  лежат на овальной линии  $\gamma$ . Докажем, что точки  $O = O_1A \cap CO_2$ ,  $N' = AB \cap O_2M$ ,  $N = BC \cap MO_1$  лежат на одной прямой (рис. 34).

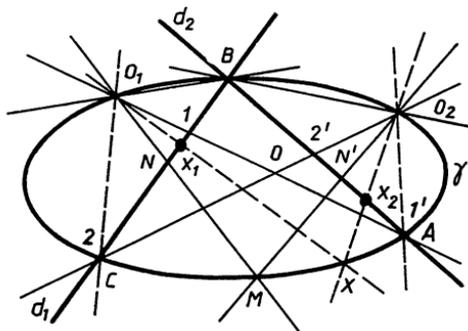


Рис. 34

Пусть  $f$  — проективное отображение пучков с центрами  $O_1$  и  $O_2$ , которое устанавливается согласно теореме 2 линией  $\gamma$ . Обозначим через  $d_1$  и  $d_2$  прямые  $BC$  и  $BA$  (рис. 34). Отображение  $f$  порождает проективное отображение  $\varphi: d_1 \rightarrow d_2$ , в котором каждой точке  $X_1$  прямой  $d_1$  соответствует точка  $X_2$  прямой  $d_2$ , такая, что прямые  $O_1X_1$  и  $O_2X_2$  пересекаются в точке  $X$ , лежащей на линии  $\gamma$ , т. е.  $O_2X_2 = f(O_1X_1)$ .

Так как  $\varphi(B) = B$ , то  $\varphi$  — перспективное отображение (§ 14, теорема 2). Центром его является точка  $O$ , так как точки, обозначенные на рисунке 34 цифрами 1 и 2, переходят соответственно в точки 1' и 2'. Но  $N' = \varphi(N)$ , поэтому точки  $N, O$  и  $N'$  лежат на одной прямой. ■

**Теорема 4** (обратная теорема Паскаля). Если точки пересечения противоположных сторон шестивершинника лежат на одной прямой, то все его вершины лежат на овальной линии второго порядка.

□ Пусть  $O_1ABC O_2M$  — данный шестивершинник, а  $O = O_1A \cap CO_2$ ,  $N' = AB \cap O_2M$ ,  $N = BC \cap MO_1$  — точки пересечения противоположных сторон, лежащие на одной прямой (рис. 34).

Рассмотрим проективное отображение  $f$  пучка с центром  $O_1$  на пучок с центром  $O_2$ , которое прямые  $O_1A, O_1B, O_1C$  переводит соответственно в прямые  $O_2A, O_2B, O_2C$ . По теореме Штейнера точки пересечения соответственных прямых в отображении  $f$  образуют некоторую овальную линию  $\gamma$ , на которой лежат точки  $O_1, O_2, A, B$  и  $C$ . Докажем, что точка  $M$  также лежит на этой линии.

Отображение  $f$  порождает проективное отображение  $\varphi: d_1 \rightarrow d_2$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — прямые  $BC$  и  $BA$  (рис. 34). Так как  $B = \varphi(B)$ , то  $\varphi$  — перспективное отображение с центром  $O$ . Но точки  $O, N$  и  $N'$  лежат на одной прямой, поэтому  $N' = \varphi(N)$ . Следовательно,  $O_2N' = f(O_1N)$ , поэтому точка  $M = O_1N \cap O_2N'$  лежит на линии  $\gamma$ . ■

## § 20. Задачи на построение, связанные с овальной линией

1. Докажем следующую теорему:

**Теорема 1.** Если на плоскости даны пять точек общего положения, то существует единственная овальная линия, проходящая через эти точки.

<sup>1</sup>Б. Паскаль (1623—1662) — французский математик, механик и физик.

□ Пусть  $S_1, S_2, A, B, C$  — данные точки. Рассмотрим проективное отображение  $f$  пучка с центром  $S_1$  на пучок с центром  $S_2$ , в котором прямые  $S_1A, S_1B, S_1C$  переходят соответственно в прямые  $S_2A, S_2B, S_2C$ . Так как точки  $A, B$  и  $C$  не лежат на одной прямой, то  $f$  не является перспективным отображением. По теореме Штейнера точки пересечения соответственных прямых пучков с центрами  $S_1$  и  $S_2$  образуют некоторую овальную линию  $\gamma$ , на которой лежат данные пять точек.

Докажем теперь, что  $\gamma$  — единственная овальная линия, проходящая через точки  $S_1, S_2, A, B, C$ . Пусть  $\gamma'$  — какая-то овальная линия, проходящая через эти точки. По теореме 2 § 19 линия  $\gamma'$  устанавливает проективное отображение  $f'$  пучка с центром  $S_1$  на пучок с центром  $S_2$ . Так как  $A \in \gamma', B \in \gamma', C \in \gamma'$ , то в этом отображении прямые  $S_1A, S_1B, S_1C$  переходят соответственно в прямые  $S_2A, S_2B, S_2C$ . По теореме 3 § 14  $f$  и  $f'$  совпадают, поэтому линии  $\gamma$  и  $\gamma'$  совпадают. ■

Аналогично можно доказать следующую теорему:

**Т е о р е м а 2.** Если на плоскости даны четыре точки общего положения и прямая, проходящая через одну из них и не проходящая через другие три точки, то существует единственная овальная линия, проходящая через данные точки, для которой данная прямая является касательной.

Предлагаем читателю провести это доказательство самостоятельно.

**2.** Рассмотрим несколько задач на построение, связанных с овальной линией второго порядка.

**З а д а ч а 1.** Даны пять точек общего положения и прямая, проходящая через одну из них и не проходящая через остальные точки. Построить вторую точку пересечения данной прямой с овальной линией  $\gamma$ , проходящей через данные пять точек.

**Р е ш е н и е.** Задачу можно решить двумя способами.

**П е р в ы й с п о с о б.** Этот способ основан на теореме Штейнера. Пусть  $O, O', A, B$  и  $C$  — данные точки, а  $a$  — данная прямая, проходящая через точку  $O$ . Рассмотрим проективное отображение  $f$  пучков

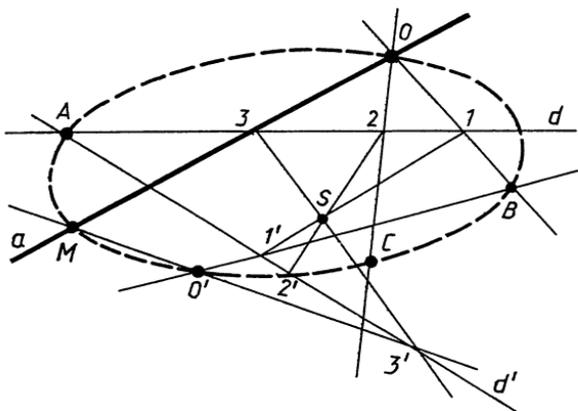


Рис. 35

$O$  и  $O'$ , которое переводит прямые  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  соответственно в прямые  $O'A$ ,  $O'B$  и  $O'C$ . Отображение  $f$  по теореме Штейнера порождает линию  $\gamma$ . Если теперь построить прямую  $a' = f(a)$  (см. § 14, задача 2), то, очевидно, искомой точкой  $M$  является точка пересечения прямых  $a$  и  $a'$ .

На рисунке 35 выполнено построение точки  $M$ . На нем  $d$  и  $d'$  — произвольные прямые, проведенные через точку  $A$  и не проходящие через точки  $O$  и  $O'$ . Точка  $S$  — центр перспективного отображения  $\varphi: d \rightarrow d'$ , которое порождается отображением  $f$  (см. § 14, решение задачи 2). Искомой точкой являлась точка пересечения прямых  $a$  и  $O'Z'$ .

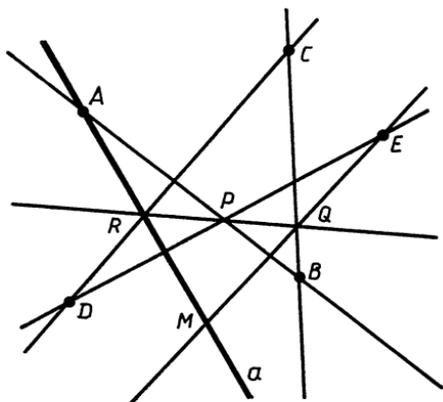


Рис. 36

**Второй способ.** Этот способ основан на теореме Паскаля. Данные точки обозначим через  $A, B, C, D, E$  и допустим, что данная прямая  $a$  проходит через точку  $A$  (рис. 36). Пусть  $M$  — искомая точка. Тогда шестивершинник  $ABCDEM$  вписан в овальную линию, поэтому точки  $P = AB \cap DE$ ,  $Q = BC \cap EM$  и  $R = CD \cap MA$  лежат на одной прямой. По условиям задачи строим точки  $P$  и  $R$  (заметим, что  $MA$  — данная прямая  $a$ ), а затем точку  $Q = BC \cap PR$ . Искомая точка  $M$  получена как точка пересечения прямых  $a$  и  $EQ$  (рис. 36).

Эта задача может быть использована для построения точек овальной линии, заданной пятью точками общего положения.

**Задача 2.** Овальная линия второго порядка  $\gamma$  задана пятью точками общего положения. Построить несколько точек этой линии.

**Решение.** Проведем через одну из данных точек несколько прямых, не проходящих через другие данные точки. Пользуясь задачей 1, построим точки пересечения проведенных прямых с линией  $\gamma$ . Каждая из этих точек является искомой.

**Задача 3.** Овальная линия второго порядка  $\gamma$  задана четырьмя точками общего положения и касательной в одной из данных точек. Построить несколько точек линии  $\gamma$ .

**Решение.** Пусть  $O, O', A$  и  $B$  — данные точки, а  $a$  — касательная в точке  $O$ . Рассмотрим проективное отображение  $f$  пучков  $O$  и  $O'$ , которое переводит прямые  $a, OA, OB$  соответственно в прямые  $O'O, O'A, O'B$ . Отображение  $f$  по теореме Штейнера порождает линию  $\gamma$ .

Проведем через точку  $O$  прямую  $l$ , не проходящую через точки  $O', A$  и  $B$ , и построим ее образ  $l'$  (см. решение задачи 2 § 14). Точка пересечения прямых  $l$  и  $l'$  является искомой. Аналогично можно построить и другие точки линии  $\gamma$ .

**Задача 4.** Даны пять точек общего положения:  $O, O', A, B$  и  $C$ . В точке  $O'$  построить касательную к овальной линии  $\gamma$ , проходящей через эти точки.

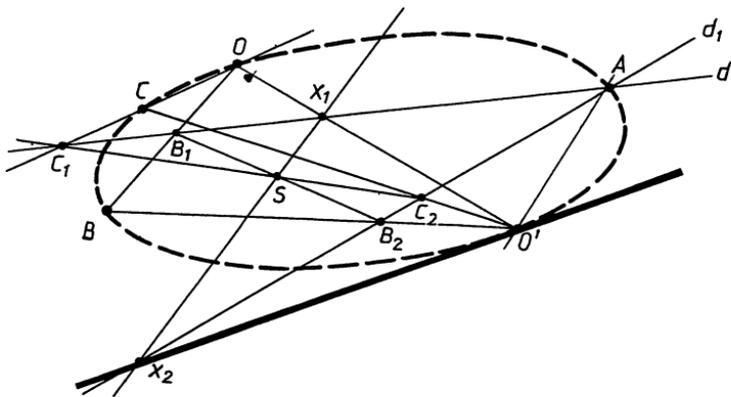


Рис. 37

**Решение.** Рассмотрим проективное отображение  $f$  пучков  $O$  и  $O'$ , которое переводит прямые  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  соответственно в прямые  $O'A$ ,  $O'B$  и  $O'C$ . Отображение  $f$  по теореме Штейнера порождает овальную линию  $\gamma$ . Искомая касательная является образом прямой  $OO'$  в проективном отображении  $f$ . Построение выполнено на рисунке 37.

**Задача 5.** Даны пять точек общего положения:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и точка  $P$ . Построить полярю точки  $P$  овальной линии  $\gamma$ , проходящей через данные точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ .

**Решение.** Если точка  $P$  совпадает с одной из данных точек, то задача сводится к предыдущей задаче, поэтому предположим, что точка  $P$  не совпадает ни с одной из данных точек. Для решения задачи достаточно построить две точки поляры точки  $P$ . Для построения этих точек воспользуемся теоремой 2 § 18.

Возьмем такие две из данных точек, например  $A$  и  $B$ , которые не лежат на одной прямой с точкой  $P$  (рис. 38), и проведем прямые  $PA$  и  $PB$ . Каждая из этих прямых пересекает линию  $\gamma$ , вообще говоря, в двух точках.

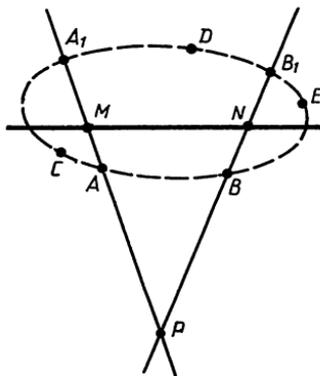


Рис. 38

Построим вторую точку  $A_1$  пересечения прямой  $PA$  с линией  $\gamma$  (задача 1), а затем точку  $M$ , гармонически сопряженную с точкой  $P$  относительно пары  $AA_1$  (§ 13, задача). Точка  $M$  лежит на поляре точки  $P$ . Аналогично, построив точки  $B_1$  и  $N$  (см. рис. 38), проводим полярю  $MN$  точки  $P$ .

Если одна из прямых, например  $PA$ , является касательной к линии  $\gamma$  в точке  $A$ , то точка  $A$  лежит на искомой поляре, поэтому нет надобности в построении точки  $M$ .

## § 21. Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой

1. Зафиксируем на проективной плоскости  $P_2$  некоторую прямую  $d_0$  и обозначим через  $A_2$  множество  $P_2 \setminus d_0$  точек. Условимся точки множества  $A_2$  обозначать, как обычно, заглавными буквами латинского алфавита, а точки прямой  $d_0$  — через  $A_0, B_0, \dots$ .

Докажем, что на множестве  $A_2$  естественным образом возникает структура аффинной плоскости.

Пусть  $V$  — трехмерное векторное пространство, которое порождает проективную плоскость  $P_2$ , а  $W_0$  — двумерное векторное подпространство этого пространства, порождающее прямую  $d_0$ .

Нетрудно видеть, что множество  $A_2$  можно рассматривать как аффинное двумерное пространство над векторным пространством  $W_0$  (см. ч. I, § 85). Для этого достаточно установить существование отображения  $\sigma: A_2 \times A_2 \rightarrow W_0$ , удовлетворяющего аксиомам Вейля.

Зафиксируем в пространстве  $V$  ненулевой вектор  $\vec{p}^*$ , не принадлежащий подпространству  $W_0$ . Условимся каждый вектор  $\vec{a}$  из  $V \setminus W_0$ , порождающий точку множества  $A_2$ , нормировать так, чтобы  $\vec{a} - \vec{p}^* \in W_0$ . Докажем, что для любой точки  $M \in A_2$  существует единственный нормированный вектор  $\vec{m}$ , порождающий эту точку.

В самом деле, выберем базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{p}^*$  пространства  $V$  так, чтобы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in W_0$ . Пусть какой-нибудь вектор  $\vec{m}'$ , порождающий точку  $M$ , имеет разложение  $\vec{m}' = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{p}^*$ . Так как  $\vec{m}' \notin W_0$ , то  $\gamma \neq 0$ , поэтому можно рассмотреть вектор  $\vec{m} = \frac{1}{\gamma} \vec{m}' = \frac{\alpha}{\gamma} \vec{e}_1 + \frac{\beta}{\gamma} \vec{e}_2 + \vec{p}^*$ , который порождает ту же точку  $M$ . Этот вектор нормированный, так как  $\vec{m} - \vec{p}^* \in W_0$ . Если  $\vec{m}_1$  — другой нормированный вектор, порождающий точку  $M$ , то  $\vec{m}_1 = \lambda \vec{m}$  и  $\vec{m}_1 - \vec{p}^* \in W_0$ , или  $\lambda \vec{m} - \vec{p}^* \in W_0$ . Таким образом,  $\lambda \vec{m} - \vec{m} \in W_0$ , или  $(\lambda - 1) \vec{m} \in W_0$ . Так как  $\vec{m} \notin W_0$ , то  $\lambda - 1 = 0$ , т. е.  $\vec{m}_1 = \vec{m}$ .

Отметим, наконец, что если  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  — нормированные векторы, порождающие произвольные точки  $M$  и  $N$  из  $A_2$ , то  $\vec{m} - \vec{p}^* \in W_0$ ,  $\vec{n} - \vec{p}^* \in W_0$ , поэтому  $\vec{m} - \vec{n} \in W_0$ .

Построим отображение  $\sigma: A_2 \times A_2 \rightarrow W_0$  по следующему закону. Каждой упорядоченной паре точек  $M$  и  $N$  из  $A_2$  поставим в соответствие вектор  $\vec{n} - \vec{m} \in W_0$ , где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  — нормированные векторы, порождающие точки  $M$  и  $N$ . Этот вектор обозначим через  $\overrightarrow{MN}$ .

$$\overrightarrow{MN} = \vec{n} - \vec{m}. \quad (1)$$

Убедимся в том, что выполняются обе аксиомы Вейля структуры аффинного пространства (ч. I, § 85).

а) Докажем, что для каждой точки  $M \in A_2$  и произвольного вектора  $\vec{a} \in W_0$  существует единственная точка  $N$ , такая, что  $\vec{MN} = \vec{a}$ . Пусть  $\vec{m}$  — нормированный вектор, порождающий точку  $M$ . Тогда вектор  $\vec{n} = \vec{m} + \vec{a}$  также нормированный, так как  $\vec{n} - \vec{p}^* = (\vec{m} - \vec{p}^*) + \vec{a} \in W_0$ . Для точки  $N$ , которая порождается вектором  $\vec{n}$ , имеем  $\vec{MN} = \vec{n} - \vec{m} = \vec{a}$ .

Докажем теперь, что  $N$  — единственная точка, удовлетворяющая условию  $\vec{MN} = \vec{a}$ . В самом деле, если  $\vec{MN}' = \vec{a}$ , то  $\vec{MN} = \vec{MN}' \Rightarrow \vec{n} - \vec{m} = \vec{n}' - \vec{m} \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}'$ , где  $\vec{n}'$  — нормированный вектор, порождающий точку  $N'$ . Отсюда следует, что  $N$  и  $N'$  — одна и та же точка.

б) Пусть  $M, N$  и  $P$  — произвольные точки из  $A_2$ , а  $\vec{m}, \vec{n}$  и  $\vec{p}$  — нормированные векторы, которые порождают эти точки. Тогда по формуле (1)  $\vec{MN} = \vec{n} - \vec{m}$ ,  $\vec{NP} = \vec{p} - \vec{n}$ , поэтому  $\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{p} - \vec{m} = \vec{MP}$ .

Мы доказали, что  $A_2$  является аффинной плоскостью (проективная модель аффинной плоскости). Если мы пожелаем от этой аффинной плоскости перейти к расширенной плоскости  $\bar{A}_2$  (чтобы затем получить проективную плоскость  $P_2$ ), то к множеству  $A_2$  следует присоединить прямую  $d_0$ , т. е. рассмотреть множество  $\bar{A}_2 = A_2 \cup d_0$ . Следовательно,  $d_0$  играет роль несобственной прямой расширенной аффинной плоскости  $\bar{A}_2$ . Поэтому прямую  $d_0$  называют *несобственной прямой*, а точки этой прямой — *несобственными точками*. Точки множества  $A_2$  называются *собственными точками* расширенной аффинной плоскости  $\bar{A}_2$ .

2. Проективные прямые, отличные от несобственной прямой  $d_0$ , будем обозначать так:  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{l}, \dots$ . Каждая такая прямая пересекается с прямой  $d_0$  в несобственной точке.

Пусть  $A_0$  — несобственная точка прямой  $\bar{a}$ . Множество точек  $\bar{a} \setminus A_0$  называется *аффинной прямой* и обозначается через  $a$ . Точку  $A_0$  назовем *несобственной точкой*, соответствующей прямой  $a$ . Докажем следующую лемму.

**Л е м м а 1.** Если две точки  $M$  и  $N$  лежат на прямой  $l$ , то вектор  $\vec{MN}$  порождает несобственную точку  $L_0$ , соответствующую прямой  $l$ .

□ Пусть  $W$  — векторное подпространство, которое порождает прямую  $l$ , а  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  — нормированные векторы, порождающие точки  $M$  и  $N$ . По формуле (1)  $\vec{MN} = \vec{n} - \vec{m} \in W_0$ . С другой стороны,  $\vec{MN} = \vec{n} - \vec{m} \in W$ , поэтому  $\vec{MN} \in W_0 \cap W$ . Отсюда и следует, что вектор  $\vec{MN}$  порождает точку  $L_0$ . ■

Две аффинные прямые называются *параллельными*, если несобственные точки, соответствующие этим прямым, совпадают. Отсюда следует, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны тогда и только тогда, когда

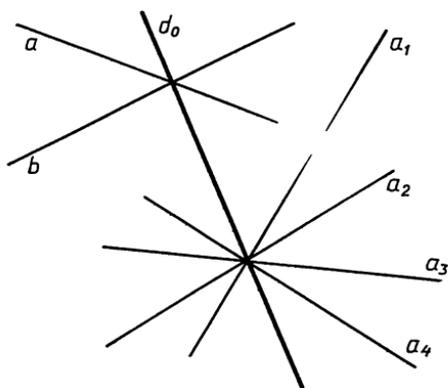


Рис. 39

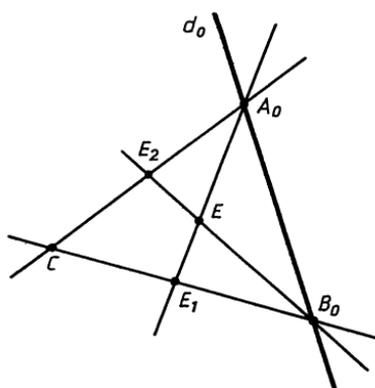


Рис. 40

$a \cap b = \emptyset$  (рис. 39). Таким образом, введенное здесь понятие параллельности прямых полностью согласуется с понятием параллельности на обычной аффинной плоскости. Если прямые  $a_1, a_2, \dots, a_n$  попарно параллельны, то несобственные точки, соответствующие этим прямым, совпадают (рис. 39).

Из леммы 1 следует, что *две прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  коллинеарны.*

Докажем лемму о свойствах векторов, образованных из точек пересечений двух пар параллельных прямых.

**Лемма 2.** *Если  $AB \parallel CD$  и  $AC \parallel BD$ , то  $\vec{AB} = \vec{CD}$ ,  $\vec{AC} = \vec{BD}$ ,  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ .*

□ Из условий леммы следует, что  $\vec{AB} = \lambda \vec{CD}$ ,  $\vec{AC} = \mu \vec{BD}$ . По правилу треугольника  $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ ,  $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ , поэтому  $\lambda \vec{CD} + \vec{BD} = \mu \vec{BD} + \vec{CD}$ . Так как векторы  $\vec{CD}$  и  $\vec{BD}$  не коллинеарны, то из этого равенства получаем  $\lambda = \mu = 1$ , поэтому  $\vec{AB} = \vec{CD}$  и  $\vec{AC} = \vec{BD}$ .

Далее,  $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$  и  $\vec{BD} = \vec{AC}$ , поэтому  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ . ■

3. Если на плоскости  $A_2$  выбран репер  $R_0 = (A_0, B_0, C, E)$ , где  $A_0, B_0 \in d_0$ , то на аффинной плоскости  $A_2$  определяется аффинный репер  $R_0^A = (C, E_1, E_2)$ , где  $E_1 = A_0E \cap CB_0$ ,  $E_2 = B_0E \cap A_0C$  (рис. 40). Будем говорить, что *репер  $R_0^A$  соответствует реперу  $R_0$ .*

Пусть  $M$  — произвольная точка аффинной плоскости  $A_2$ , которая в реперах  $R_0$  и  $R_0^A$  имеет соответственно координаты<sup>1</sup>  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(x, y)$ .

<sup>1</sup> Так как  $M \in A_2$ , то  $M \notin d_0$ , поэтому  $x_3 \neq 0$ , и, следовательно, для любой точки  $M \in A_2$  равенства (2) имеют смысл.

Докажем, что

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \quad (2)$$

Для этого рассмотрим нормированные векторы  $\vec{c}$ ,  $\vec{e}$  и  $\vec{m}$ , которые порождают точки  $C$ ,  $E$  и  $M$ . По лемме 1 векторы  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CE}_2$ ,  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CE}_1$  порождают точки  $A_0$ ,  $B_0$ . По лемме 2  $\overrightarrow{CE} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ , поэтому  $\vec{e} - \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ , или  $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{c}$ . Таким образом, векторы  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{e}$  согласованы относительно репера  $R_0$ .

По определению аффинных координат точки  $\overrightarrow{CM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  или  $\vec{m} - \vec{c} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ,  $\vec{m} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \vec{c}$ . Вектор  $\vec{m}$  порождает точку  $M$ , следовательно, числа  $(x, y, 1)$  — координаты точки  $M$  в репере  $R_0$ . Итак, числа  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(x, y, 1)$  пропорциональны:  $x_1 = \lambda x$ ,  $x_2 = \lambda y$ ,  $x_3 = 1 \cdot \lambda$ . Отсюда и следуют равенства (2).

4. Рассмотрим множество  $H_0$  всех проективных преобразований плоскости  $P_2$ , переводящих несобственную прямую  $d_0$  в себя. Очевидно,  $H_0$  — подгруппа группы всех проективных преобразований. Если точка  $M$  лежит в аффинной плоскости  $A_2$ , где  $A_2 = P_2 \setminus d_0$ , то ее образ  $M'$  при любом преобразовании  $f$  из  $H_0$  также лежит в этой плоскости, поэтому проективное преобразование  $f$  порождает некоторое преобразование  $\hat{f}$  множества точек  $A_2$ . Множество  $\hat{H}_0$  всех этих преобразований можно рассматривать как группу преобразований плоскости  $A_2$ .

Пусть  $f \in H_0$ . Выберем репер  $R_0 = (A_0, B_0, C, E)$  и запишем аналитическое выражение преобразования  $f$  в этом репере. Так как прямая  $x_3 = 0$  в преобразовании  $f$  переходит в себя, то в формулах, задающих преобразование  $f$ ,  $c_{31} = c_{32} = 0$ , поэтому они принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 &= \phantom{c_{21}x_1 + c_{22}x_2} + c_{33}x_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_{33} \neq 0$  и  $\begin{vmatrix} c_{11}c_{12} \\ c_{21}c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ .

Для точек аффинной плоскости  $A_2$   $x_3 \neq 0$  и  $x'_3 \neq 0$ , поэтому, разделив почленно первое и второе равенства на третье и воспользовавшись формулами (2), получаем аналитическое выражение преобразования  $\hat{f}$  в аффинном репере  $R_0^A$ , соответствующем реперу  $R_0$ :

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}$ ,  $i, j = 1, 2$  и  $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ .

Такой же вид имеют и формулы (1), § 48 ч. I, аффинных преобразований аффинной плоскости. Следовательно, группа аффинных преобразований  $A$  аффинной плоскости (ч. I, § 50) изоморфна груп-

пе  $\widehat{H}_0$ . Отсюда следует, что аффинную геометрию на плоскости можно рассматривать как геометрию, изучающую те свойства фигур плоскости  $A_2$ , которые инвариантны относительно группы  $\widehat{H}_0$ .

## § 22. Линии второго порядка на проективной плоскости с фиксированной прямой

1. Изложенная в предыдущем параграфе теория позволяет интерпретировать на проективной плоскости с фиксированной прямой все аффинные понятия и инварианты, т. е. дать проективную трактовку каждого из них. Например, понятие параллельности прямых имеет вполне определенный смысл с проективной точки зрения: прямые  $a$  и  $b$  параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие проективные прямые  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  на плоскости  $P_2$  с фиксированной прямой  $d_0$  пересекаются на прямой  $d_0$ .

С проективной точки зрения выясним геометрический смысл основного инварианта аффинной группы — простого отношения трех точек. В плоскости  $A_2$  оно вводится точно так же, как и на обычной аффинной плоскости. Пусть  $A, B$  и  $M$  — точки прямой  $l$ , лежащей в плоскости  $A_2$ , причем  $A \neq B$  и  $B \neq M$ . По лемме 1 § 21 векторы  $\vec{AM}$  и  $\vec{MB}$  коллинеарны, поэтому существует такое число  $\lambda$ , что  $\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$ . Число  $\lambda$  называется *простым отношением* точек  $A, B, M$  и обозначается так:  $(AB, M)$ .

Обозначим через  $A_0$  несобственную точку, соответствующую прямой  $l$ , на которой лежат точки  $A, B$  и  $M$ . Докажем, что

$$(AB, M) = -(AB, MA_0). \quad (1)$$

Проективный репер  $R_0 = (A_0, B_0, A, E)$  выберем так, как показано на рисунке 41, и обозначим через  $(m, 0, 1)$  координаты точки  $M$  в этом репере. Точки  $A, B$  и  $A_0$  имеют соответственно координаты  $A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), A_0(1, 0, 0)$ , поэтому на прямой  $\bar{l}$  в репере  $R_2 = (A_0, A, B)$  эти же точки имеют координаты  $A(0, 1), B(1, 1), A_0(1, 0), M(m, 1)$  (см. § 3,

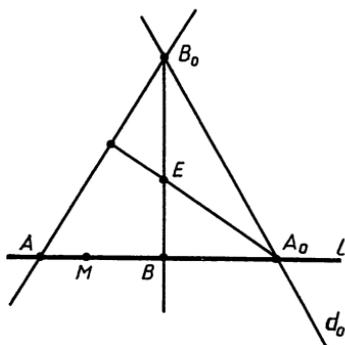


Рис. 41

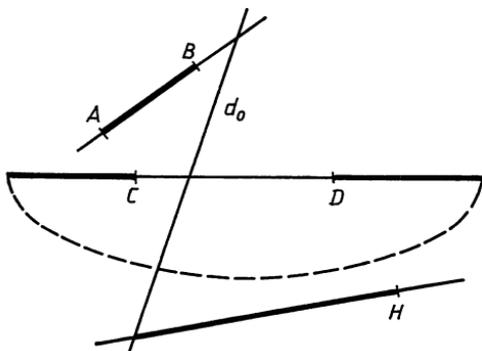


Рис. 42

замечание). Так как  $B$  и  $M$  — различные точки, то  $m \neq 1$ . По формуле (1) § 9 получим:

$$(AB, MA_0) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{m}{m-1}. \quad (2)$$

По формулам (2) § 21 точки  $A$ ,  $B$  и  $M$  на плоскости  $A_2$  в соответствующем репере  $R_0^A$  имеют координаты  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $M(m, 0)$ , поэтому из равенства  $\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$  получаем  $m = \lambda(1 - m)$ , или  $\lambda = \frac{m}{1 - m}$ . Учитывая равенство (2), получаем формулу (1).

Предлагаем читателю, используя формулу (1), доказать утверждение: *любое аффинное преобразование  $\hat{f} \in \hat{H}_0$  сохраняет простое отношение трех точек.*

С помощью простого отношения трех точек определяется понятие *лежать между*: говорят, что точка  $M$  лежит между точками  $A$  и  $B$ , если  $(AB, M) > 0$ . Далее обычным образом определяется *отрезок* и *луч*. На рисунке 42 жирной линией изображены отрезки  $AB$  и  $CD$  и один из лучей, исходящих из точки  $H$ .

Середина  $S$  отрезка  $AB$  определяется условием  $(AB, S) = 1$ . По формуле (1)  $(AB, CL_0) = -1$ , т. е. концы отрезка гармонически сопряжены с серединой отрезка и с несобственной точкой прямой, проходящей через концы отрезка.

Пользуясь понятием отрезка, обычным образом можно ввести понятие многоугольника, в частности понятие трапеции и параллелограмма. На рисунке 43 изображены два параллелограмма  $A_1B_1C_1D_1$  и  $A_2B_2C_2D_2$  и трапеция  $EFGH$  с основаниями  $EH$  и  $FG$  (внутренние области четырехугольников на рисунке заштрихованы). Ясно, что свойство фигуры быть отрезком, многоугольником, параллелограммом или трапецией является инвариантным свойством относительно группы  $\hat{H}_0$ .

2. Пусть  $\bar{\gamma}$  — линия второго порядка проективной плоскости с фиксированной прямой  $d_0$  (т. е. расширенной плоскости  $\bar{A}_2$ ). Выберем репер  $R_0$  и запишем уравнение линии  $\bar{\gamma}$  в этом репере:

$$a_{11}x_2^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \quad (3)$$

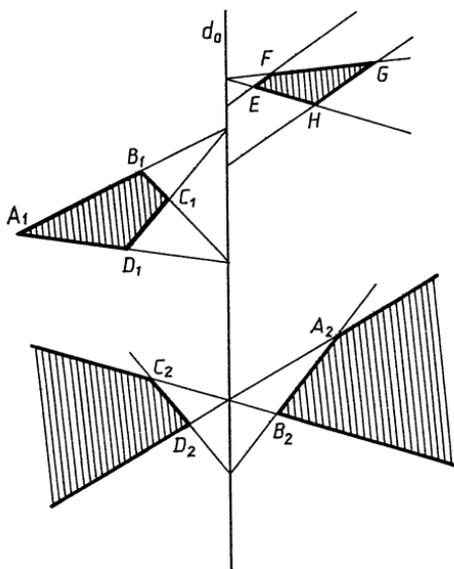


Рис. 43

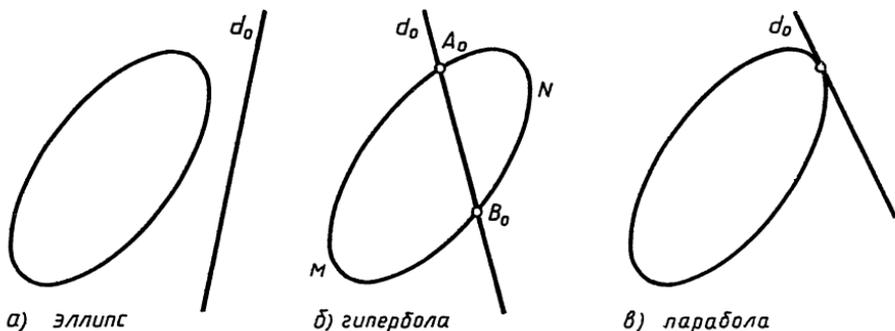


Рис. 44

Мы предполагаем, что ранг матрицы  $\|a_{ij}\|$  равен трем, т. е. что линия  $\bar{\gamma}$  невырожденная.

Обозначим через  $\gamma$  множество всех точек линии  $\bar{\gamma}$ , принадлежащих плоскости  $A_2$ , т. е.  $\gamma = \bar{\gamma} \cap A_2$ . По формулам (2) § 21 получаем следующее уравнение линии  $\gamma$  в соответствующем аффинном репере  $R_0^A$ :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (4)$$

Мы видим, что  $\gamma$  — линия второго порядка на плоскости  $A_2$ . Таким образом, из каждой линии второго порядка плоскости  $\bar{A}_2$  получаем некоторую линию второго порядка плоскости  $A_2$ .

Рассмотрим более подробно случай, когда  $\bar{\gamma}$  — овальная линия второго порядка, заданная уравнением (3). Для этого рассмотрим взаимное расположение линии  $\bar{\gamma}$  и прямой  $d_0$ . Так как прямая  $d_0$  в репере  $R_0$  определяется уравнением  $x_3 = 0$ , то координаты точек пересечения прямой  $d_0$  и линии  $\bar{\gamma}$  определяются системой уравнений (3) и  $x_3 = 0$ . Эта система эквивалентна системе

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Дискриминант  $\Delta_2$  квадратного уравнения равен  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ . Возможны следующие случаи:

а)  $\Delta_2 > 0$ . Линия  $\bar{\gamma}$  не имеет общих вещественных точек с прямой  $d_0$  (см. § 18, п. 1). В этом случае линия  $\gamma$  на плоскости  $A_2$  называется *эллипсом* (рис. 44, а).

б)  $\Delta_2 < 0$ . Линия  $\bar{\gamma}$  пересекается с прямой  $d_0$  в двух вещественных точках. В этом случае соответствующая линия  $\gamma$  на плоскости  $A_2$  называется *гиперболой*. На рисунке 44, б изображена гипербола, причем дуги  $A_0MB_0$  и  $A_0NB_0$  (без точек  $A_0$  и  $B_0$ ) — ветви гиперболы.

в)  $\Delta_2 = 0$ . Прямая  $d_0$  является касательной к линии  $\bar{\gamma}$ . В этом случае соответствующая линия  $\gamma$  в плоскости  $A_2$  называется *параболой* (рис. 44, в).

Очевидно, свойство линии быть эллипсом, гиперболой или параболой является инвариантным свойством относительно группы  $\bar{H}_0$ .

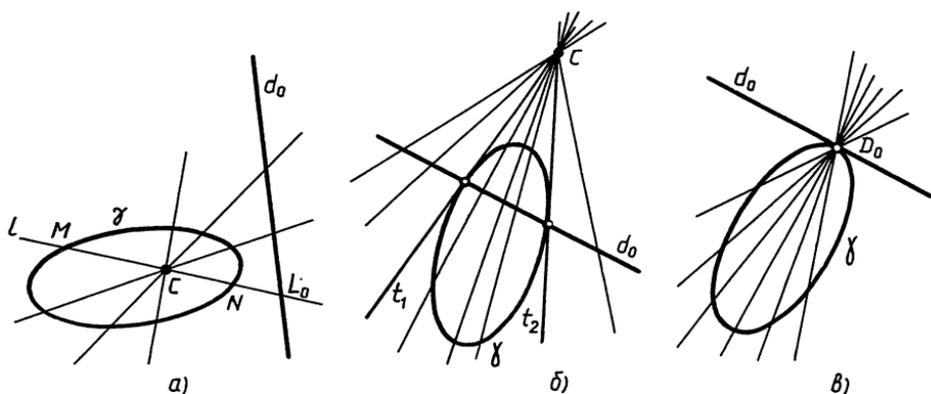


Рис. 45

Эти определения полностью согласуются с понятиями эллипса, параболы и гиперболы на обычной аффинной плоскости. В самом деле, линия, заданная уравнением (4) на аффинной плоскости, является невырожденной линией второго порядка, имеющей вещественные точки, так как  $\bar{\gamma}$  — овальная линия. Если  $\Delta_2 > 0$ , то линия принадлежит эллиптическому типу, поэтому является эллипсом; если  $\Delta_2 < 0$ , она принадлежит гиперболическому типу, поэтому она является гиперболой, и, наконец, если  $\Delta_2 = 0$  — принадлежит параболическому типу, поэтому является параболой.

3. Полюс несобственной прямой  $d_0$  относительно линии  $\bar{\gamma}$  называется *центром* соответствующей линии  $\gamma$  на плоскости  $A_2$ . Отсюда следует, что эллипс имеет единственный центр, который является внутренней точкой линии (точка  $C$  на рис. 45, а). Любая прямая  $l$ , проходящая через эту точку, пересекает эллипс в двух точках  $M$  и  $N$ . По теореме 2 § 18  $(MN, CL_0) = -1$ , где  $L_0$  — несобственная точка, соответствующая прямой  $l$  (рис. 45, а). По формуле (1)  $(MN, C) = 1$ , т. е.  $C$  — середина отрезка  $MN$ . Мы пришли к обычному определению центра эллипса на аффинной плоскости: точка  $C$  является серединой любой хорды, проходящей через эту точку.

Гипербола также имеет единственный центр (точка  $C$  на рис. 45, б), через который проходят касательные к овальной линии  $\bar{\gamma}$  в точках пересечения линии с прямой  $d_0$ . Эти касательные (без точек касания) на плоскости  $A_2$  называются *асимптотами* гиперболы  $\gamma$  (прямые  $t_1$  и  $t_2$  на рис. 45, б). Мы видим, что асимптоты гиперболы не имеют с ней ни одной общей точки (ни вещественной, ни мнимой). Таким образом, определение асимптоты гиперболы полностью согласуется с понятием асимптот гиперболы на аффинной плоскости (ч. I, § 28, п. 5).

Парабола не имеет центров, так как если  $\gamma$  — парабола, то прямая  $d_0$  является касательной к линии  $\bar{\gamma}$ , поэтому ее полюсом является точка касания  $D_0$ , которая не принадлежит множеству  $A_2$ .

*Диаметром* линии второго порядка  $\gamma$  назовем полярю любой точки прямой  $d_0$  относительно линии  $\bar{\gamma}$ . По теореме взаимности поля-

ритета (§ 18, теорема 3) поляр любой точки прямой  $d_0$  проходит через полюс этой прямой относительно линии  $\bar{\gamma}$ . Отсюда следуют утверждения.

1<sup>0</sup>. Диаметрами эллипса или гиперболы являются те и только те прямые, которые проходят через центр линии (рис. 45, а, б).

2<sup>0</sup>. Множество диаметров параболы есть пучок параллельных прямых, которым соответствует несобственная точка  $D_0$  — точка касания прямой  $d_0$  и линии  $\bar{\gamma}$  (рис. 45, в).

Рассмотрим два диаметра  $x$  и  $y$  линии  $\bar{\gamma}$  и соответствующие им несобственные точки  $X_0$  и  $Y_0$  (рис. 46).

Диаметр  $x$  назовем сопряженным диаметру  $y$ , если прямая  $\bar{x}$  является полярной точки  $Y_0$ . По теореме взаимности поляритета в этом случае прямая  $\bar{y}$  является полярной точки  $X_0$ , т. е. каждая из прямых  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  проходит через полюс другой. Поэтому диаметры  $x$  и  $y$  называются взаимно-сопряженными.

3<sup>0</sup>. Каждый из двух сопряженных диаметров делит пополам хорды, параллельные другому диаметру (рис. 46).

□ Действительно, пусть  $x$  и  $y$  — сопряженные диаметры, а  $l$  — прямая, параллельная прямой  $y$ . Обозначим через  $M$  и  $N$  точки пересечения прямой  $l$  с данной линией  $\bar{\gamma}$ , а через  $P$  точку пересечения этой прямой с диаметром  $x$ . Если  $Y_0$  — несобственная точка, соответствующая прямой  $y$ , то  $Y_0 \in \bar{l}$ . По теореме 2 § 18  $(MN, PY_0) = -1$ , поэтому по формуле (1)  $(MN, P) = 1$ , т. е.  $P$  — середина отрезка  $MN$ . ■

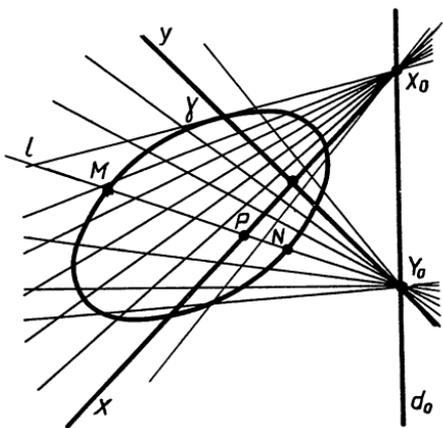


Рис. 46

## § 23. Евклидова геометрия с проективной точки зрения

1. Для построения проективной модели евклидовой плоскости воспользуемся той же схемой, что и в § 21, т. е. рассмотрим проективную плоскость  $P_2$  с фиксированной прямой  $d_0$  и множеством точек  $A_2 = P_2 \setminus d_0$  с введенной на нем аффинной структурой (проективная модель аффинной плоскости). В качестве группы преобразований рассмотрим некоторую подгруппу  $H_1$  группы  $H_0$  (§ 21, п. 4), которая определяется следующим образом. Отметим на прямой  $d_0$  две произвольные комплексно-сопряженные точки  $I_1$  и  $I_2$  (назовем их *циклическими точками*). Прямую  $d_0$  с точками  $I_1$  и  $I_2$  на ней будем обозначать через  $d_1$ . Рассмотрим множество  $H_1$  всех проективных преобразований, каждое преобразование  $f$  из которых обладает свойством: либо

$I_1 = \hat{f}(I_1)$  и  $I_2 = \hat{f}(I_2)$ , либо  $I_1 = \hat{f}(I_2)$  и  $I_2 = \hat{f}(I_1)$ . Отсюда следует, что если  $\hat{f} \in H_I$ , то  $\hat{f} \in H_0$ , т. е.  $H_I \subset H_0$ . Далее, если  $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in H_I$ , то  $\hat{f}_2 \cdot \hat{f}_1 \in H_I$ , и если  $\hat{f} \in H_I$ , то  $\hat{f}^{-1} \in H_I$ . Таким образом,  $H_I$  — подгруппа группы  $H_0$ .

Любое проективное преобразование  $\hat{f}$  из  $H_I$  порождает некоторое преобразование  $\hat{f}$  множества точек  $A_2$ . Следовательно, множество  $\widehat{H}_I$  всех этих преобразований можно рассматривать как группу преобразований плоскости  $A_2$ .

2. Запишем аналитическое выражение преобразований из множества  $H_I$ . Для этого будем пользоваться только такими реперами плоскости  $\bar{A}_2$ , в которых циклические точки имеют координаты  $I_1(1, i, 0), I_2(1, -i, 0)$ . Репер, удовлетворяющий этому условию, обозначим через  $R_1$ . Докажем, что существует бесконечное множество таких реперов. Вершины и единичную точку репера ( $A_0, B_0, C, E$ ) выберем так:  $B_0$  — произвольная точка прямой  $d_I$ ,  $C$  — произвольная точка проективной плоскости  $\bar{A}_2$ , не лежащая на прямой  $d_I$ . Точку  $A_0$  на прямой  $d_I$  и точку  $E$  вне этой прямой выберем так, чтобы

$$(I_1 I_2, B_0 A_0) = -1, \quad (I_1 I_2, B_0 E_3) = i, \quad (1)$$

где  $E_3$  — точка пересечения прямых  $CE$  и  $d_0$ . Такой выбор точек  $A_0$  и  $E$  всегда возможен (см. § 16, лемма 1). Произвол в выборе репера ( $A_0, B_0, C, E$ ) определяется произволом выбора точки  $B_0$  на прямой  $d_I$ , точки  $C$  на плоскости  $A_2$  и точки  $E$  на прямой  $CE_3$  (рис. 47).

Докажем, что выбранный таким образом репер является репером  $R_I$ . Пусть циклические точки в этом репере имеют координаты  $I_1(1, a + ib, 0)$  и  $I_2(1, a - ib, 0)$  (см. § 16, доказательство леммы 1). На прямой  $d_0$  в репере  $R_3 = (A_0, B_0, E_3)$  для точек  $I_1, I_2, A_0, B_0, E_3$  имеем:

$$I_1(1, a + ib), I_2(1, a - ib), A_0(1, 0), B_0(0, 1), E_3(1, 1).$$

Пользуясь формулой (1) § 9, находим:

$$(I_1 I_2, B_0 A_0) = \frac{a - ib}{a + ib},$$

$$(I_1 I_2, B_0 E_3) = \frac{1 - a + ib}{1 - a - ib}.$$

Учитывая равенства (1), получаем  $a = 0, b = 1$ , т. е. циклические точки имеют координаты  $I_1(1, i, 0), I_2(1, -i, 0)$ .

В дальнейшем предполагаем, что все рассматриваемые реперы являются реперами  $R_I$ . Каждому такому реперу на плоскости  $A_2$  соответствует аффинный репер  $R^A = (C, E_1, E_2)$ , который назовем *декартовым репером* (рис. 47).

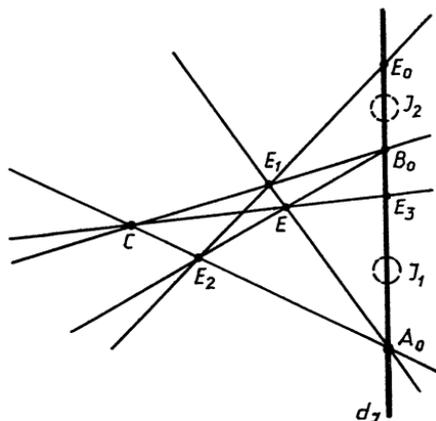


Рис. 47

В соответствии с формулами (3) § 21 любое преобразование  $f \in H_I$  в репере  $R_0$ , а следовательно, и в репере  $R_I$  определяется формулами

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x'_3 &= \phantom{c_{21}x_1 + c_{22}x_2 +} c_{33}x_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_{33} \neq 0$ ,  $\begin{vmatrix} c_{11}c_{12} \\ c_{21}c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$  и  $\rho \neq 0$ ,  $\rho \in \mathbb{C}$ .

Но для преобразований группы  $H_I$  на коэффициенты  $c_{ij}$  накладываются дополнительные ограничения, которые нам предстоит установить. Так как преобразование  $f$  циклические точки переводит в циклические точки, то возможны два случая.

а)  $I_1 = f(I_1)$  и  $I_2 = f(I_2)$ . Используя первое из этих равенств, по формулам (2) получаем  $\rho = c_{11} + c_{12}i$ ,  $\rho i = c_{21} + c_{22}i$ .

Отсюда получаем  $c_{11} = c_{22}$ ,  $c_{12} = -c_{21}$ . Нетрудно проверить, что при выполнении этих равенств  $I_2 = f(I_2)$ .

б)  $I_2 = f(I_1)$  и  $I_1 = f(I_2)$ . По аналогии с предыдущим случаем из условия  $I_2 = f(I_1)$  получаем  $c_{11} = -c_{22}$ ,  $c_{21} = c_{12}$ . При выполнении этих равенств  $I_1 = f(I_2)$ .

Если ввести обозначения  $c_{11} = a'$ ,  $c_{21} = b'$ ,  $c_{13} = c'_1$ ,  $c_{23} = c'_2$ , то формулы (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= a'x_1 - \varepsilon b'x_2 + c'_1x_3, \\ \rho x'_2 &= b'x_1 + \varepsilon a'x_2 + c'_2x_3, \\ \rho x'_3 &= \phantom{b'x_1 + \varepsilon a'x_2 +} c_{33}x_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $(a'^2 + b'^2)c_{33} \neq 0$ ,  $a \varepsilon = \pm 1$ , причем  $\varepsilon = 1$  отвечает случаю а),  $a \varepsilon = -1$  — случаю б).

Получим теперь аналитическое выражение преобразований из множества  $\widehat{H}_I$  в реперах  $R^A$ , которые соответствуют реперам  $R_I$ . Для точек множества  $A_2 \ x_3 \neq 0$ ,  $x'_3 \neq 0$ , поэтому, разделив почленно первое и второе из равенств (3) на третье, получаем:

$$\begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c_1, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + c_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a = \frac{a'}{c_{33}}$ ,  $b = \frac{b'}{c_{33}}$ ,  $c_2 = \frac{c'_2}{c_{33}}$ ,  $c_1 = \frac{c'_1}{c_{33}}$ .

Введем новые параметры, положив  $a = k \cos \varphi$ ,  $b = k \sin \varphi$ , где  $k > 0$ , а  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Тогда формулы (4) принимают вид:

$$\begin{aligned} x' &= k(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + c_1, \\ y' &= k(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + c_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Такой же вид имеют и формулы (7) § 46, ч. I преобразований подобия, поэтому группа подобий евклидовой плоскости (см. ч. I, § 47) изоморфна группе  $\widehat{H}_I$ . Таким образом, евклидову геометрию на плоскости можно рассматривать как геометрию, изучающую те свойства фигур плоскости  $A_2$ , которые инвариантны относительно группы  $\widehat{H}_I$ .

3. Обозначим через  $\widehat{H}_T$  множество преобразований из  $\widehat{H}_I$  плоскости  $A_2$ , состоящее из всех преобразований, заданных в репере  $R^A$  формулами

$$\begin{aligned} x' &= x + c_1, \\ y' &= y + c_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные действительные числа. Формулы (6) получены из формул (5) при  $k = 1$ ,  $\cos \varphi = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ .

Это множество является подгруппой группы  $H_I$  (предлагаем читателю самостоятельно убедиться в этом). Любое преобразование  $\widehat{f} \in \widehat{H}_T$  называется *параллельным переносом*. Следовательно, множество  $\widehat{H}_T$  параллельных переносов можно рассматривать как группу преобразований плоскости  $A_2$ . Множество  $\widehat{H}_T$  называется *группой параллельных переносов*. Единицей этой группы, очевидно, является тождественное преобразование, т. е. преобразование, которое задается формулами (6) при  $c_1 = c_2 = 0$ .

Пользуясь формулами (6), легко доказать следующие свойства параллельных переносов плоскости. Доказательство этих свойств предоставляем читателю.

1<sup>0</sup>. Параллельный перенос, отличный от тождественного преобразования, не имеет инвариантных точек.

2<sup>0</sup>. В параллельном переносе  $\widehat{f}$ , отличном от тождественного преобразования, прямые, проходящие через соответственные точки, параллельны или совпадают.

3<sup>0</sup>. Каковы бы ни были точки  $M$  и  $M'$  плоскости  $A_2$ , существует единственный параллельный перенос, который точку  $M$  переводит в точку  $M'$ .

В заключение отметим, что формулы (6) в точности совпадают с формулами параллельного переноса на евклидовой плоскости.

## § 24. Перпендикулярность прямых, равенство отрезков и углов с проективной точки зрения

1. Пусть на проективной плоскости  $P_2$  зафиксирована прямая  $d_0$  и на ней две циклические точки  $I_1$  и  $I_2$ . Каждой точке  $M$  прямой  $d_1$  поставим в соответствие точку  $M'$  той же прямой так, чтобы  $(I_1 I_2, MM') = -1$ . По лемме 1 § 16 каждой точке  $M$  ставится в соответствие единственная точка  $M'$ , поэтому рассматриваемое соответствие является отображением  $g_I: d_1 \rightarrow d_1$ . Из равенства  $(I_1 I_2, MM') = (I_1 I_2, M'M)$  следует, что если  $M' = g_I(M)$ , то  $M = g_I(M')$ . Отсюда мы заключаем, что  $g_I$  — преобразование точек прямой  $d_0$  и  $g_I$  и  $g_I^{-1}$  совпадают. Ясно, что  $g_I$  не имеет ни одной вещественной инвариантной точки.

Докажем, что преобразование  $g_I$  сохраняет сложное отношение четырех точек. Для этого на плоскости  $\bar{A}_2 = A_2 \cup d_1$  возьмем репер  $R_I = (A_0, B_0, C, E)$  и рассмотрим в этом репере произвольную точку  $M$  прямой  $d_1$  и ее образ  $M'$ :  $M(m_1, m_2, 0)$ ,  $M'(m'_1, m'_2, 0)$ . Тогда на прямой

$d_j$  в репере  $R_3 = (A_0, B_0, E_3)$ , где  $E_3 = CE \cap d_0$ , точки  $I_1, I_2, M$  и  $M'$  имеют координаты:  $I_1(1, i), I_2(1, -i), M(m_1, m_2), M'(m'_1, m'_2)$ . Пользуясь формулой (1), § 9, из равенства  $(I_1 I_2, MM') = -1$  после несложных выкладок получаем:

$$m_1 m'_1 + m_2 m'_2 = 0. \quad (1)$$

Таким образом, отображение  $g_j$  каждую точку  $M(m_1, m_2) \in d_j$  переводит в точку  $M'(-m_2, m_1)$ . Рассмотрим четыре точки прямой  $d_j$ :  $M(m_1, m_2), N(n_1, n_2), P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2)$  — и их образы  $M'(-m_2, m_1), N'(-n_2, n_1), P'(-p_2, p_1), Q'(-q_2, q_1)$ . Пользуясь формулой (1) § 9, непосредственным вычислением убеждаемся в том, что  $(MN, PQ) = (M'N', P'Q')$ .

Мы пришли к выводу, что  $g_j$  — эллиптическая инволюция прямой  $d_j$ . Итак, на прямой  $d_j$  с циклическими точками  $I_1, I_2$  возникает некоторая эллиптическая инволюция  $g_j$ . Отметим, что при любом преобразовании группы  $H_j$  пара соответствующих точек в инволюции  $g_j$  переходит в пару точек, соответствующих в этой же инволюции. В самом деле, пусть  $f \in H_j$ . Тогда  $(f(I_1)f(I_2), f(M)f(M')) = (f(I_1)f(I_2), f(M)f(M')) = -1$ . Но  $f(I_1) = I_1, f(I_2) = I_2$  или  $f(I_1) = I_2, f(I_2) = I_1$ , следовательно,  $(I_1 I_2, f(M)f(M')) = -1$ .

Две прямые  $a$  и  $b$  плоскости  $A_2$  называются перпендикулярными, если соответствующие им несобственные точки соответствуют в инволюции  $g_j$ . Это определение полностью согласуется с понятием перпендикулярности прямых на обычной евклидовой плоскости. В самом деле, пусть прямая  $\bar{d} \subset \bar{A}_2$ , отличная от прямой  $d_j$ , в выбранном репере  $R_j$  определяется уравнением  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ , где  $a_1$  и  $a_2$  не равны нулю одновременно. Несобственная точка  $D_0$  этой прямой имеет координаты  $D_0(-a_2, a_1, 0)$ . Тогда соответствующая аффинная прямая  $d = \bar{d} \setminus D_0$  в соответствующем декартовом репере  $R_j^A$  задается уравнением  $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ .

Две прямые  $p$  и  $q$ , заданные уравнениями

$$p_1 x + p_2 y + p_3 = 0 \quad \text{и} \quad q_1 x + q_2 y + q_3 = 0, \quad (2)$$

перпендикулярны тогда и только тогда, когда несобственные точки  $P_0(-p_2, p_1)$  и  $Q_0(-q_2, q_1)$ , соответствующие этим прямым, являются соответствующими точками в инволюции  $g_j$ , т. е. когда выполняется равенство (1):  $p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0$ . Мы получили известное из первой части курса условие перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями (2) на евклидовой плоскости.

Определение перпендикулярности, сформулированное выше, позволяет многие свойства перпендикулярных прямых, известные нам из школьного курса геометрии, наглядно проиллюстрировать на проективной плоскости с фиксированной прямой, содержащей циклические точки. Например, на рисунке 48, где точки  $A_0$  и  $A'_0$  соответствуют в инволюции  $g_j$ , дана иллюстрация хорошо известной теоремы школьного курса геометрии: через любую точку  $A$  плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная к прямой  $a$ . На рисунке 49, где точки  $A_0$  и  $A'_0$  соответствуют в инволюции  $g_j$ , по-

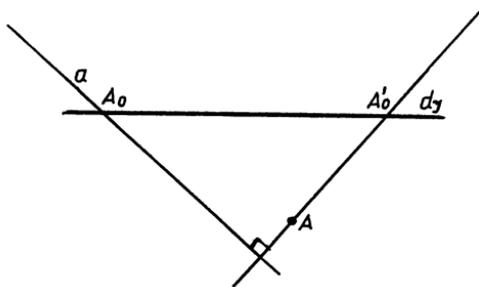


Рис. 48

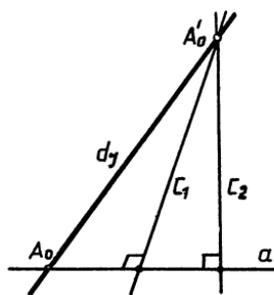


Рис. 49

казано, что две прямые  $c_1$  и  $c_2$ , перпендикулярные к прямой  $a$ , параллельны.

На рисунке 50 точки  $P_0, P'_0$  и  $Q_0, Q'_0$  соответствуют в инволюции  $g_1$ . Четырехугольник  $ABCD$  является прямоугольником, так как его противоположные стороны параллельны и все углы прямые. Четырехугольник  $EFGH$  — квадрат, так как он является прямоугольником с взаимно перпендикулярными диагоналями  $FH$  и  $EG$ . На этом же рисунке  $XYZU$  — ромб, отличный от квадрата ( $XZ \perp YU$ , но стороны  $XU$  и  $XU$  не перпендикулярны).

Интересно отметить, что в репере  $R_I = (A_0, B_0, C, E)$  точки  $A_0, B_0$  и  $E_3, E_0$  (см. рис. 47) соответствуют в инволюции  $g_1$ , поэтому на плоскости  $A_2$  четырехугольник  $CE_1EE_2$  — квадрат, так как он является прямоугольником с взаимно перпендикулярными диагоналями. Таким образом, вершины декартова репера  $R_I^A = (C, E_1, E_2)$  являются вершинами квадрата  $CE_1EE_2$ .

2. *Окружностью* плоскости  $\bar{A}_2$  назовем овальную линию второго

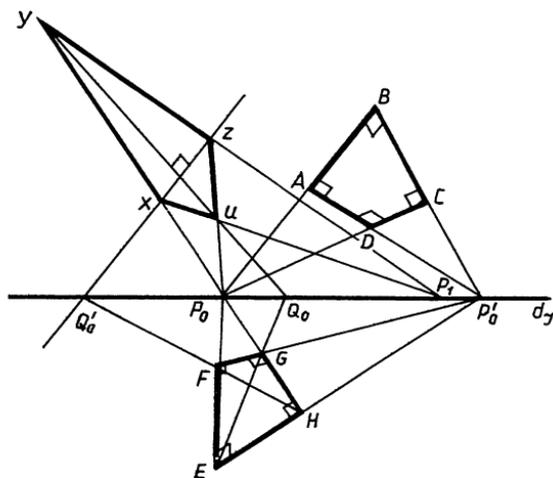


Рис. 50

порядка, проходящую через циклические точки  $I_1$  и  $I_2$ . Так как любое преобразование  $f \in H_1$  переводит овальную линию второго порядка в овальную линию, а точки  $I_1$  и  $I_2$  в те же точки, то оно переводит окружность в окружность. Окружность не имеет общих вещественных точек с прямой  $d_1$  (овальная линия пересекается с этой прямой не более чем в двух точках!), поэтому на плоскости  $A_2$  окружность есть частный случай эллипса.

Выведем уравнение окружности в некотором репере  $R_i$  плоскости  $A_2$ . Пусть  $\omega$  — данная окружность, а формула (3) § 22 — ее уравнение. Из условия  $I_1 \in \omega$  получаем  $a_{11} - a_{22} - 2a_{12}i = 0$ , откуда  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = 0$ . Легко проверить, что при выполнении этих условий  $I_2 \in \omega$ . Таким образом, уравнение окружности  $\omega$  в репере  $R_i$  имеет вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{11}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \quad (3)$$

Так как  $\omega$  — невырожденная линия, то  $a_{11} \neq 0$ .

Центром окружности называется полюс прямой  $d_1$ . Нетрудно убедиться в том, что центр окружности (3) имеет координаты  $(a_{13}, a_{23}, -a_{11})$ . Радиусом окружности называется любой отрезок с концами в центре окружности и в некоторой ее точке.

Если ввести обозначения  $-\frac{a_{13}}{a_{11}} = a$ ,  $-\frac{a_{23}}{a_{11}} = b$ ,  $\frac{a_{33}}{a_{11}} = c$ , то уравнение (4) § 22 для окружности на плоскости  $A_2$  в репере  $R_i^A$  принимает вид  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  или  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + c - a^2 - b^2 = 0$ . Так как линия  $\omega$  имеет вещественные точки, то  $c - a^2 - b^2 < 0$ . Если  $a^2 + b^2 - c$  обозначить через  $r^2$ , то окончательно получаем:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (4)$$

Центром этой окружности является точка с координатами  $x_0 = -\frac{a_{13}}{a_{11}}$ ,  $y_0 = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$ , т. е. точка  $(a, b)$ . Число  $r$  также называется радиусом окружности  ${}^1\omega$ .

Уравнение (4) в точности совпадает с обычным уравнением окружности на евклидовой плоскости.

Докажем, что если на плоскости  $A_2$  даны две произвольные собственные точки  $C$  и  $E_1$ , то существует единственная окружность  $\omega$  с центром  $C$ , проходящая через точку  $E_1$ . Выберем репер  $R_1 = (A_0, B_0, C, E)$  так, чтобы  $B_0 = CE_1 \cap d_1$  (рис. 51). Точки  $A_0$  и  $E_3$  определяются однозначно из условий (1), § 23, а  $E = A_0E_1 \cap CE_3$ .

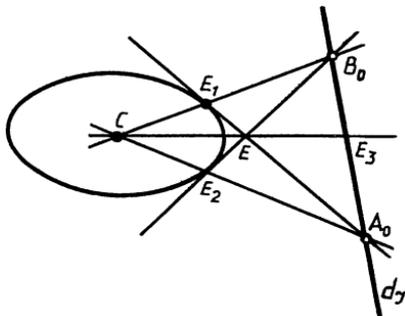


Рис. 51

<sup>1</sup> Из последующего изложения следует, что  $r$  — длина любого отрезка с концами в центре окружности и в некоторой ее точке.

Легко проверить, что линия  $\omega$ , заданная в репере  $R_I$  уравнением  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ , является окружностью с центром  $C$ , которая проходит через точку  $E_1$ .

Докажем, что  $\omega$  — единственная окружность, удовлетворяющая этим условиям. В самом деле, пусть  $\omega'$  — окружность с центром  $C$ , проходящая через точку  $E_1$ . Запишем ее уравнение в репере  $R_I$  в виде (3). Так как  $C(0, 0, 1)$  — центр этой окружности, то  $a_{13} = a_{23} = 0$ . Далее, окружность  $\omega'$  проходит через точку  $E_1(0, 1, 1)$ , поэтому  $a_{11} + a_{33} = 0$ . Итак, уравнение (3) принимает вид  $a_{11}x_1^2 + a_{11}x_2^2 - a_{11}x_3^2 = 0$ , т. е. совпадает с уравнением окружности  $\omega$ .

В заключение отметим, что при параллельном переносе (6) § 23 окружность (4) переходит в линию:  $(x' - c_1 - a)^2 + (y' - c_2 - b)^2 = r^2$ , т. е. в окружность с центром  $(a + c_1, b + c_2)$  радиуса  $r$ . Две окружности называются *равными* (конгруэнтными), если существует параллельный перенос, который одну окружность переводит в другую. Докажем следующую лемму.

*Л е м м а.* Две окружности равны тогда и только тогда, когда их радиусы равны.

□ Выше было отмечено, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность того же радиуса, поэтому если окружности  $\omega$  и  $\omega'$  равны, то их радиусы равны.

Докажем обратное утверждение. Пусть окружность  $\omega$  радиуса  $r$  задана уравнением (4), а окружность  $\omega'$  того же радиуса  $r$  — уравнением

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = r^2. \quad (4')$$

Рассмотрим параллельный перенос, заданный формулами  $x' = x + a' - a$ ,  $y' = y + b' - b$ . При этом параллельном переносе окружность  $\omega$  переходит в линию, заданную уравнением

$$(x' - a' + a - a)^2 + (y' - b' + b - b)^2 = r^2,$$

т. е. в окружность  $\omega'$ . Таким образом, окружности  $\omega$  и  $\omega'$  равны. ■

3. Рассмотрим понятия равенства (конгруэнтности) отрезков и углов с проективной точки зрения. Два угла плоскости  $A_2$  называются *равными* (конгруэнтными), если существует преобразование  $\hat{f} \in \hat{H}_I$ , которое один угол переводит в другой. Два отрезка называются *равными* (конгруэнтными), если существуют такие равные окружности, для которых эти отрезки являются радиусами. Так как  $\hat{H}_I$  — группа, то отношение конгруэнтности отрезков и углов рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Обозначим через  $\hat{H}_D$  множество тех преобразований из  $\hat{H}_I$ , которое сохраняет равенство отрезков. Запишем аналитическое выражение этих преобразований.

Пусть  $\hat{f} \in \hat{H}_D$ , тогда  $\hat{f} \in \hat{H}_I$ . В декартовом репере  $R_I^A$  преобразование  $\hat{f}$  задается формулами (5) § 23:

$$\begin{aligned} x' &= k(x \cos \varphi - \varepsilon y \sin \varphi) + c_1, \\ y' &= k(x \sin \varphi + \varepsilon y \cos \varphi) + c_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как это преобразование сохраняет конгруэнтность отрезков,

то оно окружность

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (6)$$

переводит в конгруэнтную окружность

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = 1. \quad (7)$$

Поэтому преобразование  $\hat{f}$  центр  $(0, 0)$  окружности (6) переводит в центр  $(a, b)$  окружности (7). По формулам (5) получаем  $c_1 = a$ ,  $c_2 = b$ . Используя формулы (5), находим уравнение прообраза окружности (7):  $k^2(x \cos \varphi - y \sin \varphi)^2 + k^2(x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 = 1$ , или  $k^2 x^2 + k^2 y^2 = 1$ . Сравнивая это уравнение с уравнением (6), приходим к выводу, что  $k = 1$ . Таким образом, формулы (5) для преобразования  $\hat{f}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + c_1, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + c_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Такой же вид имеют формулы, определяющие преобразования группы  $D$  движений евклидовой плоскости (см. (3), § 42, ч. I). Следовательно, группы  $\hat{H}_D$  и  $D$  изоморфны.

4. Так как на плоскости  $A_2$  введена конгруэнтность отрезков, то эта плоскость стала евклидовой плоскостью с группой  $\hat{H}_D$  движений, заданных в декартовом репере формулами (8). На такой плоскости, как мы знаем, можно ввести понятие длины отрезка.

Пусть какой-то отрезок  $PQ$  выбран за единицу измерения. Тогда окружность  $\omega$  с центром  $P$ , проходящая через точку  $Q$ , называется *единичной окружностью*. Возьмем произвольный отрезок  $AB$  и рассмотрим окружность  $\omega'$  с центром  $A$ , равную окружности  $\omega$ . Обозначим через  $E$  точку пересечения окружности  $\omega'$  с лучом  $AB$ . *Длиной отрезка  $AB$*  (в единице измерения  $PQ$ ) назовем число  $\lambda$ , такое, что  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AE}$ .

Легко выразить длину отрезка  $AB$  через простое отношение точек  $A, B, E$  и через сложное отношение  $A, B, E, L_0$ , где  $L_0$  — несобственная точка, соответствующая прямой  $AB$ . В самом деле равенство  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AE}$  можно записать так:  $\overrightarrow{BA} = -\lambda \overrightarrow{AE}$ , поэтому  $\lambda = -(BE, A)$ . По формуле (1) § 22 получаем  $\lambda = (BE, AL_0)$ . Эта формула дает проективное истолкование длины отрезка.

## § 25. Приложение проективной геометрии к решению задач школьного курса геометрии

1. Теоремы и задачи проективной геометрии могут быть использованы для решения ряда задач школьного курса геометрии, имеющих проективный характер. Таковыми являются задачи, в которых говорится о точках, лежащих на одной прямой, прямых, принадлежащих одному пучку, о взаимном расположении линии второго порядка с прямой, сложном отношении четырех точек и т. д. Дополняя несобственными точками евклидову плоскость  $E_2$  до расширенной

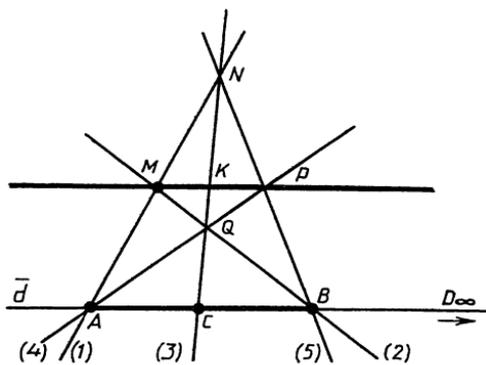


Рис. 52

плоскости  $\bar{E}_2$ , мы можем применить к ней изученные нами теоремы проективной геометрии и решить поставленную задачу. Особенно успешно этот способ используется при решении задач на построение с помощью только одной линейки. Рассмотрим некоторые из таких задач<sup>1</sup>. При этом следует учесть два утверждения, которые чаще всего используются при решении задач такого типа.

1<sup>0</sup>. Две прямые  $a$  и  $b$  на плоскости  $E_2$  параллельны тогда и только тогда, когда несобственные точки, соответствующие им, совпадают.

2<sup>0</sup>. На плоскости  $E_2$  серединой отрезка  $AB$  является точка  $M$ , такая, что  $(AB, MD_\infty) = -1$ , где  $D_\infty$  — несобственная точка, соответствующая прямой  $AB$ .

**Задача 1.** Даны отрезок  $AB$ , его середина  $C$  и точка  $M$ , не лежащая на прямой  $AB$ . С помощью одной линейки построить прямую, проходящую через точку  $M$  и параллельную прямой  $AB$ .

**Решение.** Рассмотрим данные фигуры, т. е. отрезок  $AB$  и точки  $C, M$  на расширенной плоскости  $\bar{E}_2$ . Обозначим через  $\bar{d}$  прямую расширенной плоскости, проходящую через точки  $A$  и  $B$ , а через  $D_\infty$  несобственную точку этой прямой. Задача сводится к построению на плоскости  $\bar{E}_2$  прямой  $MD_\infty$ , где  $M$  — данная точка, а  $D_\infty$  — недоступная точка, но о ней известно, что она лежит на прямой  $\bar{d}$  и  $(AB, CD_\infty) = -1$ .

Для построения искомой прямой воспользуемся теоремой § 13 о свойстве полного четырехвершинника. Построим какой-нибудь полный четырехвершинник  $MNPQ$  так, чтобы точки  $A$  и  $B$  были его диагональными точками, а точка  $C$  лежала на стороне, проходящей через третью диагональную точку  $K$  (рис. 52).

Проведем прямые  $AM$  и  $BM$  и какую-нибудь прямую, проходящую через точку  $C$ , но не проходящую через точки  $A$  и  $M$ . Пусть эта прямая пересекает прямые  $AM$  и  $BM$  соответственно в точках  $N$  и  $Q$  (см. рис. 52; здесь и в дальнейшем прямые, которые мы строим, обозначены цифрами, причем цифры соответствуют той последовательности, в которой приводятся прямые). Затем проводим прямые  $AQ$  и  $BN$ , которые пересекаются в точке  $P$ . Прямая  $MP$  искомая.

Задача решена правильно, так как  $MNPQ$  — полный четырехвершинник, а  $A$  и  $B$  — его диагональные точки, поэтому если  $X = AB \cap MP$ , то по теореме § 13  $(AB, CX) = -1$ . По условию задачи

<sup>1</sup> Отметим, что первые три задачи мы уже решали в ч. I, § 106 как задачи на построение на евклидовой плоскости. Здесь мы решим их, применяя проективную геометрию.

$C$  — середина отрезка  $AB$ , следовательно,  $X$  — несобственная точка  $D_\infty$  прямой  $\bar{d}$ . Отсюда следует, что  $AB \parallel MP$ .

**Задача 2.** Даны параллельные отрезок  $AB$  и прямая  $p$ . С помощью одной линейки построить середину отрезка  $AB$ .

**Решение.** Задача решается аналогично предыдущей. Обозначим через  $\bar{d}$  прямую расширенной плоскости  $\bar{E}_2$ , проходящую через точки  $A$  и  $B$ , а через  $D_\infty$  несобственную точку этой прямой. Задача сводится к построению точки  $C$  прямой  $\bar{d}$ , удовлетворяющей условию  $(AB, CD_\infty) = -1$ . Здесь  $A$  и  $B$  — данные точки, а  $D_\infty$  — недоступная точка, в которой пересекаются прямые  $AB$  и  $p$ .

Возьмем точку  $N$ , не лежащую на прямых  $AB$  и  $p$ , и проведем прямые  $AN$  и  $BN$  (рис. 53). Обозначим через  $M$  и  $P$  точки пересечения этих прямых с прямой  $p$ . Затем проводим прямые  $AP$  и  $BM$  и находим точку  $Q = AP \cap BM$ . Прямая  $NQ$  пересекает прямую  $AB$  в искомой точке  $C$ .

Предлагаем читателю самостоятельно обосновать правильность решения задачи.

**Задача 3.** Даны две параллельные прямые  $a, a'$  и точка  $M$ , не лежащая на этих прямых. С помощью одной линейки построить прямую, проходящую через точку  $M$  и параллельную прямым  $a$  и  $a'$ .

**Решение.**

**Первый способ.** Укажем способ построения искомой прямой, используя предыдущие две задачи. Отметим на прямой  $a$  две точки  $A$  и  $B$  и, пользуясь задачей 2, построим середину  $C$  отрезка  $AB$ . Затем, пользуясь задачей 1, построим искомую прямую.

**Второй способ.** Рассмотрим данные прямые  $\bar{a}$  и  $\bar{a}'$  и точку  $M$  на расширенной плоскости  $\bar{E}_2$ . Обозначим через  $D_\infty$  несобственную точку прямых  $\bar{a}$  и  $\bar{a}'$ . Задача сводится к построению прямой  $MD_\infty$ , проходящей через данную точку  $M$  и недоступную точку  $D_\infty$ . Для решения задачи воспользуемся теоремой Дезарга (§ 8).

Возьмем какую-нибудь точку  $S$ , не лежащую на прямых  $\bar{a}$  и  $\bar{a}'$ , и построим два трехвершинника  $ABC$  и  $A'B'C'$  так, чтобы прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  проходили через точку  $S$ , причем  $B, C \in \bar{a}$ ,  $B', C' \in \bar{a}'$  и  $M = AB \cap A'B'$  (рис. 54). Тогда точки  $M, N$  и  $D_\infty$ , где  $N = AC \cap A'C'$ , лежат на одной прямой  $\bar{x}$ , т. е.  $MN$  — искомая прямая.

Через точку  $S$  проведем две произвольные прямые и обозначим точку пересечения этих прямых с данными прямыми  $a$  и  $a'$  через

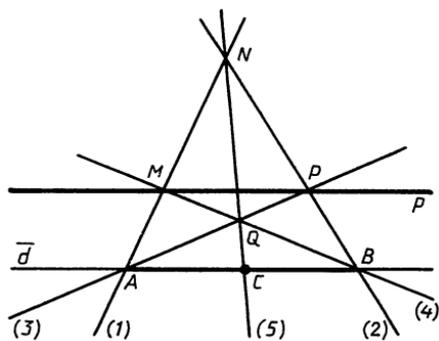


Рис. 53

<sup>1</sup> Эту же задачу можно сформулировать так: построить середину данного отрезка, пользуясь линейкой с параллельными краями.

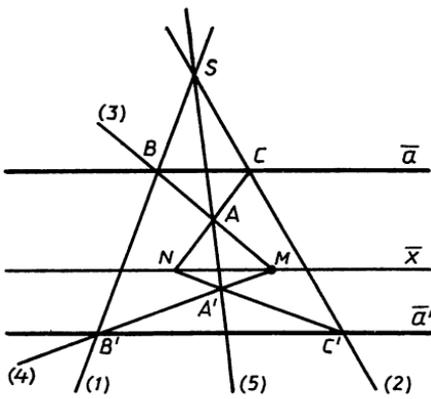


Рис. 54

$B, C, B', C'$  (рис. 54). Затем строим прямые  $BM$  и  $B'M$  и через точку  $S$  проводим прямую, которая пересекает эти прямые в точках  $A$  и  $A'$ . Если  $N = AC \cap A'C'$ , то прямая  $MN$  искомая. В самом деле, так как прямые  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  и  $\overline{CC'}$  по построению проходят через точку  $S$ , то по теореме Дезарга точки  $M \in \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$ ,  $N \in \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ ,  $D_\infty = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$  лежат на одной прямой. Значит, прямая  $MN$  проходит через точку  $D_\infty$ , т. е. на евклидовой плоскости прямые  $a, a'$  и  $MN$  параллельны.

2. Рассмотрим примеры приложения проективной геометрии к доказательству теорем и решению задач аффинной или евклидовой геометрии.

Пусть  $P_2$  — проективная плоскость, а  $d_0$  — фиксированная на ней проективная прямая. Напомним, что если на прямой  $d_0$  зафиксированы циклические точки  $I_1$  и  $I_2$ , то эту прямую обозначаем через  $d_1$ .

Мы уже отмечали, что множество  $A_2 = P_2 \setminus d_0$  можно рассматривать как модель аффинной плоскости, а то же множество с евклидовой структурой — как модель  $(E_2)$  евклидовой плоскости. Поэтому если рассматриваемая теорема или задача является аффинной, то будем ее интерпретировать на множестве  $A_2$ , а если евклидовой, то на множестве  $E_2$ .

З а д а ч а 4. Доказать, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Р е ш е н и е. Пусть  $ABCD$  — данный параллелограмм аффинной плоскости, а  $E$  — точка пересечения его диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Рассмотрим данный параллелограмм как фигуру плоскости  $A_2$ . Так как  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  и  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ , то на проективной плоскости  $P_2$  точки  $R_0 = \overline{AB} \cap \overline{CD}$  и  $S_0 = \overline{AD} \cap \overline{BC}$  лежат на прямой  $d_0$  (рис. 55). Таким

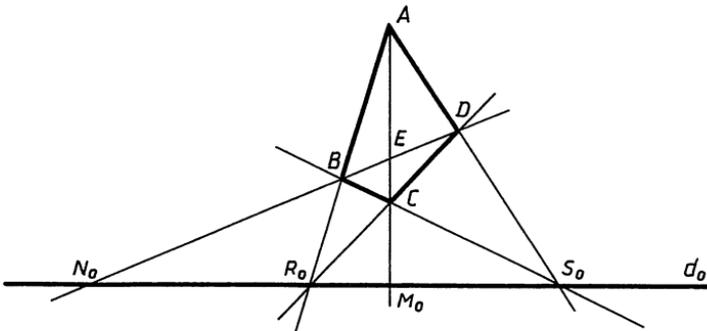


Рис. 55

образом, на плоскости  $P_2$   $ABCD$  — полный четырехвершинник с диагональными точками  $E$ ,  $R_0$  и  $S_0$ . Если  $M_0 = AC \cap d_0$ , то по следствию 1 теоремы § 13  $(AC, EM_0) = -1$ , поэтому по формуле (1) § 22 на плоскости  $A_2$   $(AC, E) = 1$ . Таким образом,  $E$  — середина отрезка  $AC$ . Точно так же доказывается, что  $E$  — середина отрезка  $BD$ .

**Задача 5.** Дана произвольная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Доказать, что прямая, проходящая через точку  $S$  пересечения прямых  $AD$  и  $BC$  и через точку  $M$  пересечения диагоналей, проходит через середины  $E$  и  $F$  оснований трапеции (рис. 56, а).

**Решение.** Рассмотрим данную трапецию  $ABCD$  как фигуру плоскости  $A_2$ . Так как  $AB \parallel CD$ , то на проективной плоскости  $P_2$  точка  $N_0 = \overline{AB} \cap \overline{CD}$  лежит на прямой  $d_0$ . Таким образом, на проективной плоскости  $P_2$   $ABCD$  — полный четырехвершинник с диагональными точками  $M$ ,  $S$  и  $N_0$  (рис. 56, б). По следствию 1 теоремы § 13  $(AB, EN_0) = -1$  и  $(CD, FN_0) = -1$ . Поэтому по формуле (1) § 22  $(AB, E) = 1$  и  $(CD, F) = 1$ . Таким образом,  $E$  — середина отрезка  $AB$ , а  $F$  — середина отрезка  $CD$ .

**Задача 6.** Доказать, что если один из углов параллелограмма прямой, то все его углы прямые, т. е. параллелограмм является прямоугольником.

**Решение.** Рассмотрим данный параллелограмм  $ABCD$  с прямым углом  $A$  как фигуру плоскости  $E_2$ . Так как  $AB \parallel CD$  и  $AD \parallel BC$ , то точки  $R_0 = \overline{AB} \cap \overline{CD}$  и  $S_0 = \overline{AD} \cap \overline{BC}$  плоскости  $P_2$  лежат на прямой  $d_1$  (рис. 55). По условию задачи угол  $A$  прямой, следовательно, точки  $R_0, S_0$  являются соответствующими точками в инволюции  $g_1$ . Но отсюда следует, что на плоскости  $E_2$   $BC \perp BA$ ,  $CB \perp CD$  и  $DA \perp DC$ , т. е. углы  $B, C$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  прямые.

**Задача 7.** Прямая  $d$  не имеет общих точек с окружностью  $\omega$ . Доказать, что прямые, соединяющие точки касания касательных, проведенных из любой точки прямой  $d$  к окружности  $\omega$ , проходят через одну и ту же точку.

**Решение.** Рассмотрим данную окружность  $\omega$  как фигуру расширенной плоскости  $\bar{A}_2$ , тогда  $\omega$  — овальная линия. Из точки  $M$

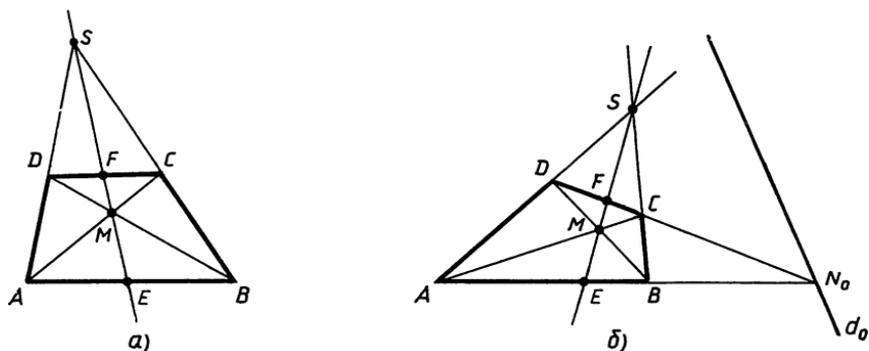


Рис. 56

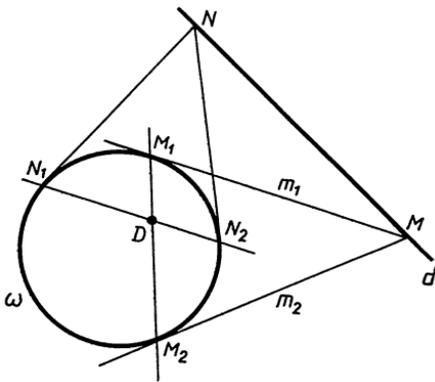


Рис. 57

прямой  $d$  проведем касательные  $m_1$  и  $m_2$  к овальной линии  $\omega$  и обозначим через  $M_1$  и  $M_2$  точки касания (рис. 57). Для другой точки  $N$  прямой  $d$  аналогично получим точки  $N_1$  и  $N_2$  линии  $\omega$ . Прямая  $M_1M_2$  — полярная точка  $M$ , а прямая  $N_1N_2$  — полярная точка  $N$  относительно овальной линии  $\omega$ . Точка  $D$  пересечения прямых  $M_1M_2$  и  $N_1N_2$  является полюсом прямой  $d$ . По теореме взаимности полярности полярная точка любой точки  $d$  проходит через точку  $D$ .

**З а д а ч а 8.** Через точку  $A$ , лежащую вне окружности, проведены две секущие  $d_1$  и  $d_2$ , которые пересекают окружность в точках  $M_1, N_1$  и  $M_2, N_2$ , и две касательные  $AT_1$  и  $AT_2$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — точки касания (рис. 58). Доказать, что точки  $T_1, T_2, X = M_1N_2 \cap M_2N_1$  и  $Y = M_1M_2 \cap N_1N_2$  лежат на одной прямой.

**Р е ш е н и е.** Рассмотрим данную окружность  $\omega$  как фигуру плоскости  $E_2$ , тогда  $\omega$  — овальная линия проективной плоскости  $P_2$ , а  $\overline{T_1T_2}$  — полярная точка  $A$ .

Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — точки пересечения прямой  $\overline{XY}$  соответственно с прямыми  $\overline{M_1N_1}$  и  $\overline{M_2N_2}$  (рис. 58). По следствию 1 теоремы § 13  $(M_1N_1, AB_1) = -1$  и  $(M_2N_2, AB_2) = -1$ , поэтому точки  $B_1$  и  $B_2$  лежат на полярной точке  $A$ .

Таким образом,  $T_1, T_2, B_1, B_2$  лежат на одной прямой, следовательно, и  $T_1, T_2, X, Y$  лежат на той же прямой.

**З а м е ч а н и е.** Из задачи 8 следует простой способ решения следующей задачи на построение: через точку  $A$ , лежащую вне данной окружности  $\omega$ , с помощью только линейки провести касательные к окружности  $\omega$ . Через точку  $A$  проводим произвольные секущие  $M_1N_1$  и  $M_2N_2$ , а затем строим точки  $X = M_1N_2 \cap M_2N_1$  и  $Y = M_1M_2 \cap N_1N_2$  (см. рис. 58). Прямая  $XY$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $T_1$  и  $T_2$ ; прямые  $AT_1$  и  $AT_2$  — искомые касательные.

**З а д а ч а 9.** Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболу, заключенный между асимптотами, делится точкой касания пополам (рис. 59, а).

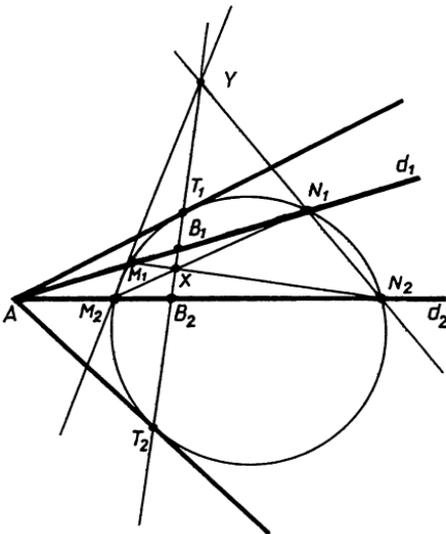


Рис. 58

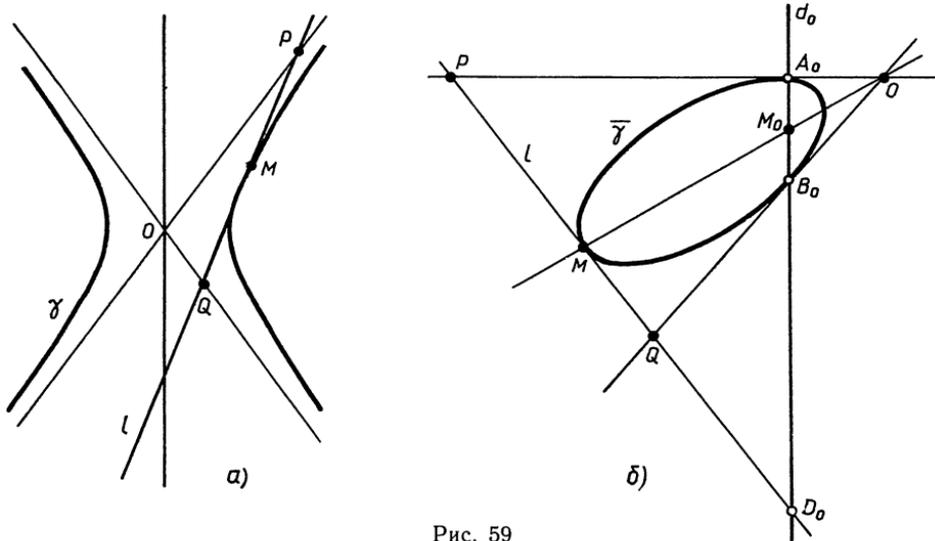


Рис. 59

**Решение.** Рассмотрим данную гиперболу  $\gamma$  как фигуру плоскости  $\bar{A}_2$ . Тогда овальная линия  $\bar{\gamma}$  плоскости  $P_2$ , которой соответствует линия  $\gamma$ , пересекает прямую  $d_0$  в двух точках  $A_0$  и  $B_0$  и касательные в этих точках  $OA_0$  и  $OB_0$  являются асимптотами гиперболы  $\gamma$  (рис. 59, б). На плоскости,  $\bar{A}_2$  данная задача формулируется так: доказать, что касательная  $l$  линии  $\gamma$  в произвольной точке  $M$  пересекает асимптоты  $OA_0$  и  $OB_0$  в точках  $P$  и  $Q$ , удовлетворяющих условию  $(PQ, MD_0) = -1$ , где  $D_0$  — несобственная точка, соответствующая прямой  $l$ .

Так как  $d_0$  — полярная точка  $O$ , то точка  $D_0$  сопряжена с точкой  $O$ . С другой стороны, точка  $D_0$  лежит на касательной к линии  $\gamma$  в точке  $M$ , поэтому она сопряжена с точкой  $M$ . Таким образом,  $OM$  — полярная точка  $D_0$ , поэтому по теореме 2 § 18  $(A_0B_0, M_0D_0) = -1$ . Спроектировав точки  $A_0, B_0, M_0, D_0$  из центра  $O$  на прямую  $l$ , получим  $(PQ, MD_0) = -1$ . По формуле (1) § 22 на плоскости  $A_2$  имеем  $(PQ, M) = 1$ , т. е.  $M$  — середина отрезка  $RQ$ .

В различных областях техники, изобразительном искусстве, архитектуре часто приходится пользоваться изображениями пространственных фигур на плоскости. Учитель математики также пользуется изображениями пространственных фигур при преподавании стереометрии в старших классах средней школы.

Цель настоящей главы — познакомить будущего учителя математики с основными вопросами теории изображений.

### § 26. Параллельное проектирование. Аффинные отображения

Этот параграф носит вспомогательный характер и посвящен некоторым геометрическим вопросам, которые применяются в дальнейшем изложении.

1. Возьмем в евклидовом пространстве  $E_3$  некоторую плоскость  $\sigma$  и какой-нибудь ненулевой вектор  $\vec{p}$ , не параллельный этой плоскости.

Пусть  $\bar{A}$  — произвольная точка пространства. Проведем через эту точку прямую, параллельную вектору  $\vec{p}$ , и обозначим через  $A_0$  точку, в которой эта прямая пересекает плоскость  $\sigma$  (рис. 60). Точка  $A_0$  называется *проекцией точки  $\bar{A}$  на плоскость  $\sigma$  при проектировании параллельно вектору  $\vec{p}$* . Обычно предполагается, что плоскость  $\sigma$  и вектор  $\vec{p}$  заданы, поэтому точку  $A_0$  кратко называют *параллельной проекцией точки  $\bar{A}$* . Если вектор  $\vec{p}$  перпендикулярен к плоскости  $\sigma$ , то точка  $A_0$  называется *ортогональной проекцией точки  $\bar{A}$*  (рис. 61).

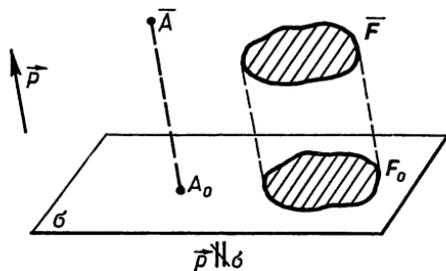


Рис. 60

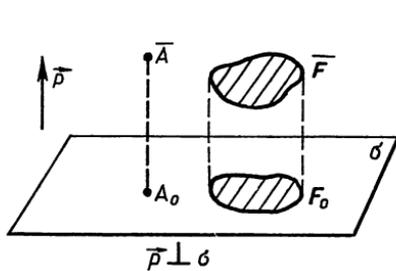


Рис. 61

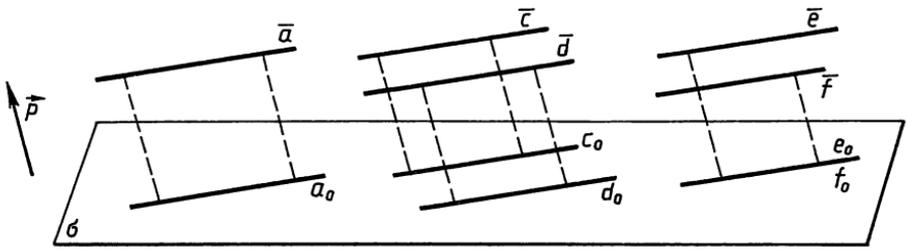


Рис. 62

Множество параллельных проекций всех точек данной фигуры  $\bar{F}$  образует некоторую фигуру  $F_0$ , которая называется *параллельной проекцией фигуры  $\bar{F}$*  (рис. 60). Если вектор  $\vec{p}$  перпендикулярен к плоскости  $\sigma$ , то  $F_0$  называется *ортогональной проекцией фигуры  $\bar{F}$*  (рис. 61).

Отметим основные свойства параллельного проектирования отрезков и прямых. При этом предположим, что рассматриваемые прямые и отрезки не параллельны вектору  $\vec{p}$ , в направлении которого производится проектирование.

1<sup>0</sup>. Проекция<sup>1</sup> прямой есть прямая (рис. 62).

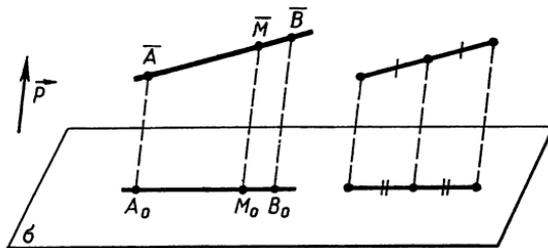
2<sup>0</sup>. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают (рис. 62).

3<sup>0</sup>. Проекция отрезка  $\bar{A}\bar{B}$  есть отрезок  $A_0B_0$ , где  $A_0$  и  $B_0$  — проекции точек  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  (рис. 63).

4<sup>0</sup>. При параллельном проектировании сохраняется простое отношение трех точек; в частности, проекция середины отрезка есть середина проекции отрезка (рис. 63).

5<sup>0</sup>. Проекции параллельных отрезков параллельны или принадлежат одной прямой (рис. 64).

6<sup>0</sup>. Проекции параллельных отрезков или отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам.



$$(\bar{A}\bar{B}, \bar{M}) = (A_0B_0, M_0)$$

Рис. 63

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем слово «проекция» означает «параллельная проекция».

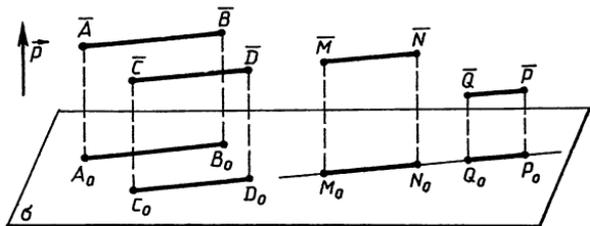


Рис. 64

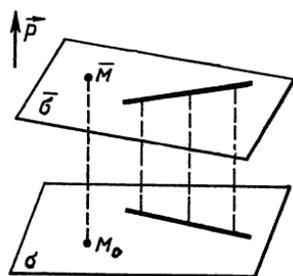


Рис. 65

2. Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие аффинного отображения одной плоскости на другую. Оно является обобщением понятия аффинного преобразования, изученного нами в ч. I, § 48—50.

Пусть  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$  — различные или совпадающие плоскости пространства  $E_3$ . Взаимно однозначное отображение  $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$  называется *аффинным отображением* плоскости  $\bar{\sigma}$  на плоскость  $\sigma$ , если оно любые три точки  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$  плоскости  $\bar{\sigma}$ , лежащие на одной прямой, переводит в три точки  $M_1, M_2, M_3$  плоскости  $\sigma$ , лежащие на одной прямой, и сохраняет их простое отношение, т. е.  $(\bar{M}_1\bar{M}_2, \bar{M}_3) = (M_1M_2, M_3)$ . Отображение  $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$  называется *подобием*, если существует такое число  $k > 0$ , что для любых двух точек  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  плоскости  $\bar{\sigma}$  и их образов  $A$  и  $B$  плоскости  $\sigma$  выполняется равенство  $AB = k\bar{A}\bar{B}$ . Нетрудно доказать, что подобие является аффинным отображением.

Аффинное отображение  $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$  будет, очевидно, аффинным преобразованием, если плоскости  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$  совпадают (см. ч. I, § 48). Таким образом, *аффинные преобразования являются частным случаем аффинных отображений*.

Рассмотрим примеры аффинных отображений.

**Пример 1.** Пусть  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$  — две различные плоскости, а  $\vec{p}$  — ненулевой вектор, не параллельный этим плоскостям (рис. 65). Каждой точке  $\bar{M}$  плоскости  $\bar{\sigma}$  поставим в соответствие ее проекцию  $M_0$  на плоскость  $\sigma$  при проектировании параллельно вектору  $\vec{p}$ . Ясно, что это отображение является взаимно однозначным. Из свойств 1<sup>0</sup> и 4<sup>0</sup> п. 1 следует, что оно является аффинным. Рассмотренное отображение будем называть *параллельным проектированием* плоскости  $\bar{\sigma}$  на плоскость  $\sigma$  по направлению вектора  $\vec{p}$ .

**Пример 2.** Пусть  $f_1: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$  — параллельное проектирование плоскости  $\bar{\sigma}$  на плоскость  $\sigma$ , а  $f_2: \sigma \rightarrow \sigma$  — некоторое аффинное преобразование плоскости  $\sigma$  (в частности, подобие или движение). Тогда отображение  $f_2f_1: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$  будет аффинным отображением. В самом де-

ле, оно является взаимно однозначным и сохраняет прямолинейное расположение трех точек и их простое отношение.

Из рассмотренных примеров следует, что существует бесконечное множество аффинных отображений, отличных от аффинных преобразований.

Все основные свойства аффинных преобразований без труда обобщаются на аффинные отображения. В частности, обобщением теоремы 1, доказанной в ч. I, § 48, является следующая теорема.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  и  $R = (A, B, C)$  — произвольные реперы соответственно плоскостей  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$ . Тогда существует одно и только одно аффинное отображение плоскости  $\bar{\sigma}$  на плоскость  $\sigma$ , которое переводит репер  $\bar{R}$  в репер  $R$ . При этом любая точка  $\bar{M}$  плоскости  $\bar{\sigma}$  с данными координатами в репере  $\bar{R}$  переходит в точку  $M$  плоскости  $\sigma$  с теми же координатами в репере  $R$ .

Доказательство этой теоремы мы опускаем, так как оно получается из доказательства теоремы 1 § 48, ч. I простой заменой слова «преобразование» словом «отображение».

Пользуясь этой теоремой, легко доказать, что в аффинном отображении одной плоскости на другую прямая переходит в прямую, параллельные прямые — в параллельные прямые, полуплоскость переходит в полуплоскость, луч — в луч, отрезок — в отрезок, угол — в угол, а репер — в репер. Отсюда следует, что в аффинном отображении выпуклый (невыпуклый) многоугольник переходит в одноименный выпуклый (невыпуклый) многоугольник.

Фигуры  $\bar{F}$  и  $F$ , лежащие соответственно в плоскостях  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$ , называются *аффинно-эквивалентными*, если существует аффинное отображение  $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ , которое фигуру  $\bar{F}$  переводит в фигуру  $F$ . Если, в частности, существует подобие  $f$ , при котором  $F = f(\bar{F})$ , то фигуры  $\bar{F}$  и  $F$  называются *подобными*.

Из теоремы 1 непосредственно следует, что два произвольных треугольника, лежащие соответственно в плоскостях  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$ , аффинно-эквивалентны. Имеет место теорема.

**Т е о р е м а 2.** Два четырехугольника, лежащие соответственно в плоскостях  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$ , аффинно-эквивалентны тогда и только тогда, когда их можно обозначить буквами  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  и  $ABCD$  так, чтобы

$$(\bar{A}\bar{C}, \bar{E}) = (AC, E), (\bar{B}\bar{D}, \bar{E}) = (BD, E), \quad (1)$$

где  $\bar{E}, E$  — точки пересечения прямых  $\bar{A}\bar{C}, \bar{B}\bar{D}$  и  $AC, BD$  (рис. 66).

Доказательство этой теоремы, по существу, также ничем не отличается от доказательства теоремы 1 § 50, ч. I, поэтому мы его опускаем.

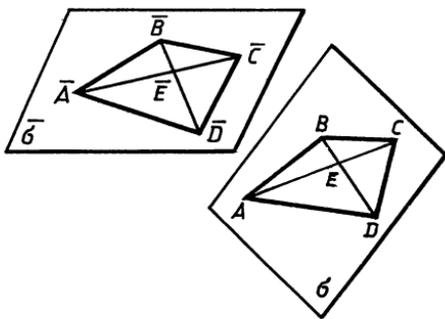


Рис. 66

## § 27. Изображение плоских фигур в параллельной проекции

1. Существуют различные способы изображения на плоскости фигур, расположенных в пространстве. Здесь мы познакомимся с одним из способов, который основан на параллельном проектировании. В школьной практике применяется только этот способ, поскольку полученные таким путем изображения достаточно наглядны и легко могут быть построены.

Выберем некоторую плоскость  $\sigma$  и назовем ее *плоскостью изображений*. Затем возьмем ненулевой вектор  $\vec{p}$ , не параллельный плоскости  $\sigma$ . Направление этого вектора назовем *направлением проектирования*. Пусть  $\bar{F}$  — произвольная фигура (плоская или пространственная), расположенная в пространстве, а  $F_0$  — параллельная проекция этой фигуры на плоскость  $\sigma$ . Фигуру  $\bar{F}$  называют *оригиналом*, а  $F_0$  — *проекцией оригинала*. Любую фигуру  $F$  на плоскости  $\sigma$ , подобную фигуре  $F_0$ , называют *изображением фигуры  $\bar{F}$*  (рис. 67). Построенное таким образом изображение фигуры соответствует ее зрительному восприятию при рассмотрении из точки, расположенной достаточно далеко от фигуры.

Произвол в выборе изображения при данном проектировании (подчеркнем, что *изображением фигуры считается не только ее проекция, но и любая фигура, подобная проекции*) объясняется следующим обстоятельством. Обычно плоскостью изображений служит плоскость листа бумаги (или плоскость классной доски) и проекция оригинала не всегда помещается на этом листе (на доске), а если и помещается, то не всегда удобно расположена. В этих случаях, получив на плоскости  $\sigma$  проекцию  $F_0$  оригинала  $\bar{F}$ , подвергают плоскость  $\sigma$  преобразованию подобия так, чтобы образ  $F$  фигуры  $F_0$  имел удобное расположение и удобные размеры.

Таким образом, изображение фигуры зависит от выбора плоскости изображений  $\sigma$ , направления проектирования и выбранного подобия плоскости  $\sigma$ . Обычно берется такое изображение фигуры, ко-

торое является наиболее наглядным и удобным для выполнения на нем дополнительных построений.

2. Построение изображений фигур с помощью параллельного проектирования основано на свойствах параллельного проектирования и аффинных отображений. Рассмотрим примеры построений изображений плоских фигур, изучаемых в школьном курсе геометрии. При этом без особых оговорок будем предполагать, что плоскости оригинала и изображения пересекаются и что направление проек-

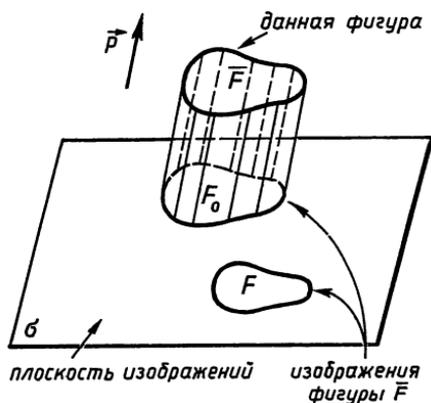


Рис. 67

тирования не параллельно ни одной из этих плоскостей. Эти построения основаны на следующей теореме об изображениях плоских фигур.

**Теорема.** Пусть фигуры  $\bar{F}$  и  $F$  лежат соответственно на пересекающихся плоскостях  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$ . Фигура  $F$  может служить изображением фигуры  $\bar{F}$  тогда и только тогда, когда фигуры  $\bar{F}$  и  $F$  аффинно-эквивалентны.

□ 1) Пусть фигура  $F$  плоскости  $\sigma$  является изображением фигуры  $\bar{F}$  плоскости  $\bar{\sigma}$ . Докажем, что  $\bar{F}$  и  $F$  аффинно-эквивалентны. Рассмотрим проекцию  $F_0$  фигуры  $\bar{F}$ . Так как параллельное проектирование является аффинным отображением, то фигура  $\bar{F}$  аффинно-эквивалентна фигуре  $F_0$ . С другой стороны,  $F_0$  и  $F$  подобны, поэтому они аффинно-эквивалентны. Таким образом, фигуры  $\bar{F}$  и  $F$  аффинно-эквивалентны.

2) Допустим теперь, что фигура  $\bar{F}$  плоскости  $\bar{\sigma}$  аффинно-эквивалентна фигуре  $F$  плоскости  $\sigma$ . Докажем, что фигуру  $\bar{F}$  можно рассматривать как изображение фигуры  $F$ . Так как фигуры  $\bar{F}$  и  $F$  аффинно-эквивалентны, то существует аффинное отображение  $f: \sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ , такое, что  $F = f(\bar{F})$ . Выберем репер  $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  плоскости  $\bar{\sigma}$  так, чтобы точки  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  лежали на линии пересечения плоскостей  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$ , рассмотрим образ  $R = (A, B, C)$  этого репера при отображении  $f$  (рис. 68).

На плоскости  $\sigma$  построим точку  $C_0$  так, чтобы  $\triangle \bar{A}\bar{B}C_0 \sim \triangle ABC$ . Параллельное проектирование  $f_1: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$  по направлению вектора  $\vec{CC}_0$  репер  $\bar{R}$  переводит в репер  $R_0 = (\bar{A}, \bar{B}, C_0)$ . Рассмотрим подобие  $f_2: \sigma \rightarrow \sigma$ , которое репер  $R_0$  переводит в репер  $R$ . Очевидно,  $f_2 f_1: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$  является аффинным отображением, которое репер  $\bar{R}$  переводит в репер  $R$ , и поэтому по теореме 1 §26 совпадает с отображением  $f$ . Таким образом,  $F = f_2 f_1(\bar{F})$ . Но  $F_0 = f_1(\bar{F})$  — параллельная проекция фигуры  $\bar{F}$  на плоскость  $\sigma$ , поэтому  $F = f_2(F_0)$  — изображение фигуры  $\bar{F}$ . ■

3. Используя предыдущую теорему, рассмотрим построение изображений некоторых многоугольников. По теореме об изображениях плоских фигур изображением  $n$ -угольника является фигура, аффинно-эквивалентная оригиналу, т. е.  $n$ -угольник. Следовательно, изображением треугольника является треугольник, четырехугольника — четырехугольник, пятиугольника — пятиугольник и т. д. Однако, как следует из той же теоремы, не любой  $n$ -угольник плоскости  $\sigma$  может служить изображением данного  $n$ -угольника плоскости  $\bar{\sigma}$ . Рассмотрим этот вопрос более подробно для  $n = 3$  и  $n = 4$ .

а) Тр е у г о л ь н и к. Нетрудно видеть, что любой треугольник  $ABC$  плоскости  $\sigma$  может служить изображением данного треуголь-

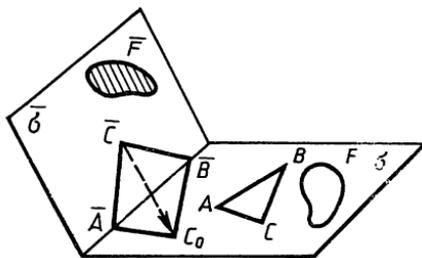


Рис. 68

ника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  плоскости  $\bar{\sigma}$ , если плоскости  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$  пересекаются<sup>1</sup>. В самом деле, по теореме 1 §26 существует аффинное отображение  $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ , которое репер  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  переводит в репер  $(A, B, C)$ , поэтому треугольники  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  и  $ABC$  аффинно-эквивалентны. По предыдущей теореме треугольник  $ABC$  может служить изображением треугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

б) Ч е т ы р е х у г о л ь н и к. По теореме об изображениях плоских фигур любой четырехугольник плоскости  $\sigma$ , аффинно-эквивалентный данному четырехугольнику  $\bar{F}$  плоскости  $\bar{\sigma}$ , может служить его изображением, если плоскости  $\bar{\sigma}$  и  $\sigma$  пересекаются. Из теоремы 2 §26 мы заключаем, что не всякий четырехугольник плоскости  $\sigma$  может служить изображением четырехугольника  $\bar{F}$ . Для построения изображения  $ABCD$  данного четырехугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  в качестве вершин  $A, B$  и  $C$  можно выбрать произвольные три точки, не лежащие на одной прямой. При этом изображение  $D$  четвертой вершины  $\bar{D}$  определяется однозначно из условий (1) §26:

$$(\bar{A}\bar{C}, \bar{E}) = (AC, E), (\bar{B}\bar{D}, \bar{E}) = (BD, E), \quad (1)$$

где  $\bar{E}$  и  $E$  — точки пересечения прямых  $\bar{A}\bar{C}$ ,  $\bar{B}\bar{D}$  и  $AC$ ,  $BD$ .

в) Т р а п е ц и я. Фигурой, аффинно-эквивалентной трапеции, является трапеция, поэтому *изображением трапеции является трапеция*. Условия (1) §26 в случае трапеции означают, что отношение оснований оригинала равно отношению оснований изображения. Итак, трапеция  $F$  плоскости  $\sigma$  является изображением данной трапеции  $\bar{F}$  только в том случае, когда отношение оснований трапеции  $F$  равно отношению оснований данной трапеции  $\bar{F}$ .

г) П а р а л л е л о г р а м м (включая ромб, прямоугольник, квадрат) изображается в виде параллелограмма. Так как любые два параллелограмма аффинно-эквивалентны (§26, теорема 2), то любой параллелограмм плоскости изображения является изображением данного параллелограмма — оригинала. В частности, любой параллелограмм плоскости  $\sigma$  является изображением квадрата плоскости  $\bar{\sigma}$ .

д)  $n$ -У г о л ь н и к, где  $n > 4$ . Из предыдущего изложения следует, что для построения изображения данного  $n$ -угольника при  $n > 4$  три вершины изображения можно выбрать произвольно, а остальные вершины находятся построением.

На рисунке 69 построено изображение пятиугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ . Вершины  $A, B$  и  $C$  выбраны произвольно, а вершины  $D$  и  $E$  найдены построением. Вершина  $D$ , например, построена с использованием условий  $(\bar{B}\bar{D}, \bar{M}) = (BD, M)$ ,  $(\bar{A}\bar{C}, \bar{M}) = (AC, M)$ . На рисунке 70 построено изображение правильного шестиугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$  с центром в точке  $\bar{O}$ . В данном случае удобнее брать произвольные точки

<sup>1</sup> Если плоскости  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$  параллельны, то это утверждение неверно, так как в этом случае  $\triangle ABC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

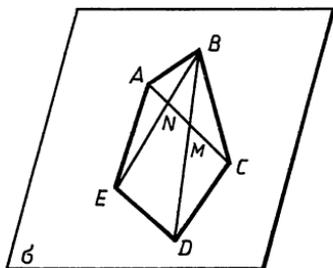
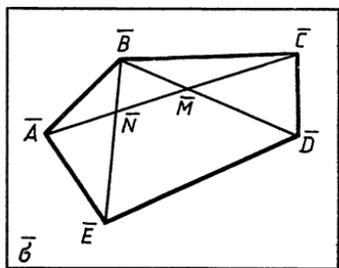


Рис. 69

$A, B, O$ . Точку  $D$  строим как точку, симметричную точке  $A$  относительно точки  $O$ . Для построения точки  $C$  строим прямые  $BC$  и  $DC$  из условий  $BC \parallel AO, DC \parallel BO$ . Точки  $E$  и  $F$  строим как точки, симметричные точкам  $B$  и  $C$  относительно точки  $O$ .

4. Построение изображения окружности основано на следующем утверждении.

*Л е м м а. В любом аффинном отображении эллипс (в частности, окружность) переходит в эллипс.*

□ Пусть в аффинном отображении  $f: \bar{\sigma} \rightarrow \sigma$  эллипс  $\bar{\gamma}$  плоскости  $\bar{\sigma}$ , заданный в ортонормированном репере  $\bar{R}$  уравнением

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

переходит в линию  $\gamma$  плоскости  $\sigma$ . Если  $R$  — образ репера  $\bar{R}$  (заметим, что  $R$ , вообще говоря, аффинный репер!), то по теореме 1 §26 линия  $\gamma$  в репере  $R$  имеет то же уравнение (2). Для этой линии второго порядка  $\Delta = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$ , поэтому она принадлежит эллиптическому типу, т. е. не имеет асимптотических направлений (ч. I, §32). Но линия  $\gamma$  содержит более чем одну действительную точку, поэтому  $\gamma$  — эллипс. ■

Из этой леммы, учитывая предыдущую теорему, мы заключаем, что *изображением данной окружности является эллипс*. При этом изображением центра окружности является центр эллипса, а изображением взаимно перпендикулярных диаметров — сопряженные диаметры эллипса.

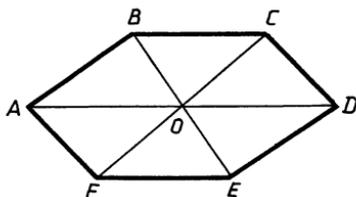
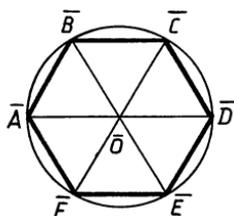


Рис. 70

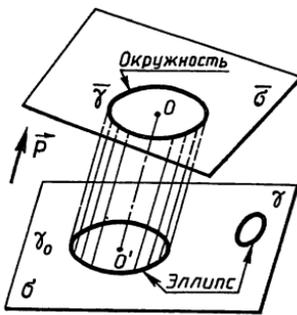


Рис. 71

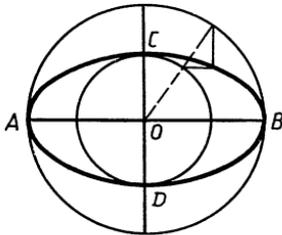


Рис. 72

Докажем, что *любой эллипс  $\gamma$  на плоскости изображений  $\sigma$  может служить изображением окружности  $\bar{\gamma}$  плоскости  $\bar{\sigma}$* . Пусть  $\gamma_0$  — какая-нибудь параллельная проекция на плоскость  $\sigma$  окружности  $\bar{\gamma}$  (рис. 71). Очевидно,  $\gamma_0$  — эллипс, аффинно-эквивалентный окружности  $\bar{\gamma}$ . С другой стороны, эллипсы  $\gamma_0$  и  $\gamma$  плоскости  $\sigma$  аффинно-эквивалентны (ч. I, § 50, теорема 2), поэтому  $\bar{\gamma}$  и  $\gamma$  — аффинно-эквивалентны. По теореме об изображениях плоских фигур линия  $\gamma$  может служить изображением данной окружности.

Таким образом, построение изображения данной окружности сводится к построению какого-нибудь эллипса на плоскости  $\sigma$ . Эллипс обычно задается двумя хордами  $AB$  и  $CD$ , принадлежащими сопряженным диаметрам. Их общей серединой является центр  $O$  эллипса. Если хорды  $AB$  и  $CD$  взаимно перпендикулярны, то они являются осями эллипса и для построения с помощью циркуля и линейки точек эллипса можно воспользоваться способом, описанным в ч. I, § 27, п. 5 (рис. 72).

Если хорды  $AB$  и  $CD$  эллипса  $\gamma$ , принадлежащие сопряженным диаметрам, не перпендикулярны, то для построения точек эллипса можно пользоваться способом, который показан на рисунке 73, а. На этом рисунке  $A_1B_1B_2A_2$  — параллелограмм,  $A_1B_1 \parallel AB$  и  $B_1B_2 \parallel CD$ . Каждая из сторон  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  разделена на  $2n$  равных частей (на рис. 73, а  $n = 3$ ), и на столько же равных частей разделен отрезок  $CD$ . Для построения точек эллипса, принадлежащих параллелограмму  $AA_1B_1B$ , точки деления ломаной  $OCB_1$  перенумерованы по часовой стрелке номерами 1, 2, 3, ..., а точки деления ломаной

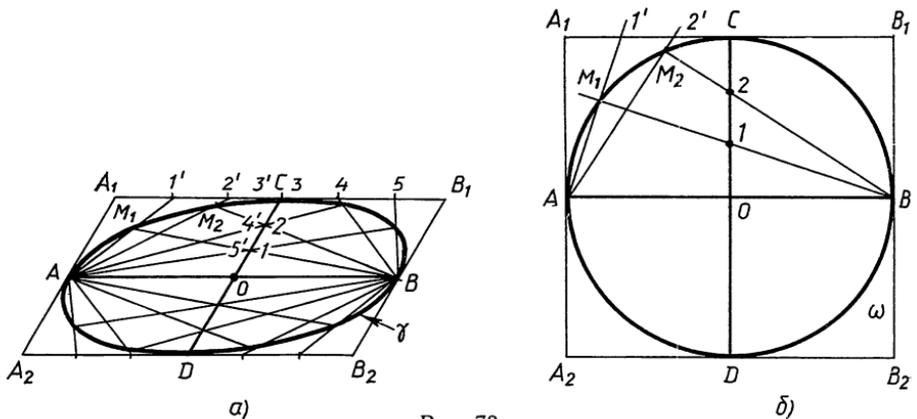


Рис. 73

$A_1CO$  — по часовой стрелке номерами  $1', 2', \dots$ . Точки  $M_1, M_2, \dots$  пересечения лучей  $B_1$  и  $A_1', B_2$  и  $A_2'$  и т. д. лежат на эллипсе  $\gamma$ . Аналогично строятся точки эллипса, принадлежащие параллелограмму  $A_2B_2BA$ .

Для обоснования указанного нами способа построения точек эллипса  $\gamma$  рассмотрим частный случай, изображенный на рисунке 73, б. На этом рисунке  $AB = CD$  и  $AB \perp CD$ , поэтому  $A_1B_1B_2A_2$  — квадрат. В данном случае легко доказать, что точки  $M_1, M_2, \dots$  лежат на окружности  $\omega$ , построенной на отрезке  $AB$  как на диаметре. Докажем, например, что  $M_1 \in \omega$  (см. рис. 73, б). Так как треугольники  $OB_1$  и  $A_1A_1'$  равны по двум катетам, то  $\angle ABM_1 = \angle A_1AM_1$ , поэтому  $\angle ABM_1 + \angle BAM_1 = 90^\circ$ . Отсюда следует, что  $\angle AM_1B$  прямой, поэтому  $M_1 \in \omega$ .

Фигуры, изображенные на рисунках 73, б и 73, а аффинно-эквивалентны, поэтому на рисунке 73, а точки  $M_1, M_2, \dots$  принадлежат эллипсу  $\gamma$ .

## § 28. Изображение многогранников в параллельной проекции

**1. Л е м м а.** Пусть четырехугольники  $A_1B_1C_1D_1$  и  $ABCD$ , лежащие соответственно в плоскостях  $\sigma_1$  и  $\sigma$ , аффинно-эквивалентны<sup>1</sup>. Тогда существует такая плоскость  $\sigma_0$ , что проекция четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  на эту плоскость по направлению вектора, ортогонального к плоскости  $\sigma_1$ , подобна четырехугольнику  $ABCD$ .

□ По условию леммы существует аффинное отображение  $f: \sigma \rightarrow \sigma_1$ , которое четырехугольник  $ABCD$  переводит в четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$ . Рассмотрим некоторую окружность  $\gamma$  плоскости  $\sigma$  и ее образ  $\gamma_1 = f(\gamma)$ . Если  $\gamma_1$  — окружность, то  $f$  —

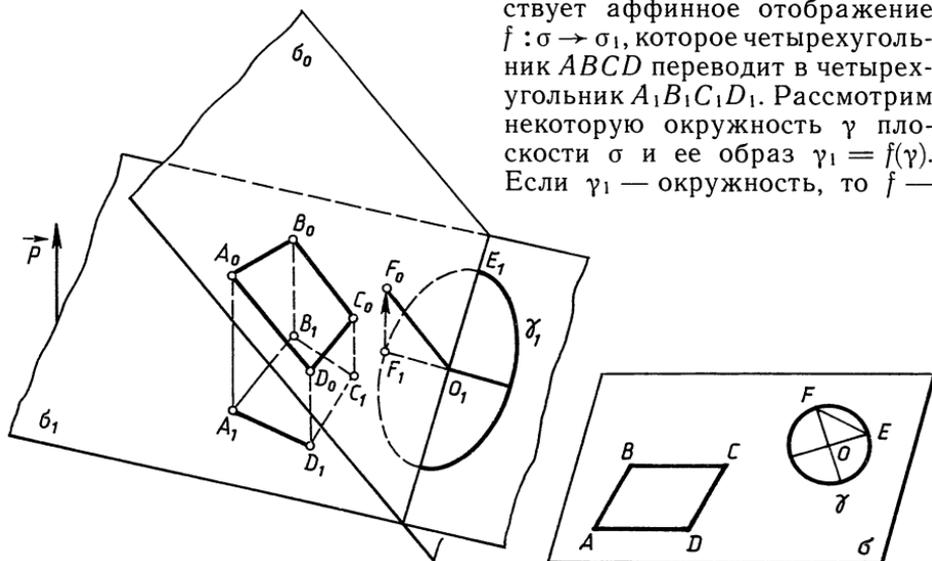


Рис. 74

<sup>1</sup> Здесь учитывается порядок вершин, в котором записаны данные четырехугольники, т. е. предполагается, что существует аффинное отображение  $f: \sigma \rightarrow \sigma_1$ , такое, что  $A_1 = f(A)$ ,  $B_1 = f(B)$ ,  $C_1 = f(C)$  и  $D_1 = f(D)$ .

подобие (предлагаем читателю обосновать это утверждение самостоятельно). Следовательно,  $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$  и лемма очевидна, так как в этом случае за плоскость  $\sigma_0$  можно взять саму плоскость  $\sigma_1$ .

Рассмотрим случай, когда  $\gamma_1$  — эллипс с неравными полуосями  $O_1E_1, O_1F_1$ , где  $O_1E_1 > O_1F_1$  (рис. 74). Обозначим через  $O, E$  и  $F$  прообразы точек  $O_1, E_1, F_1$ . Так как  $O_1E_1$  и  $O_1F_1$  — сопряженные диаметры эллипса  $\gamma_1$ , то  $OE$  и  $OF$  — перпендикулярные радиусы окружности  $\gamma$ .

Проведем отрезок  $F_1F_0$ , перпендикулярный к плоскости  $\sigma_1$ , так, чтобы  $O_1F_0 = O_1E_1$ , и обозначим через  $\sigma_0$  плоскость  $O_1E_1F_0$ . Рассмотрим параллельное проектирование  $f_0: \sigma_1 \rightarrow \sigma_0$  по направлению вектора  $\overrightarrow{F_1F_0}$ . Отображение  $f_0f: \sigma \rightarrow \sigma_0$  является аффинным и переводит репер  $(O, E, F)$  в репер  $(O_1, E_1, F_0)$ . Так как  $OEF$  и  $O_1E_1F_0$  — прямоугольные равнобедренные треугольники, то они подобны, поэтому  $f_0f: \sigma \rightarrow \sigma_0$  — подобие. Таким образом, проекция четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  на плоскость  $\sigma_0$  по направлению вектора  $\overrightarrow{F_1F_0}$  (т. е. четырехугольник  $A_0B_0C_0D_0$  на рис. 74) подобна четырехугольнику  $ABCD$ . ■

Теперь докажем следующую основную теорему.

**Т е о р е м а** (Польке — Шварца). *Вершины любого четырехугольника  $ABCD$  плоскости  $\sigma$ , заданные в определенном порядке, могут служить изображением аффинного репера, равного данному реперу  $R^* = (A^*, B^*, C^*, D^*)$ .*

□ На прямых  $A^*C^*$  и  $B^*D^*$  возьмем точки  $M^*$  и  $N^*$  так, чтобы  $(A^*C^*, M^*) = (AC, E)$  и  $(B^*D^*, N^*) = (BD, E)$ . Здесь  $E$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD$  (рис. 75). Проведем какую-нибудь плоскость  $\sigma_1$ , перпендикулярную к прямой  $M^*N^*$ , и рассмотрим ортогональную проекцию  $A_1B_1C_1D_1$  репера  $R^*$  на эту плоскость. Точки  $M^*$  и  $N^*$  проектируются в одну и ту же точку  $E_1$  (рис. 75). Так

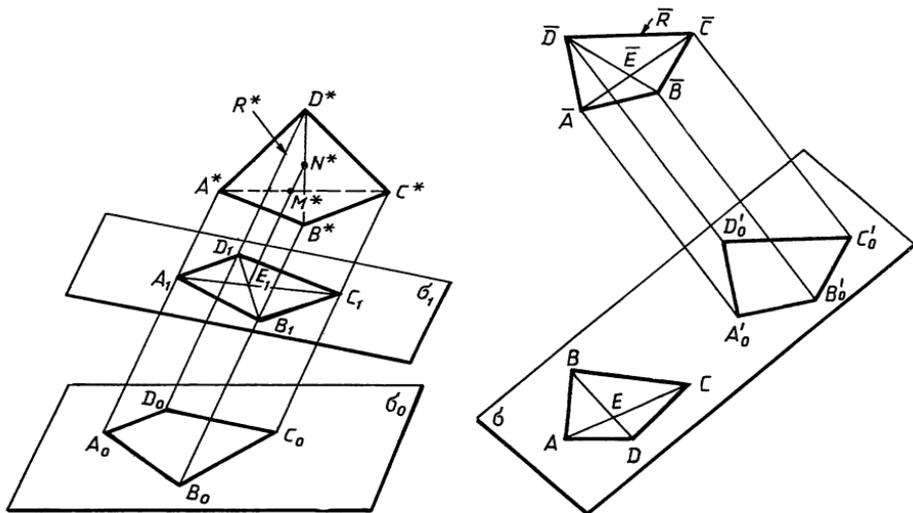


Рис. 75

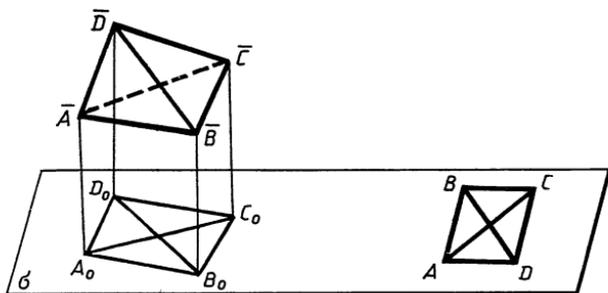


Рис. 76

как  $(A_1C_1, E_1) = (A^*C^*, M^*) = (AC, E)$  и  $(B_1D_1, E_1) = (B^*D^*, N^*) = (BD, E)$ , то четырехугольники  $A_1B_1C_1D_1$  и  $ABCD$  аффинно-эквивалентны (§ 26, теорема 2).

По предыдущей лемме существует такая плоскость  $\sigma_0$ , что проекция  $A_0B_0C_0D_0$  четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  на эту плоскость по направлению вектора  $\overrightarrow{M^*N^*}$  подобна четырехугольнику  $ABCD$ . Заметим, что точки  $A^*$ ,  $A_1$ ,  $A_0$  лежат на одной прямой, перпендикулярной к плоскости  $\sigma_1$ , поэтому точка  $A_0$  — параллельная проекция точки  $A^*$  на плоскость  $\sigma_0$  по направлению вектора  $\overrightarrow{M^*N^*}$ . Аналогично точки  $B_0$ ,  $C_0$  и  $D_0$  являются параллельными проекциями точек  $B^*$ ,  $C^*$  и  $D^*$  на эту же плоскость, т. е. четырехугольник  $A_0B_0C_0D_0$  — параллельная проекция репера  $R^*$  на плоскость  $\sigma_0$ .

Рассмотрим какое-нибудь движение трехмерного пространства, в котором плоскость  $\sigma_0$  переходит в плоскость  $\sigma$ . Обозначим через  $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  образ репера  $R^*$ , а через  $A_0B_0C_0D_0$  образ четырехугольника  $A_0B_0C_0D_0$  в этом движении. Мы видим, что проекция  $A_0B_0C_0D_0$  репера  $\bar{R}$  на плоскость  $\sigma$  подобна данному четырехугольнику  $ABCD$ , т. е.  $ABCD$  — изображение репера  $\bar{R}$ , равного данному реперу  $R^*$ . ■

2. Рассмотрим теперь на плоскости  $\sigma$  изображения некоторых многогранников, изучаемых в средней школе. Мы предполагаем, что ни одна из плоскостей граней многогранника не параллельна направлению проектирования.

В теории изображений мы учитываем, что многогранник полностью определяется своей поверхностью, составленной из многоугольников (грани многогранника). Эта поверхность ограничивает многогранник как геометрическое тело. Под изображением многогранника будем понимать фигуру, состоящую из изображений всех его граней (или, что, по существу, то же самое, всех его ребер). Для большей наглядности невидимые ребра многогранника изображают пунктирными линиями.

а) Т е т р а э д р. Пусть  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  — тетраэдр-оригинал.  $A_0, B_0, C_0, D_0$  — проекции его вершин, а  $A, B, C$  и  $D$  — изображения его вершин (рис. 76). Тогда фигура, состоящая из треугольников  $ABC, ABD, ACD$  и  $BCD$ , и будет изображением этого тетраэдра. Другими слова-

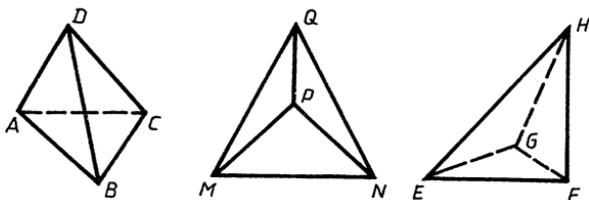


Рис. 77

ми, изображением тетраэдра  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  является фигура, состоящая из всех сторон и диагоналей четырехугольника  $ABCD$ .

Из теоремы Польке — Шварца следует важный вывод: *вершины произвольного четырехугольника плоскости  $\sigma$  могут служить изображением вершин тетраэдра, равно данному тетраэдру*. Поэтому если задан тетраэдр, то для его изображения достаточно начертить на плоскости  $\sigma$  произвольный четырехугольник и провести его диагонали. На рисунке 77 изображено несколько тетраэдров. Для большей наглядности невидимые линии изображены пунктиром. Заметим, что на этом рисунке четырехугольник  $ABCD$  выпуклый, а четырехугольники  $MNPQ$  и  $EFGH$  невыпуклые.

б) П а р а л л е л е п и п е д. Изображением параллелепипеда (в том числе прямоугольного параллелепипеда, куба) является фигура, состоящая из трех пар параллелограммов, причем в каждой паре один получается из другого параллельным переносом (рис. 78).

Для того чтобы построить изображение данного параллелепипеда  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'\bar{D}'$ , следует учесть, что, например, точки  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{D}$  и  $\bar{A}'$  являются вершинами тетраэдра (рис. 79, а), поэтому по теореме Польке — Шварца в качестве их изображений можно выбрать вершины произвольного четырехугольника  $ABDA'$  плоскости  $\sigma$ . Изображения же остальных вершин получаются построением с учетом того, что изображениями граней параллелепипеда являются параллелограммы (рис. 79, б).

в) П р и з м а. Изображением  $n$ -угольной призмы на плоскости  $\sigma$  является фигура, состоящая из двух равных  $n$ -угольников (один получается из другого параллельным переносом), изображающих

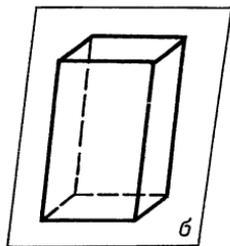


Рис. 78

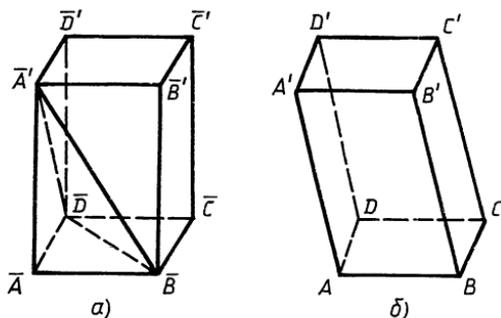


Рис. 79

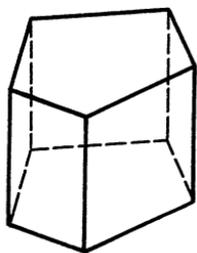


Рис. 80

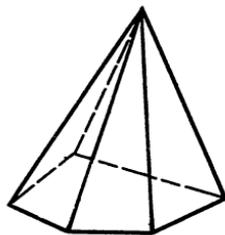
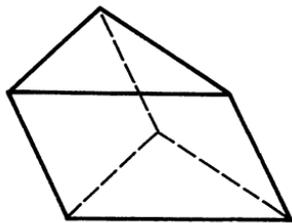


Рис. 81

основания призмы, и  $n$  параллелограммов, для каждого из которых противоположными сторонами являются изображения параллельных сторон оснований (рис. 80).

Построение изображения данной призмы выполняется аналогично построению изображения параллелепипеда. Основания призмы изображаются на чертеже с учетом правил изображений плоских многоугольников.

г) П и р а м и д а. Изображением пирамиды является фигура, состоящая из многоугольника, изображающего основание пирамиды-оригинала, и нескольких треугольников с общей вершиной, изображающих боковые грани пирамиды (рис. 81).

Для построения изображения данной пирамиды следует учесть, что по теореме Польке — Шварца за изображение вершины пирамиды и трех вершин основания можно взять вершины произвольного четырехугольника плоскости  $\sigma$ . Тогда изображения остальных вершин основания и всех ребер получаются построением с учетом правил изображений плоских многоугольников. Например, на рисунке 82 изображена четырехугольная пирамида, основанием которой является прямоугольник. Точки  $S$ ,  $A$ ,  $B$  и  $D$  являются вершинами произвольного четырехугольника, а точка  $C$  построена так, чтобы  $ABCD$  был параллелограммом.

З а м е ч а н и е. Иногда на практике приходится строить более сложные многогранники. Для построения такого многогранника аналогично предыдущему за изображение четырех вершин (трех вершин, принадлежащих одной грани, и еще одной вершины смежной

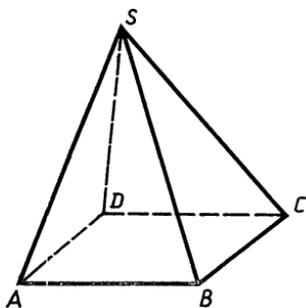


Рис. 82

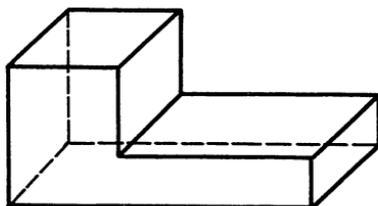


Рис. 83

граней) принимают вершины произвольного четырехугольника плоскости  $\sigma$ , тогда изображения остальных вершин и всех ребер получаются по построению. Например, на рисунке 83 дано изображение более сложного многогранника.

## § 29. Изображения цилиндра, конуса и шара

В этом параграфе рассматриваются изображения цилиндра, конуса и шара, т. е. тех простейших геометрических тел, отличных от многогранников, которые изучаются в курсе стереометрии средней школы<sup>1</sup>. Поэтому термины «цилиндр» и «конус» здесь употребляются в том же смысле, что и в школе, т. е. цилиндр — это геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью вращения (ч. I, § 75) и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси поверхности. Аналогично конус — это геометрическое тело, ограниченное круговой конической поверхностью (ч. I, § 77) и плоскостью, не проходящей через вершину и перпендикулярной к оси поверхности.

**1. Цилиндр.** Пусть данный цилиндр-оригинал  $\bar{F}$  расположен так, что его ось  $\bar{O}\bar{O}_1$  параллельна плоскости изображения  $\sigma$ . Направление проектирования выбрано следующим образом: оно не параллельно плоскостям оснований цилиндра, но параллельно плоскости, проходящей через ось цилиндра перпендикулярно к плоскости  $\sigma$ . Такой выбор направления проектирования объясняется требованием наглядности изображения. В самом деле, если, например, направление проектирования выбрать параллельно плоскостям оснований, то при указанном расположении оригинала цилиндр спроектируется в прямоугольник и изображение не будет наглядным.

Выясним, как изображается цилиндр  $\bar{F}$  при выбранном нами проектировании. Пусть  $\bar{\gamma}$  — окружность верхнего основания цилиндра  $\bar{F}$ , а  $\bar{A}\bar{B}$  и  $\bar{C}\bar{D}$  — взаимно перпендикулярные диаметры этой окруж-

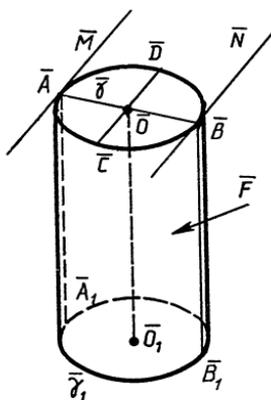


Рис. 84

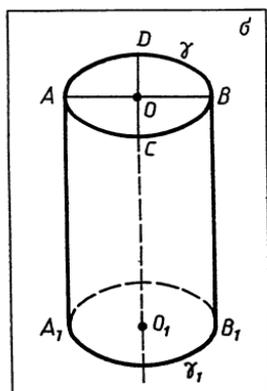


Рис. 85

<sup>1</sup> В этом параграфе для простоты изложения будем считать, что изображением фигуры является ее проекция на плоскость изображений  $\sigma$ .



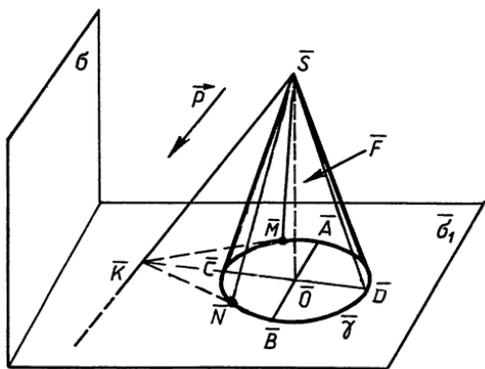


Рис. 87

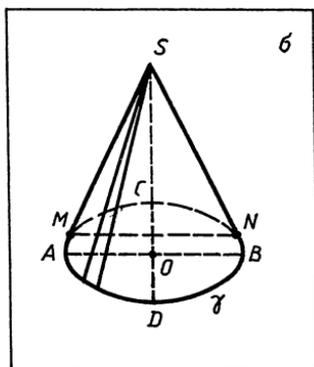


Рис. 88

вания, причем  $\bar{O}\bar{K} > \bar{O}\bar{S}$  (рис. 87); б) плоскость  $\bar{O}\bar{S}\bar{K}$  была перпендикулярна к плоскости  $\sigma$ .

Выясним, как изображается конус при таком проектировании. Пусть  $\bar{A}\bar{B}$  и  $\bar{C}\bar{D}$  — взаимно перпендикулярные диаметры окружности основания  $\bar{\gamma}$ , причем  $\bar{A}\bar{B} \parallel \sigma$ . Проведем касательные  $\bar{K}\bar{M}$  и  $\bar{K}\bar{N}$  к окружности  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  — точки касания (рис. 87), и рассмотрим образующие  $\bar{S}\bar{M}$  и  $\bar{S}\bar{N}$  конуса  $\bar{F}$  (так называемые *контурные образующие*). При проектировании конуса на плоскость  $\sigma$  окружность  $\bar{\gamma}$  проектируется в эллипс  $\gamma$  с осями  $AB$  и  $CD$ , а вершина  $\bar{S}$  — в точку  $S$ , расположенную вне эллипса  $\gamma$  (рис. 88). Отрезки  $AB$  и  $CD$  являются проекциями диаметров  $\bar{A}\bar{B}$  и  $\bar{C}\bar{D}$  окружности  $\bar{\gamma}$ . В силу условия  $\bar{O}\bar{K} > \bar{O}\bar{S}$  имеем  $AB > CD^1$ , т. е.  $AB$  — большая ось эллипса  $\gamma$ , а  $CD$  — малая; отрезок  $CD$  принадлежит проекции  $SO$  оси конуса (см. рис. 88).

Так как плоскость  $\bar{S}\bar{M}\bar{K}$  параллельна направлению проектирования, то проекции прямых  $\bar{S}\bar{M}$  и  $\bar{M}\bar{K}$  совпадают. Поэтому проекция  $SM$  контурной образующей  $\bar{S}\bar{M}$  является касательной к эллипсу  $\gamma$  в точке  $M$  (рис. 88). Аналогично проекция  $SN$  другой контурной образующей является касательной к этому эллипсу в точке  $N$ . Так как  $\bar{K}\bar{M}$  и  $\bar{K}\bar{N}$  — касательные к окружности  $\bar{\gamma}$ , то  $\bar{M}\bar{N} \perp \bar{O}\bar{K}$ . С другой стороны,  $\bar{A}\bar{B} \perp \bar{O}\bar{K}$ , поэтому  $\bar{M}\bar{N} \parallel \bar{A}\bar{B}$ . Отсюда следует, что хорда  $MN$  эллипса  $\gamma$  параллельна оси  $AB$  и, следовательно, не проходит через центр эллипса. На рисунке 88 выполнено изображение конуса.

**3. Шар.** Пусть  $\bar{F}$  — шар, а  $F_0$  — параллельная проекция этого шара на плоскость изображения. Все прямые, касательные к шару и имеющие направление проектирования, образуют цилиндрическую поверхность вращения, которая пересекается с плоскостью  $\sigma$  по эллипсу  $\gamma_0$  (рис. 89). Эта линия называется *очертанием шара*. Ясно, что проекция  $F_0$  шара на плоскость  $\sigma$  есть часть плоскости, которая

<sup>1</sup> Обоснование этого утверждения аналогично случаю цилиндра (с. 107).

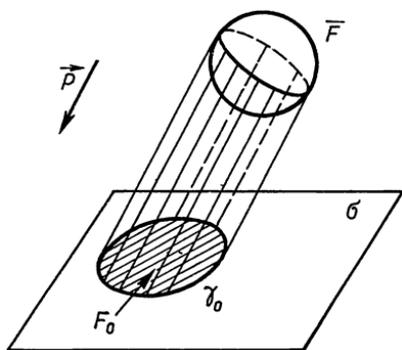


Рис. 89

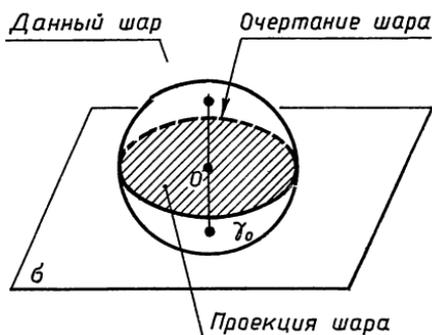


Рис. 90

ограничена очертанием шара (на рис. 89 фигура  $F_0$  заштрихована).

Если направление проектирования не перпендикулярно к плоскости  $\sigma$ , то  $\gamma_0$  — эллипс, отличный от окружности, поэтому проекция  $F_0$  шара (а также любая фигура  $F$ , подобная ей) не является наглядным изображением шара. Если же направление проектирования перпендикулярно к плоскости  $\sigma$ , т. е.  $F_0$  — ортогональная проекция шара, то  $\gamma_0$  — окружность. В этом случае проекция  $F_0$  шара есть круг, поэтому изображение шара является наглядным, так как любая фигура  $F$ , подобная кругу  $F_0$ , есть круг. В силу этого во всех случаях, когда требуется изобразить шар, мы будем пользоваться ортогональной проекцией. Не нарушая общности, будем считать, что плоскость  $\sigma$  проходит через центр шара, а очертание  $\gamma_0$  шара — окружность большого круга (рис. 90).

Чтобы изображение шара сделать более наглядным, изображают обычно, кроме его очертания, еще какую-либо окружность большого круга — *экватор*, а также точки пересечения диаметра шара, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью шара — *полюсы*, соответствующие экватору. При этом плоскость экватора берут не перпендикулярно к плоскости  $\sigma$ , так как в противном случае окружность большого круга изобразится отрезком, а полюсы окажутся на очертании шара и изображение шара не станет нагляднее (рис. 91: на этом рисунке  $AB$  — изображение экватора, а  $M$  и  $N$  — изображения полюсов). Таким изображением не пользуются.

Рассмотрим вопрос об изображении экватора и полюсов, соответствующих этому экватору. Пусть  $\bar{\gamma}_1$  — экватор,  $\bar{\sigma}_1$  — его плоскость, а  $\gamma_1$  — проекция этого экватора на плоскость  $\sigma$ , т. е. эллипс. Проведем диаметр  $AB$  экватора  $\bar{\gamma}_1$ , лежащий на прямой  $\bar{\sigma}_1 \cap \sigma$ , и перпендикулярный к нему диаметр  $\bar{C}\bar{D}$  (рис. 92: на этом рисунке данная сфера и линии  $\bar{\gamma}_1$  и  $\gamma_1$  не изображены). Так как эллипс  $\gamma_1$  является ортогональной проекцией экватора  $\bar{\gamma}_1$  на плоскость  $\sigma$ , то отрезок  $AB$  — большая ось этого эллипса, а отрезок  $CD$  (проекция отрезка  $\bar{C}\bar{D}$  на пло-

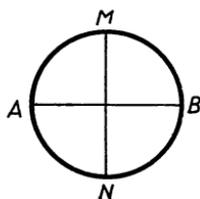


Рис. 91

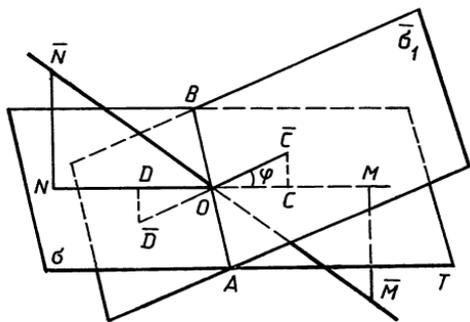


Рис. 92

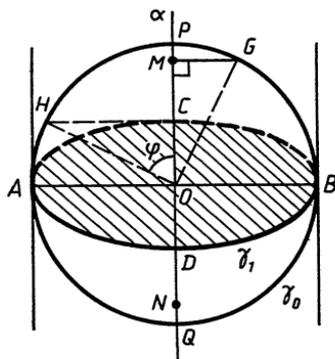


Рис. 93

ось  $\sigma$ ) — малая ось. Но  $AB$  также диаметр очертания  $\gamma_0$  шара, поэтому эллипс  $\gamma_1$  и очертание шара имеют общие касательные в точках  $A$  и  $B$  (рис. 93).

Итак, если на плоскости изображений  $\sigma$  дано очертание  $\gamma_0$  шара с центром  $O$ , то для построения проекции экватора, т. е. эллипса  $\gamma_1$ , достаточно провести диаметр  $AB$  окружности  $\gamma_0$ , построить серединный перпендикуляр этого отрезка и на нем отложить отрезок  $CD$  так, чтобы точка  $O$  была серединой этого отрезка. Тогда эллипс, построенный на осях  $AB$  и  $CD$ , и будет искомым эллипсом (рис. 93). Отрезок  $CD$  можно выбрать произвольно при условии, что  $CD < AB$ . В самом деле, как видно из рисунка 92,

$$OC = R \cos \varphi, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус шара  $\bar{F}$ ,  $O$  — его центр, а  $\varphi$  — угол между плоскостями  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}_1$ . Выбирая  $CD$  произвольно ( $CD < AB$ ), по формуле (1) находим  $\varphi$ , т. е. определяем положение плоскости экватора.

Интересно отметить, что угол  $\varphi$  на плоскости изображения имеет простой геометрический смысл. Пусть касательная к эллипсу  $\gamma_1$  в точке  $C$  пересекает окружность  $\gamma_0$  в точке  $H$  (рис. 93). Из прямоугольного треугольника  $OHC$  находим  $OC = R \cos \angle HOC$ . Сравнивая это равенство с формулой (1), мы приходим к выводу, что  $\angle HOC = \varphi$ .

Покажем теперь, как построить проекции  $M$  и  $N$  полюсов  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$ , соответствующих экватору  $\bar{\gamma}_1$ . Так как отрезок  $\bar{M}\bar{N}$  перпендикулярен к плоскости  $\bar{\sigma}_1$ , то  $\bar{M}\bar{N} \perp AB$ , поэтому  $MN \perp AB$ . Отсюда мы заключаем, что точки  $M$  и  $N$  лежат на прямой  $CD$  и расположены симметрично относительно точки  $O$ . Чтобы их построить, заметим, что прямая  $\bar{M}\bar{N}$  образует с плоскостью  $\sigma$  угол  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ , поэтому  $OM = R \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = R \sin \varphi$  (см. рис. 92).

С другой стороны, в прямоугольном треугольнике  $OCH$  на рисунке 93 имеем  $CH = R \sin \varphi$ , поэтому  $OM = CH$ . Итак, отложив на

лучах  $OC$  и  $OD$  от точки  $O$  отрезки  $OM$  и  $ON$ , равные отрезку  $CH$ , получаем точки  $M$  и  $N$ .

В заключение докажем, что произвольные точки  $M$  и  $N$ , лежащие внутри очертания шара и симметричные относительно диаметра  $AB$  и точки  $O$ , можно считать за проекции полюсов, соответствующих некоторому экватору. Для этого обратимся вновь к рисунку 93. Прямоугольный треугольник  $OMG$ , изображенный на нем, равен треугольнику  $OCH$  по гипотенузе и катету, поэтому

$$OC = MG, \quad \angle MGO = \varphi. \quad (2)$$

Если точку  $M$  считать заданной, то по этой формуле находим  $\varphi$  и  $OC$ , т. е. определяем положение плоскости  $\bar{\sigma}_1$  экватора и по осям  $AB$  и  $CD$  строим проекцию экватора, т. е. эллипс  $\gamma_1$ .

**З а м е ч а н и я.** 1. Следует учесть, что если экватор изображен в виде эллипса, то изображения  $M$  и  $N$  полюсов, соответствующих экватору, лежат внутри очертания шара, а не на его очертании (см. рис. 93). Поэтому изображение на рисунке 94, которое, к сожалению, иногда встречается на практике, является неверным. Напомним, что точки  $M$  и  $N$  лежат на очертании шара только в том случае, когда экватор проектируется в виде отрезка (см. рис. 91).

2. При изображении шара мы пользуемся ортогональным проектированием, поэтому если на чертеже, кроме шара, нужно изобразить и другие фигуры, то их изображения также должны быть выполнены в ортогональной проекции.

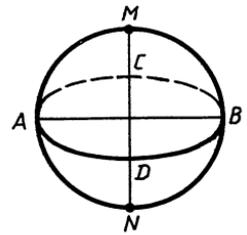


Рис. 94

### § 30. Аксонометрия

1. Введем в пространстве аффинную систему координат  $\vec{O}\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  и рассмотрим соответствующий репер  $\bar{R} = (\bar{O}, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ , где  $\vec{O}\vec{E}_i = \vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Произвольная точка  $\bar{M}$  пространства в этом репере имеет координаты  $x, y, z$ , которые определяются равенством  $\vec{O}\vec{M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ , или

$$\vec{O}\vec{M} = x\vec{O}\vec{E}_1 + y\vec{O}\vec{E}_2 + z\vec{O}\vec{E}_3. \quad (1)$$

Рассмотрим координатную ломаную  $\vec{O}\vec{M}_x\vec{M}_z\vec{M}$  точки  $\bar{M}$  (ч. I, § 52). Здесь  $\vec{M}_z$  — проекция точки  $\bar{M}$  на плоскость  $\vec{O}xy$  по направлению оси  $\vec{O}z$ , а  $\vec{M}_x$  — проекция точки  $\vec{M}_z$  на ось  $\vec{O}x$  по направлению оси  $\vec{O}y$  (рис. 95, а).

Возьмем теперь плоскость  $\sigma$  изображений, выберем направление проектирования так, чтобы оно не было параллельно координатным плоскостям, и спроектируем на эту плоскость репер  $\bar{R}$  и координатную ломаную точки  $\bar{M}$ . Подвергнув затем плоскость  $\sigma$  преобразованию

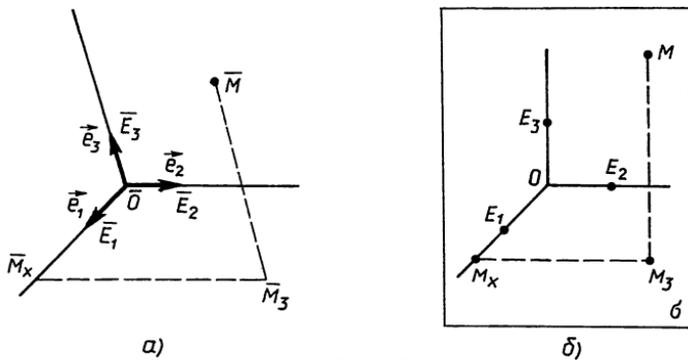


Рис. 95

подобия, получим на ней изображение репера<sup>1</sup>  $\bar{R}$  и координатной ломаной точки  $\bar{M}$ :  $R = (O, E_1, E_2, E_3)$ ,  $OM_x M_3 M$  (рис. 95, б). Докажем, что

$$\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1}, \quad \overrightarrow{M_x M_3} = y\overrightarrow{OE_2}, \quad \overrightarrow{M_3 M} = z\overrightarrow{OE_3}, \quad (2)$$

где  $x, y, z$  — координаты точки  $\bar{M}$  в репере  $\bar{R}$ .

В самом деле, по равенству (1)  $\overrightarrow{O\bar{M}_x} = x\overrightarrow{O\bar{E}_1}$ , поэтому  $x = -(\bar{M}_x \bar{E}_1, \bar{O})$ . При параллельном проектировании и подобии сохраняется простое отношение трех точек, поэтому  $x = -(\bar{M}_x \bar{E}_1, \bar{O}) = -(M_x E_1, O)$ , т. е.  $\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1}$ . Аналогично получаем остальные два равенства в отношениях (2).

Из равенств (2) следует важный вывод: *если на плоскости  $\sigma$  дано изображение  $R$  репера  $\bar{R}$ , то можно построить изображение  $M$  любой точки  $\bar{M}$  по ее координатам в репере  $\bar{R}$* . Для этого на плоскости  $\sigma$  сначала по формулам (2) строим векторы  $\overrightarrow{OM_x}$ ,  $\overrightarrow{M_x M_3}$ ,  $\overrightarrow{M_3 M}$ , а затем строим точку  $M$ , используя равенство  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_x M_3} + \overrightarrow{M_3 M}$ .

Умея указанным образом строить изображения точек пространства, мы можем строить и изображения пространственных фигур. Этот метод называется *методом аксонометрического проектирования* (а к с о н о м е т р и я — измерение по осям) и широко применяется как в инженерно-технической практике, так и в преподавании математики и других естественных дисциплин. Точку  $O$  называют *началом аксонометрической системы координат*, а оси  $OE_1, OE_2, OE_3$  — аксонометрическими осями.

Возникает вопрос: можно ли вершины произвольного четырехугольника плоскости  $\sigma$ , заданные в определенном порядке, рассматривать как изображение данного аффинного репера  $\bar{R}$  пространства? Ответ на этот вопрос дает теорема Польке — Шварца: *верши-*

<sup>1</sup> Фигура  $R = (O, E_1, E_2, E_3)$  не является репером в пространстве;  $R$  — четыре точки общего положения плоскости  $\sigma$ , взятые в определенном порядке (т. е. вершины некоторого четырехугольника, взятые в определенном порядке).

ны любого четырехугольника плоскости изображений, заданные в определенном порядке, могут служить изображением аффинного репера, равного данному реперу  $R$ . Другими словами, на плоскости изображений начало  $O$  и аксонометрические оси  $OE_1, OE_2, OE_3$  можно выбрать произвольно при условии, что  $O, E_1, E_2, E_3$  — точки общего положения.

2. Во многих задачах оказывается удобным в качестве исходного репера  $R^*$  выбрать ортонормированный репер. По теореме Польке — Шварца любые четыре точки общего положения  $O, E_1, E_2, E_3$  плоскости  $\sigma$ , взятые в определенном порядке, можно рассматривать как изображение ортонормированного репера  $\bar{R}$ , равного данному реперу  $R^*$ . В этом случае отрезки  $OE_1, OE_2, OE_3$  называются *аксонометрическими единицами*, а их длины  $e_x, e_y, e_z$  — *коэффициентами искажения*. На практике принято различать следующие виды аксонометрических проекций.

а) *Триметрические проекции* — все три коэффициента искажения различны между собой:  $e_x \neq e_y, e_y \neq e_z, e_z \neq e_x$ .

б) *Диметрические проекции* — два коэффициента искажения равны:  $e_x \neq e_y = e_z$ . В том частном случае, когда  $e_y = e_z, e_x = \frac{1}{2} e_z, \angle E_2OE_3 = 90^\circ, \angle E_1OE_2 = \angle E_1OE_3 = 135^\circ$ , проекция называется *кабинетной*.

в) *Изометрические проекции* — все три коэффициента искажения равны. Если к тому же  $\angle E_2OE_3 = 90^\circ, \angle E_1OE_2 = \angle E_2OE_3 = 135^\circ$ , то проекция называется *кавалерной* или *военной*.

3. Пусть  $R = (O, E_1, E_2, E_3)$  — изображение аффинного репера  $\bar{R}$  пространства, а  $M, M_1, M_2$  и  $M_3$  — изображения данной точки  $\bar{M}$  и ее проекций  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  и  $\bar{M}_3$  на координатные плоскости по направлениям соответствующих координатных осей (рис. 96). Точку  $M$  называют *аксонометрической проекцией* точки  $\bar{M}$ , а точки  $M_1, M_2$  и  $M_3$  — *вторичными проекциями* этой точки. Отметим, что если на плоскости  $\sigma$  задана точка  $M$  и одна из точек  $M_1, M_2, M_3$  (например,  $M_3$ ), то точка  $\bar{M}$  в пространстве вполне определяется. В самом деле, по точкам  $M$  и  $M_3$  мы сможем восстановить ломаную  $OM_xM_3M$  и с ее помощью по формулам (2) найти координаты  $x, y, z$  точки  $\bar{M}$  в репере  $\bar{R}$ . Таким образом, точку  $\bar{M}$  пространства мы можем задать на плоскости  $\sigma$

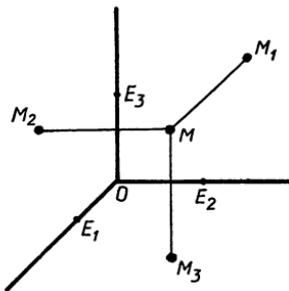


Рис. 96

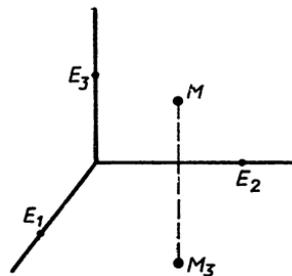


Рис. 97

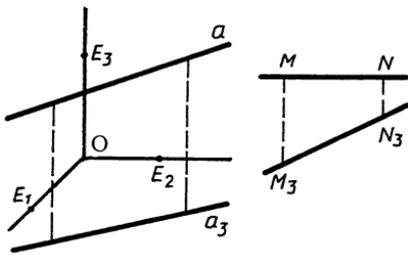


Рис. 98

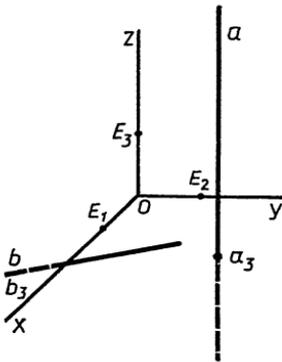


Рис. 99

помощью двух точек ( $M, M_3$ ), которые расположены так, что прямые  $MM_3$  и  $Oz$  параллельны или совпадают (рис. 97). Обратно: любые две точки ( $M, M_3$ ) плоскости  $\sigma$ , расположенные так, что прямые  $MM_3$  и  $Oz$  параллельны или совпадают, определяют в пространстве некоторую точку  $\bar{M}$ , для которой  $M$  — аксонометрическая проекция, а  $M_3$  — вторичная проекция. Точки  $M$  и  $M_3$  совпадают тогда и только тогда, когда точка  $\bar{M}$  лежит в плоскости  $\bar{O}xy$ .

Этот способ и применяется в аксонометрии для задания точек пространства на плоскости изображений<sup>1</sup>. При этом обычно вместо предложения «В пространстве дана точка  $\bar{M}$ , аксонометрическая проекция которой на плоскость  $\sigma$  есть  $M$ , а вторичная проекция — точка  $M_3$ » говорят кратко: «Дана точка ( $M, M_3$ )».

4. Рассмотрим теперь изображения прямых и плоскостей на плоскости  $\sigma$ . Из соображений наглядности будем предполагать, что направ-

ление проектирования не параллельно рассматриваемым прямым и плоскостям. Поэтому аксонометрическая проекция любой прямой есть прямая линия, а аксонометрическая проекция плоскости — вся плоскость  $\sigma$ .

Прямая  $\bar{a}$  пространства на плоскости изображений задается двумя ее точками ( $M, M_3$ ) и ( $N, N_3$ ) или аксонометрической проекцией  $a$  и вторичной проекцией  $a_3$  ( $a_3$  — аксонометрическая проекция прямой  $\bar{a}$ , которая получается проектированием прямой  $\bar{a}$  на плоскость  $\bar{O}xy$  по направлению оси  $\bar{O}z$ ). На рисунке 98 изображены прямые ( $a, a_3$ ) и ( $MN, M_3N_3$ ). Если прямая  $\bar{a}$  не параллельна оси  $\bar{O}z$ , то ее вторичная проекция  $a_3$  есть прямая, в противном случае — точка. На рисунке 99 изображена прямая  $\bar{a}$ , параллельная оси  $\bar{O}z$ . Мы видим, что ее аксонометрическая проекция  $a$  — прямая, параллельная аксонометрической оси  $Oz$ , а вторичная проекция  $a_3$  — точка. Сама ось  $\bar{O}z$  на плоскости  $\sigma$  задается парой ( $Oz, O$ ). Отметим наконец, что аксонометрическая и вторичная проекции прямой совпадают тогда и только тогда, когда прямая  $\bar{a}$  в пространстве лежит в плоскости  $\bar{O}xy$  (прямая ( $b, b_3$ ) на рис. 99).

<sup>1</sup> Очевидно, все сказанное здесь справедливо и в том случае, когда вместо точки  $M_3$  взята другая вторичная проекция, например  $M_1$  или  $M_2$ .

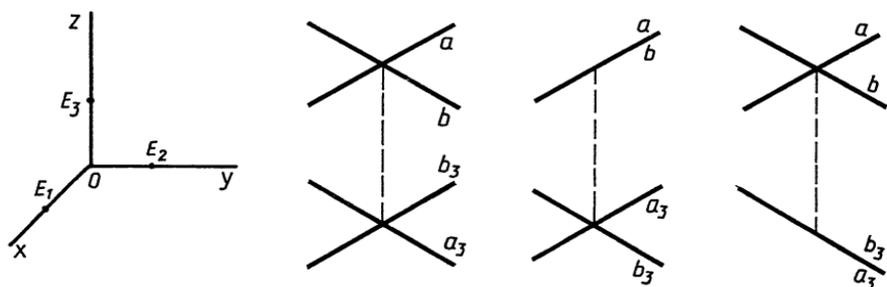


Рис. 100

Выясним взаимное расположение двух прямых  $(a, a_3)$  и  $(b, b_3)$ , не параллельных оси  $\bar{O}z$ . Эти прямые пересекаются тогда и только тогда, когда они имеют единственную общую точку, т. е. когда имеет место один из трех случаев, изображенных на рисунке 100. Прямые  $(a, a_3)$  и  $(b, b_3)$  параллельны тогда и только тогда, когда имеет место один из трех случаев, изображенных на рисунке 101.

Плоскость может быть задана тремя своими точками, не лежащими на одной прямой, или двумя прямыми (пересекающимися или параллельными), или прямой и точкой, не лежащей на ней. Соответственно каждому из этих способов задания плоскости на плоскости  $\sigma$  должны быть даны аксонометрическая и вторичная проекции элементов, с помощью которых дана плоскость.

Рассмотрим примеры решения простейших задач на взаимное расположение прямых и плоскостей. Эти задачи в дальнейшем будут использованы для построений сечений многогранников.

**Задача 1.** Прямая  $(a, a_3)$  лежит в плоскости, заданной тремя точками  $(A, A_3)$ ,  $(B, B_3)$  и  $(C, C_3)$ , не лежащими на одной прямой. По заданной прямой  $a$  построить прямую  $a_3$ .

**Решение.** Найдем сначала точки  $(M, M_3)$  и  $(N, N_3)$ , в которых прямая  $(a, a_3)$  пересекает какие-нибудь две из прямых, соединяющих попарно точки  $(A, A_3)$ ,  $(B, B_3)$  и  $(C, C_3)$ . Точки  $M$  и  $N$  определяются непосредственно из условий задачи (рис. 102). Проведя через точки  $M$  и  $N$  прямые, параллельные оси  $Oz$ , строим точки  $M_3$  и  $N_3$ , а затем и искомую прямую  $a_3$ , которая проходит через эти точки.

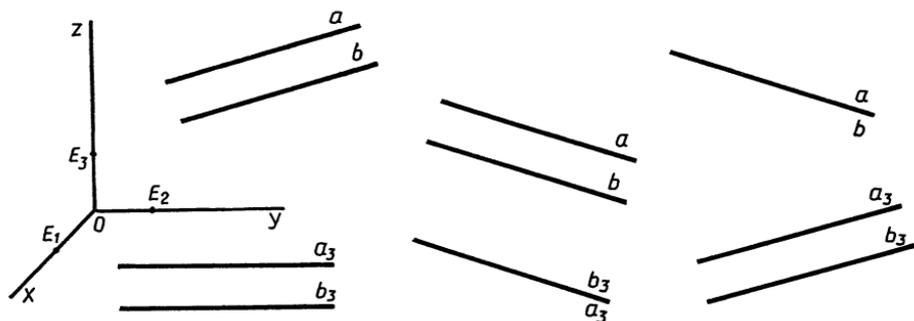


Рис. 101

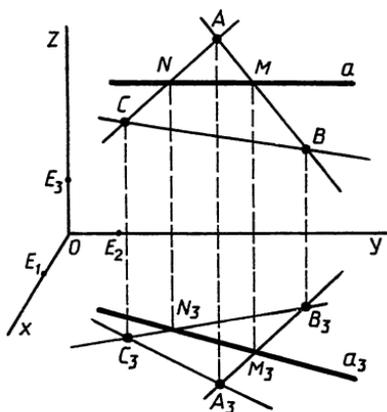


Рис. 102

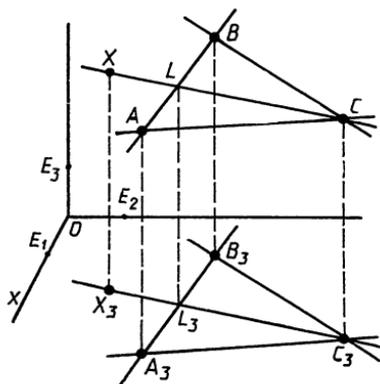


Рис. 103

**З а м е ч а н и е.** По предположению направление проектирования не параллельно плоскости  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , поэтому точки  $A, B$  и  $C$  не лежат на одной прямой и, следовательно, предложенный способ решения задачи всегда выполним.

Если точки  $A_3, B_3$  и  $C_3$  лежат на одной прямой  $p$ , то в случае пересечения прямых  $a$  и  $Oz$ ,  $a_3$  совпадает с прямой  $p$ , в противном случае —  $a_3$  является точкой пересечения прямых  $a$  и  $p$ .

**З а д а ч а 2.** Точка  $(X, X_3)$  лежит в плоскости, заданной тремя точками  $(A, A_3), (B, B_3), (C, C_3)$ , не лежащими на одной прямой. По заданной точке  $X_3$  построить точку  $X$ .

**Р е ш е н и е.** Допустим, что задача решена, т. е. точка  $X$  построена (рис. 103). Рассмотрим в пространстве точку  $\bar{L}$  пересечения прямых  $\bar{A}\bar{B}$  и  $\bar{X}\bar{C}$ . Очевидно, эта точка лежит в плоскости  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ . Ее аксонометрической проекцией является точка  $L = AB \cap XC$ , а вторичной проекцией — точка  $L_3 = A_3B_3 \cap X_3C_3$ . Так как  $A_3, B_3, C_3$  и  $X_3$  — заданные точки, то легко построить точку  $L_3$ , а затем и точку  $L = AB \cap LL_3$ , где  $LL_3 \parallel Oz$ . Проведя прямую  $LC$ , строим на ней точку  $X = LC \cap XX_3$ , где  $XX_3 \parallel Oz$ .

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что если точки  $A_3, B_3, C_3$  лежат на одной прямой  $p$ , то задача не имеет решения, если точка  $X_3$  не лежит на прямой  $p$ , и имеет бесконечное множество решений, если  $X_3$  — точка прямой  $p$ .

**5.** Пусть прямая  $\bar{a}$  пересекает координатную плоскость  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$  в точке  $\bar{A}_0$ . Аксонометрическая проекция  $A_0$  этой точки называется *следом* прямой  $\bar{a}$  на плоскость  $\bar{O}xy$ . Легко видеть, что *следом* данной прямой является точка пересечения аксонометрической и вторичной проекций этой прямой. В самом деле, пусть  $\bar{a}(a, a_3)$  — данная прямая, а  $A_0$  — точка пересечения прямых  $a$  и  $a_3$ . Точка  $\bar{A}_0(A_0, A_0)$  лежит в плоскости  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ , так как ее аксонометрическая и вторичная проекции совпадают. С другой стороны,  $A_0 \in a$  и  $A_0 \in a_3$ , поэтому  $\bar{A}_0$  —

точка прямой  $\bar{a}$ . Таким образом,  $\bar{A}_0$  — общая точка плоскости  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$  и прямой  $\bar{a}$ , т. е. точка  $A_0$  — след прямой  $\bar{a}$ .

**Задача 3.** Построить след данной прямой, проходящей через две точки  $(M, M_3)$  и  $(N, N_3)$ .

**Решение.** Прямая  $MN$  является аксонометрической проекцией данной прямой, а  $M_3N_3$  — ее вторичной проекцией, поэтому согласно предыдущему  $A_0 = MN \cap M_3N_3$  — искомая точка.

Если прямые  $MN$  и  $M_3N_3$  параллельны или совпадают, то задача не имеет решений, так как в первом случае данная прямая в пространстве параллельна плоскости  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ , а во втором случае она лежит в этой плоскости. Если точки  $M_3$  и  $N_3$  совпадают, то точка  $M_3$  и является искомой точкой.

Пусть плоскость  $\bar{\pi}$  пересекает координатную плоскость  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$  по прямой  $\bar{r}_0$ . Аксонометрическая проекция  $r_0$  этой прямой называется *следом плоскости  $\bar{\pi}$  на плоскости  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$*  или просто *следом плоскости<sup>1</sup>  $\bar{\pi}$* . Нетрудно видеть, что *если прямая лежит в плоскости, то ее след лежит на следе плоскости*. Это очевидное утверждение часто используется при решении задач.

**Задача 4.** Построить след плоскости, заданной тремя точками  $(A, A_3)$ ,  $(B, B_3)$ ,  $(C, C_3)$ , не лежащими на одной прямой (рис. 104).

**Решение.** Для решения задачи воспользуемся предыдущим утверждением. Если  $r_0$  — искомый след плоскости  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , то следы прямых  $\bar{A}\bar{B}$ ,  $\bar{B}\bar{C}$  и  $\bar{A}\bar{C}$  лежат на этой прямой. Поэтому, построив, например, следы  $P_0$  и  $Q_0$  прямых  $\bar{A}\bar{B}$  и  $\bar{B}\bar{C}$  (задача 3), находим прямую  $r_0$  (рис. 104). Если эти прямые не имеют следов, то плоскость  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  параллельна плоскости  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ , поэтому она не имеет следа на плоскости  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ .

Если плоскость  $\bar{\pi}$  пересекает ось  $\bar{O}\bar{z}$ , то она может быть задана следом  $r_0$  и аксонометрической проекцией  $P$  точки пересечения этой плоскости с осью  $\bar{O}\bar{z}$  (рис. 105, а). Этот способ задания плоскости часто применяется в аксонометрии. Заметим, что если плоскость  $\bar{\pi}$  параллельна прямой  $\bar{O}\bar{z}$  (или содержит эту ось), то она может быть

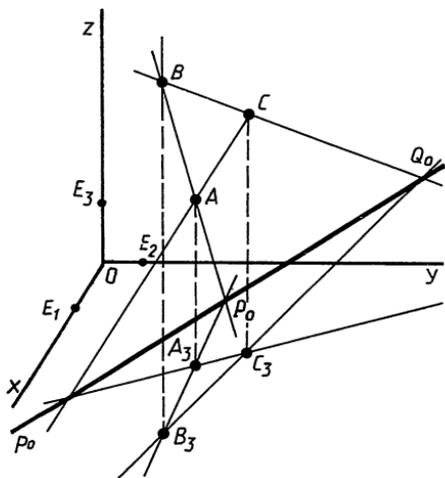


Рис. 104

<sup>1</sup> Если плоскость (прямая) пересекает другие координатные плоскости  $\bar{O}\bar{x}\bar{z}$  и  $\bar{O}\bar{y}\bar{z}$ , то можно говорить о следах плоскости (прямой) на этих плоскостях. Но в дальнейшем мы будем пользоваться только следом плоскости (прямой) на  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ .

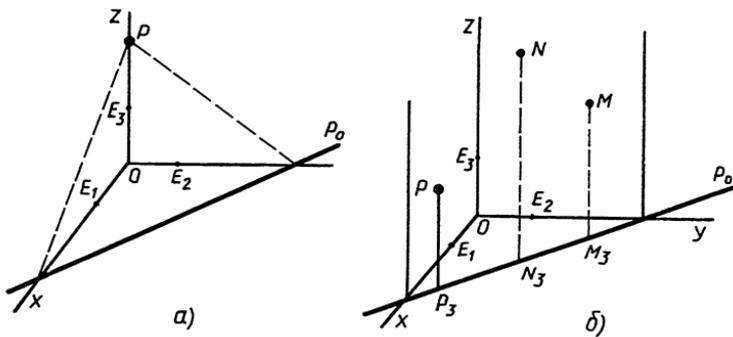


Рис. 105

задана одним следом  $p_0$ . В этом случае вторичные проекции всех точек плоскости лежат на прямой  $p_0$  (рис. 105, б).

**Задача 5.** Дана аксонометрическая проекция  $M$  точки  $\bar{M}$ , лежащей в плоскости, заданной следом  $p_0$  и точкой  $\bar{P}$  ( $P, O$ ) (рис. 106). Построить вторичную проекцию  $M_3$  точки  $\bar{M}$ .

**Решение.** Прямая  $\bar{M}\bar{P}$  лежит в данной плоскости, поэтому ее след  $X_0$  лежит на прямой  $p_0$  (рис. 106, а). Так как  $PM$  — аксонометрическая проекция этой прямой, то  $X_0 = p_0 \cap PM$ . Таким образом, прямая  $OX_0$  — вторичная проекция прямой  $\bar{M}\bar{P}$ , поэтому  $M_3 = OX_0 \cap MM_3$ , где  $MM_3 \parallel Oz$ .

Если прямая  $MP$  параллельна прямой  $p_0$ , то это означает, что прямая  $\bar{M}\bar{P}$  параллельна плоскости  $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ , поэтому не имеет следа на этой плоскости (рис. 106, б). В этом случае вторичная проекция  $l_3$  прямой  $\bar{M}\bar{P}$  также параллельна прямой  $p_0$ , поэтому для решения задачи через точку  $O$  проводим прямую  $l_3$ , параллельную прямой  $p_0$ , а через  $M$  — прямую, параллельную  $Oz$ . Точка пересечения этих прямых и есть искомая точка  $M_3$ . На рисунке 106, б выполнено построение точки  $M_3$ .

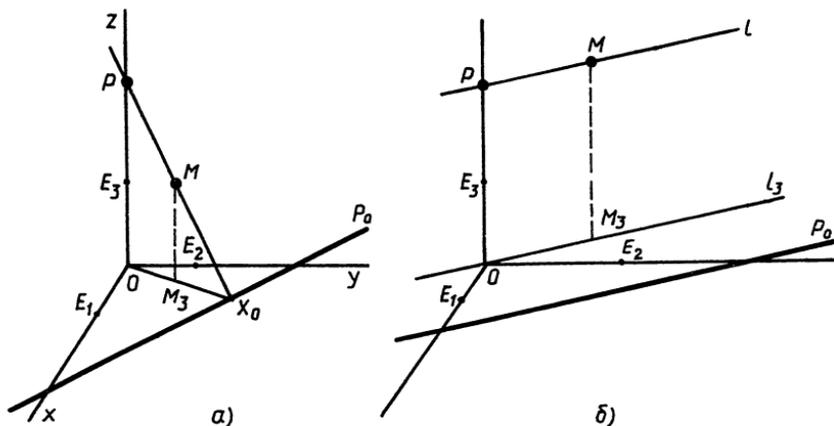


Рис. 106

### §31. Полные и неполные изображения. Позиционные задачи

1. Пусть на плоскости  $\sigma$  дано изображение  $F$  некоторой фигуры  $\bar{F}$ . Изображение  $F$  называется *полным*, если к нему можно присоединить изображение  $R$  аффинного репера так, что все точки, прямые и плоскости, определяющие фигуру  $\bar{F}$ , будут заданными на плоскости  $\sigma$ . При этом точка  $\bar{M}$  считается заданной, если на плоскости  $\sigma$  даны ее аксонометрическая проекция  $M$  и одна из вторичных проекций, например  $M_3$ . Прямая  $\bar{a}$  считается заданной, если заданы две ее точки или даны аксонометрическая и одна из ее вторичных проекций. Плоскость считается заданной, если заданы элементы, определяющие ее (три точки, не лежащие на одной прямой, две прямые или следы).

Легко видеть, что изображения многих плоских и пространственных фигур, рассматриваемых нами в § 27, 28 и 29 (плоские  $n$ -угольники, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар), являются полными. Например, изображение  $ABCD A' B' C' D'$  параллелепипеда  $\bar{F}$  на рисунке 79, б является полным. В самом деле, присоединим к нему изображение  $(A, B, D, A')$  аффинного репера. Тогда все вершины параллелепипеда  $\bar{F}$  окажутся заданными, так как для них однозначно определяются аксонометрические и вторичные проекции:  $(A, A)$ ,  $(B, B)$ ,  $(C, C)$ ,  $(D, D)$ ,  $(A', A)$ ,  $(B', B)$ ,  $(C', C)$ ,  $(D', D)$ . Отсюда следует, что и все ребра и грани параллелепипеда окажутся заданными. Полными являются также изображения тетраэдров на рисунке 77, изображение цилиндра на рисунке 85, конуса на рисунке 88 и др.

Можно доказать, что свойство изображения быть полным (или неполным) не зависит от выбора присоединенного изображения аффинного репера.

Рассмотрим примеры неполных изображений.

**Пример 1.** На рисунке 107, а изображен шестигранник  $SABCD$ . Это изображение не является полным, так как если, например, к нему присоединить изображение  $(A, B, C, S)$  аффинного репера, то точки  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  и  $\bar{S}$  окажутся заданными, а точка  $\bar{D}$  нет (не определена ее вторичная проекция).

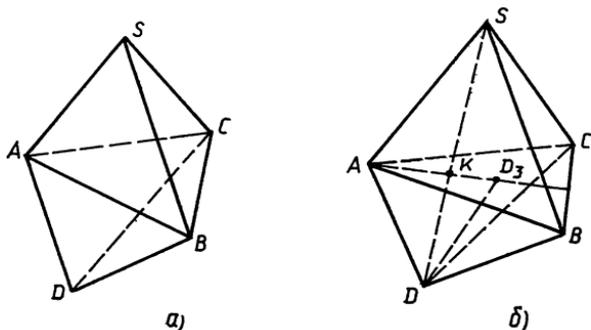


Рис. 107

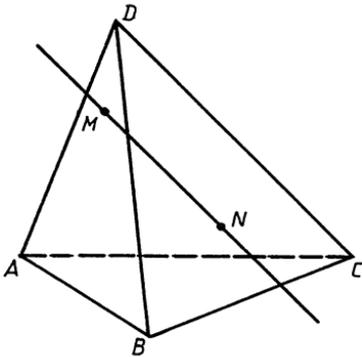


Рис. 108

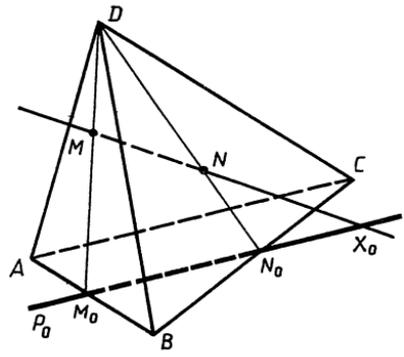


Рис. 109

**Пример 2.** На рисунке 108 изображен тетраэдр и прямая. Это изображение не является полным, так как если, например, к нему присоединить изображение  $(A, B, C, D)$  репера, то вершины тетраэдра  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  окажутся заданными, а точки  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  нет (не определены их вторичные проекции).

Число точек, которые надо добавить к чертежу, чтобы неполное изображение сделать полным, называется *коэффициентом неполноты данного изображения*. В примере 1 коэффициент неполноты равен единице, так как если, например, к рисунку добавить точку  $K$ —изображение точки пересечения отрезка  $\bar{S}\bar{D}$  с плоскостью  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  (рис. 107, б), то изображение станет полным; теперь вторичную проекцию точки  $\bar{D}$  легко построить:  $D_3$  есть точка пересечения прямой  $\bar{A}K$  с прямой, проведенной через точку  $D$  параллельно  $\bar{A}\bar{S}$  (рис. 107, б). В примере 2 коэффициент неполноты равен двум, так как, для того чтобы изображение сделать полным, можно, например, к рисунку 108 добавить точки  $M_3$  и  $N_3$ —вторичные проекции точек  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  или поступить так: считать, что точки  $M$  и  $N$  являются аксонометрическими проекциями точек пересечений прямой  $MN$  с гранями  $\bar{A}\bar{D}\bar{B}$  и  $\bar{B}\bar{D}\bar{C}$  тетраэдра. Тогда легко построить их вторичные проекции.

Можно доказать, что понятие коэффициента неполноты не зависит от выбора присоединенного изображения аффинного репера.

2. Пусть  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  две фигуры пространства, а  $F_1$  и  $F_2$ —их изображения на плоскости  $\sigma$ , выполненные в одной и той же проекции. Задача построения изображения точек пересечения фигур  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  называется *позиционной задачей*. Такие задачи удобно решать, пользуясь методом аксонометрии. Отметим, что любая позиционная задача на полном изображении имеет вполне определенное решение и не содержит никакого произвола. Если же изображение неполное, то, решая позиционную задачу, некоторые элементы можно задать произвольно.

Рассмотрим пример решения позиционной задачи. Согласно школьной практике при решении этой задачи, а также задач следую-

шего параграфа мы не будем отличать точки оригинала (или прямые оригинала) от их аксонометрических проекций; их будем называть просто точками (прямыми). В соответствии с этим точки или прямые оригинала обозначаем теми же буквами ( $A, B, C, \dots; a, b, c, \dots$ ), что и их аксонометрические проекции ( $a$  не  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots; \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ , как мы это делали выше).

**З а д а ч а.** Дано изображение пирамиды  $DABC$  и прямой, пересекающей ее грани  $ABD$  и  $BCD$  в точках  $M$  и  $N$  (рис. 109). Найти след прямой  $MN$  на плоскости основания  $ABC$ .

**Р е ш е н и е.** Присоединим к изображению данной пирамиды изображение  $(A, B, C, D)$  аффинного репера. Тогда все вершины пирамиды и точки  $M$  и  $N$  будут заданными, поэтому данное изображение является полным.

Прямая  $MN$  лежит в плоскости  $DMN$ , поэтому след  $X_0$  этой прямой лежит на следе  $p_0$  плоскости  $DMN$ , т. е.  $X_0$  — точка пересечения прямых  $MN$  и  $p_0$ .

Построим след  $p_0$  плоскости  $DMN$ . Прямые  $DM$  и  $DN$  пересекают плоскость основания пирамиды в точках  $M_0$  и  $N_0$ , поэтому прямая  $p_0$  проходит через точки  $M_0$  и  $N_0$ , т. е. совпадает с прямой  $M_0N_0$ . Таким образом,  $X_0 = MN \cap M_0N_0$ .

Интересно отметить, что эта задача решается только одной линейкой.

## § 32. Построение сечений простейших многогранников

1. Плоскость называется *секущей плоскостью* многогранника, если по обе стороны от этой плоскости имеются точки данного многогранника. Многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника, называется *сечением многогранника*. Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 110). Параллелепипед имеет шесть граней, поэтому его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники (рис. 111).

Рассмотрим примеры построения сечений<sup>1</sup> призм и пирамид. Эти построения являются важными в школьной практике. Сначала решим задачи на построение сечений призм.

**З а д а ч а 1.** Дано изображение треугольной призмы  $ABCA'B'C'$  и точек  $M, P$  и  $N$ , лежащих соответственно на ребре  $AA'$  и гранях  $ABB'A'$  и  $BCC'B'$  (рис. 112). Построить сечение этой призмы плоскостью  $MNP$ .

**Р е ш е н и е.** Присоединим к изображению данной призмы изображение  $(A, B, C, A')$  аффинного репера. Тогда все вершины призмы

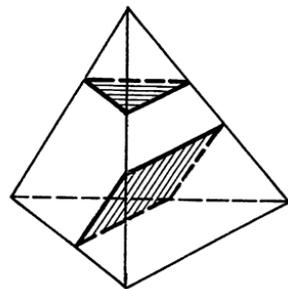


Рис. 110

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем, следуя школьной программе, вместо слов «построить изображение сечения» мы говорим кратко: «Построить сечение».

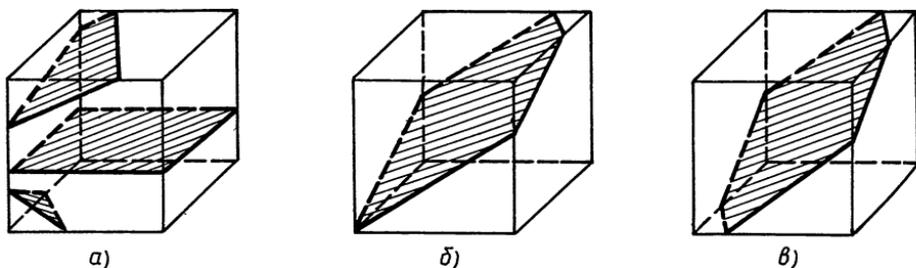


Рис. 111

и точки  $M$ ,  $P$ ,  $N$  окажутся заданными, поэтому данное изображение является полным.

Для решения задачи необходимо построить отрезки, по которым плоскость  $MNP$  пересекает грани данной призмы. Прямая  $MP$  лежит в плоскости грани  $ABB'A'$  и пересекает ребро  $BB'$  в точке  $X$ , поэтому плоскость  $MNP$  пересекает грань  $ABB'A'$  по отрезку  $MX$  (см. рис. 112). Аналогично строим отрезок  $XY$ , по которому плоскость  $MNP$  пересекает грань  $BCC'B'$ . Построив отрезок  $MY$ , получаем искомое сечение — треугольник  $MYX$ .

Так как треугольная призма имеет пять граней, то ее сечениями могут быть треугольники, четырехугольники и пятиугольники. При изменении положения точек  $M$ ,  $N$  и  $P$  на поверхности призмы мы можем получить все эти случаи. Например, на рисунке 113 плоскость  $MNP$  пересекает данную призму по четырехугольнику. В самом деле, в данном случае точка пересечения  $Y$  прямых  $XN$  и  $CC'$  лежит на продолжении ребра  $CC'$ . Поэтому прямая  $XN$  пересекает ребро  $B'C'$  в некоторой точке  $Y'$ , а прямая  $YM$  — ребро  $A'C'$  в точке  $X'$ . Следовательно, искомым сечением является четырехугольник  $MX'Y'X$ .

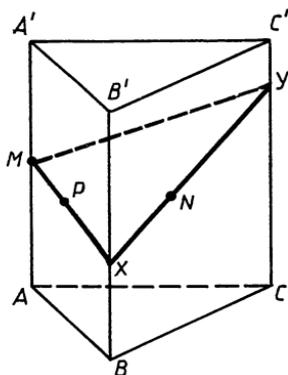


Рис. 112

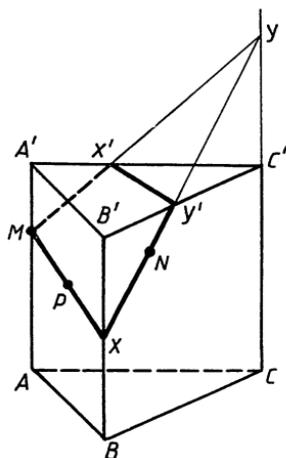


Рис. 113

**Задача 2.** Дано изображение четырехугольной призмы  $ABCD A' B' C' D'$  и точек  $M, N, K$ , лежащих соответственно на гранях  $DAA' D'$ ,  $ABB' A'$  и  $BCC' B'$  (рис. 114). Построить сечение этой призмы плоскостью  $MNK$ .

**Решение.** Присоединим к изображению данной призмы изображение  $(D, A, C, D')$  аффинного репера. Тогда все вершины призмы и точки  $M, N$  и  $K$  окажутся заданными (для точек  $M, N$  и  $K$  вторичными проекциями будут соответственно точки  $M_3, N_3$  и  $K_3$ , изображенные на рисунке 114). Следовательно, данное изображение является полным, и поэтому искомое сечение вполне определено.

Для решения задачи достаточно построить точку пересечения плоскости  $MNK$  с одним из боковых ребер данной призмы. Действительно, если мы построим, например, точку  $X$  пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $AA'$ , то затем, так же как и в задаче 1, сможем построить искомое сечение.

Точка  $X$  лежит в плоскости  $MNK$ , и ее вторичной проекцией является заданная точка  $A$ , поэтому ее легко построить (см. § 30, задача 2). Сначала построим точку  $L_3 = AK_3 \cap M_3N_3$  (рис. 114), затем точку  $L = MN \cap L_3L$ , где  $LL_3 \parallel DD'$ , и, наконец, точку  $X = KL \cap AA'$ . Построив точку  $X$ , строим последовательно отрезки  $XY, XH, YZ$ , на которых лежат соответственно точки  $N, M$  и  $K$ . Построив отрезок  $HZ$ , получаем искомое сечение — четырехугольник  $XYZH$  (рис. 114).

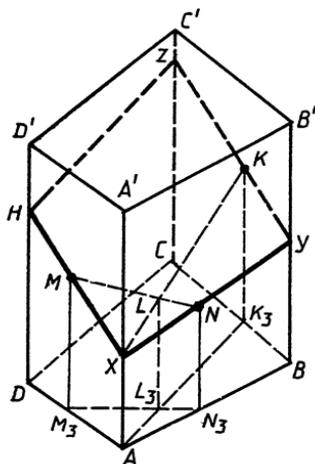


Рис. 114

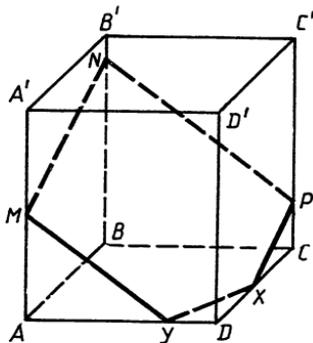


Рис. 115

**Задача 3.** Дано изображение параллелепипеда  $ABCD A' B' C' D'$  и точек  $M, N$  и  $P$ , лежащих соответственно на ребрах  $AA', BB'$  и  $CC'$  (рис. 115). Построить сечение параллелепипеда плоскостью  $MNP$ .

**Решение.** Отрезки  $MN$  и  $NP$ , очевидно, являются двумя сторонами искомого сечения. Для построения других сторон сечения можно поступить так же, как и в задаче 2. Однако в данном случае задачу можно решить проще.

Так как грани  $ABB' A'$  и  $CC' D' D$  параллелепипеда параллельны, то прямая, проходящая через точку  $P$  параллельно прямой  $MN$ , лежит в плоскости грани  $CC' D' D$ , поэтому легко построить точку  $X$  пересечения плоскости  $MNP$  с ребром  $CD$ :  $X = DC \cap PX$ , где  $PX \parallel MN$ . Аналогично строим точку  $Y = AD \cap MY$ , где  $MY \parallel NP$ . Искомым сечением является пятиугольник  $MNPXY$  (см. рис. 115).

**2.** Рассмотрим теперь задачи на построение сечений пирамид.

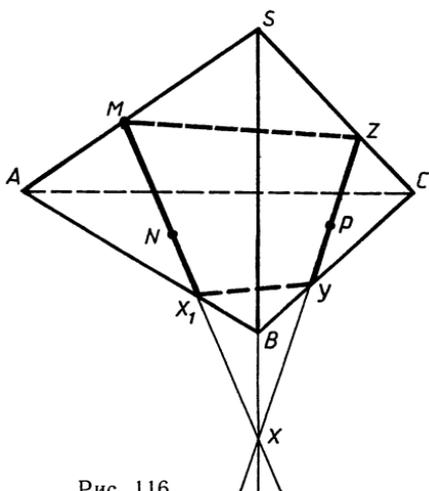


Рис. 116

**Задача 4.** Дано изображение треугольной пирамиды  $SABC$  и точек  $M, N$  и  $P$ , лежащих соответственно на ребре  $AS$  и гранях  $ABS$  и  $BCS$  (рис. 116). Построить сечение этой пирамиды плоскостью  $MNP$ .

**Решение.** Присоединим к изображению данной пирамиды изображение  $(A, B, C, S)$  аффинного репера. Тогда все вершины пирамиды и точки  $M, N$  и  $P$  окажутся заданными (предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно), поэтому изображение на рисунке 116 полное.

Прямая  $MN$  лежит в плоскости грани  $ABS$  и пересекает прямую  $BS$  в точке  $X$ , поэтому плоскость  $MNP$  пересекает грань  $ABS$  по отрезку  $MX_1$  (рис. 116). Прямая  $XP$  лежит в плоскости грани  $BCS$  и пересекает ребра  $BC$  и  $CS$  в точках  $Y$  и  $Z$ . Построив отрезки  $X_1Y$  и  $ZM$ , которые лежат соответственно в гранях  $ABC$  и  $ACS$ , получаем искомого сечение — четырехугольник  $MX_1YZ$ .

**Задача 5.** Дано изображение четырехугольной пирамиды  $SABCD$  и точек  $M, N$  и  $K$ , лежащих соответственно на гранях  $ABS$ ,  $BCS$  и  $CDS$  (рис. 117). Построить сечение этой пирамиды плоскостью  $MNK$ .

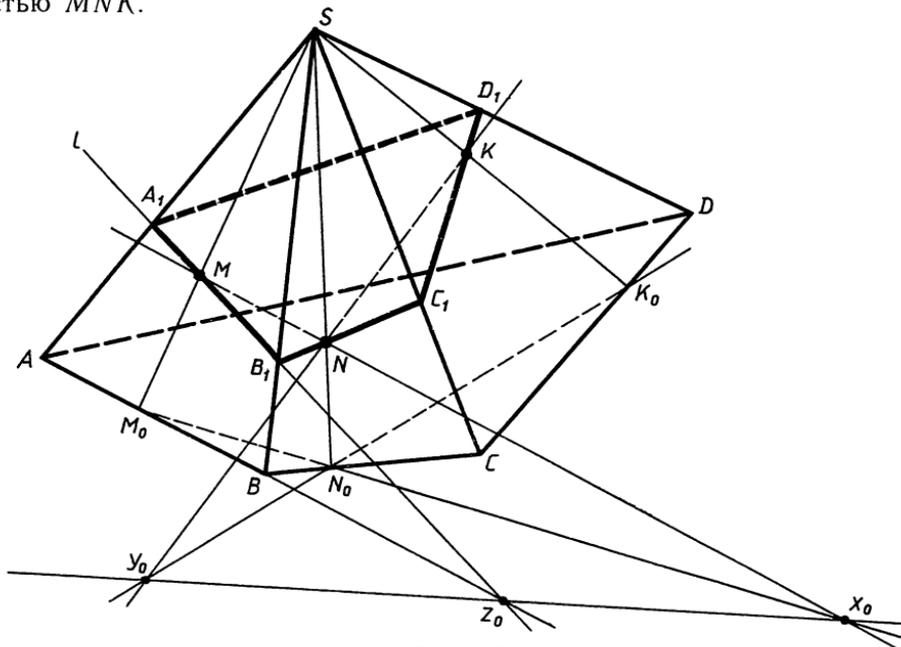


Рис. 117

Решение. Присоединив к изображению данной пирамиды изображение  $(A, B, D, S)$  аффинного репера, мы замечаем, что данное изображение является полным.

Построим сначала след плоскости  $MNK$  на плоскости основания пирамиды, не пользуясь вторичными проекциями этих прямых. Для этого предварительно построим следы прямых  $MN$  и  $NK$  (см. § 31, задача). На рисунке 117  $X_0$  — след прямой  $MN$ , а  $Y_0$  — след прямой  $NK$ . Таким образом, прямая  $X_0Y_0$  — след плоскости  $MNK$ .

Пусть  $l$  — прямая, по которой пересекаются плоскости  $MNK$  и  $ABS$ . Ее вторичной проекцией является, очевидно, прямая  $AB$ . Поэтому следом этой прямой является точка  $Z_0 = AB \cap X_0Y_0$ . Отсюда следует, что прямая  $l$  проходит через точки  $Z_0$  и  $M$ , т. е. совпадает с прямой  $MZ_0$ . Она пересекает ребра  $SA$  и  $SB$  соответственно в точках  $A_1$  и  $B_1$ . Таким образом, плоскость  $MNK$  пересекает грань  $ABS$  по отрезку  $A_1B_1$ . Затем, используя точки  $N$  и  $K$ , строим последовательно отрезки  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$  и  $D_1A_1$ . Искомое сечение — четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$ .

З а м е ч а н и е. При решении этой задачи для построения сечения пирамиды мы воспользовались следом секущей плоскости на плоскости основания пирамиды. Этот метод часто применяется при построении сечений многогранников.

### § 33. Метрические задачи

1. Аффинный репер  $\bar{R} = (\bar{O}, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$  называется *декартовым*, если известны длины координатных векторов  $\vec{e}_i = \vec{\bar{O}\bar{A}_i}$ , где  $i = 1, 2, 3$ , и углы между ними, т. е. если известны скалярные произведения  $\vec{e}_i \vec{e}_j = g_{ij}$ . В частности, ортонормированный репер является декартовым. Если в пространстве задан декартов репер, то по координатам точек в этом репере можно вычислять расстояния между ними. В самом деле, если  $\bar{M}(x_1, x_2, x_3)$  и  $\bar{N}(y_1, y_2, y_3)$  — две точки, то расстояние  $\bar{M}\bar{N}$  между

этими точками равно  $\sqrt{\vec{\bar{M}\bar{N}} \cdot \vec{\bar{M}\bar{N}}}$ , поэтому

$$\bar{M}\bar{N} = \sqrt{\sum g_{ij} (y_i - x_i)(y_j - x_j)}. \quad (1)$$

Таким образом, по координатам точек в декартовом репере мы можем решать любые метрические задачи в пространстве, т. е. находить расстояния между точками, вычислять величины углов, определять расстояния от точки до прямой или плоскости и др.

Рассмотрим на плоскости изображений  $\sigma$  изображение  $R$  декартова репера  $\bar{R}$ . Возникает вопрос: можно ли, зная только изображение  $R$ , пользуясь чертежом, по полному изображению  $F$  пространственной фигуры  $\bar{F}$  решать метрические задачи, относящиеся к оригиналу  $\bar{F}$  (например, по аксонометрическим и вторичным проекциям  $(M_1M_3)$ ,  $(N_1N_3)$  точек  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  фигуры  $\bar{F}$  найти истинное расстояние

между этими точками)? Оказывается, что задание только изображения  $R$  репера  $\bar{R}$  недостаточно для решения подобных задач. Необходимо иметь еще некоторые числа (параметры), например числа  $g_{ij}$ , или эквивалентные им величины, которые определяют репер  $\bar{R}$  с точностью до движения в пространстве. В этом случае, как было показано в § 30, по аксонометрической и вторичной проекциям любой точки  $\bar{M}$  фигуры  $\bar{F}$  можно определить координаты этой точки в репере  $\bar{R}$  и, зная коэффициенты  $g_{ij}$ , решить любую метрическую задачу, относящуюся к фигуре  $\bar{F}$ . Если  $\bar{F}$  — пространственная фигура, то достаточно иметь шесть параметров, например, числа  $g_{ij}$ , чтобы определить репер  $\bar{R}$  с точностью до движения.

В школьной практике чаще всего встречаются задачи, для решения которых достаточно иметь меньшее число параметров, а именно столько, сколько необходимо для того, чтобы репер  $\bar{R}$  был определен в пространстве с точностью до подобия. Изображение  $F \subset \sigma$  фигуры  $\bar{F}$  назовем *евклидово определенным*, если к нему можно присоединить изображение  $R$  репера  $\bar{R}$  и задать параметры так, чтобы изображение  $F$  было полным, а заданные параметры определяли репер  $\bar{R}$  с точностью до подобия в пространстве.

Если изображение  $F$  фигуры  $\bar{F}$  евклидово определенное, то мы можем, пользуясь этим изображением, на плоскости  $\sigma$  решать любые задачи, относящиеся к оригиналу, в которых требуется построить равные углы или отрезки, перпендикулярные прямые и т. д. Например, если известно, что фигура  $F$ , изображенная на рисунке 118, является изображением некоторого куба  $\bar{F} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1\bar{D}_1$ , то это изображение евклидово определенное. В самом деле, присоединив к нему изображение  $R = (A, B, D, A_1)$  пространственного репера  $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{D}, \bar{A}_1)$ , получим, что все вершины оригинала будут заданными. Далее, так как известно, что  $F$  — изображение куба, то репер  $\bar{R}$  определяется с точностью до подобия.

Если же считать, что фигура  $F$  является изображением прямоугольного параллелепипеда  $\bar{F} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1\bar{D}_1$ , то, присоединив к нему репер  $R = (A, B, D, A_1)$ , хотя и получим все вершины оригинала заданными (т. е.  $F$  — полное изображение фигуры  $\bar{F}$ ), но  $F$  не будет евклидово определенным, так как в этом случае о репере  $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{D}, \bar{A}_1)$  известно только то, что углы  $\bar{B}\bar{A}\bar{A}_1$ ,  $\bar{D}\bar{A}\bar{A}_1$  и  $\bar{B}\bar{A}\bar{D}$

прямые. Для того чтобы репер  $\bar{R}$  был задан с точностью до подобия, необходимо иметь еще два параметра:  $\lambda_1 = \frac{\bar{A}\bar{D}}{\bar{A}\bar{B}}$  и  $\lambda_2 = \frac{\bar{A}\bar{A}_1}{\bar{A}\bar{B}}$ . Таким образом,

фигура  $F$  является евклидово определенным изображением прямоугольного параллелепипеда, если заданы параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

2. Если фигура-оригинал  $\bar{F}$  является плоской, т. е. все ее точки лежат в некоторой плоскости  $\sigma$ ,

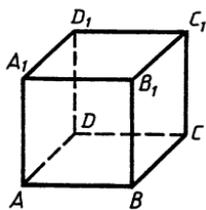


Рис. 118

то репер  $\bar{R} = (\bar{O}, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$  можно выбрать так, чтобы вершины  $\bar{O}$ ,  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  лежали в плоскости  $\bar{\sigma}$ . Тогда аксонометрическая и вторичная проекции каждой точки фигуры  $\bar{F}$  совпадут, поэтому независимо от выбора  $R$  изображение  $F$  будет полным. В этом случае выбор точки  $A_3$  несуществен.

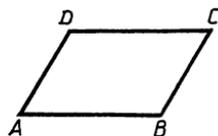


Рис. 119

Изображение  $F \subset \sigma$  плоской фигуры  $\bar{F} \subset \bar{\sigma}$  будем называть *евклидово определенным*, если к нему можно присоединить изображение  $R_3$  декартова репера  $\bar{R}_3 = (\bar{O}, \bar{A}_1, \bar{A}_2)$  плоскости  $\bar{\sigma}$  и задать параметры так, чтобы эти параметры определяли репер  $\bar{R}_3$  с точностью до подобия в плоскости  $\bar{\sigma}$ .

Например, если известно, что параллелограмм  $ABCD$ , изображенный на рисунке 119, является изображением некоторого квадрата  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ , то это изображение евклидово определенное, так как, присоединив к нему изображение  $R = (A, B, D)$  репера  $\bar{R} = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{D})$  плоскости  $\bar{\sigma}$ , мы видим, что  $\bar{R}$  определяется с точностью до подобия (потому что  $\angle \bar{B}\bar{A}\bar{D}$  прямой и  $\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{D}$ ).

Если же считать, что параллелограмм  $ABCD$  является изображением некоторого прямоугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ , то для того, чтобы его сделать евклидово определенным, надо задать один параметр:

$$\lambda = \frac{\bar{A}\bar{B}}{\bar{A}\bar{D}}.$$

Рассмотрим примеры построений на евклидово определенных изображениях.

### 3. Задачи на плоскости.

**Задача 1.** Дано изображение  $ABC$  прямоугольного треугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  с прямым углом  $\bar{C}$  и углом  $\bar{A}$ , равным  $30^\circ$ . Построить изображение высоты, проведенной из вершины  $\bar{C}$ .

**Решение.** Изображение  $ABC$  треугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  является евклидово определенным, так как, присоединив к нему изображение  $R = (A, B, C)$  репера  $\bar{R}$  плоскости  $\bar{\sigma}$ , мы видим, что репер  $\bar{R}$  в силу условий задачи определяется с точностью до подобия на плоскости  $\bar{\sigma}$ .

**Первый способ.** Допустим, что задача решена и  $F$  — изображение треугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  и его высоты  $\bar{C}\bar{H}$  (рис. 120). Фигуры  $F$  и  $\bar{F}$  аффинно-эквивалентны (§ 27, теорема), поэтому для решения задачи построим какой-нибудь прямоугольный треугольник  $A_0B_0C_0$

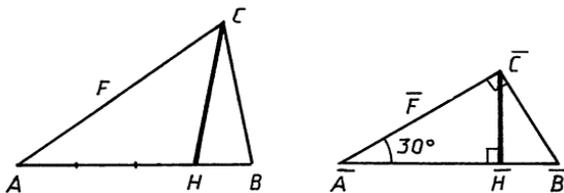


Рис. 120

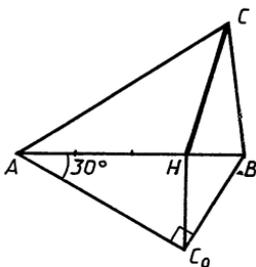


Рис. 121

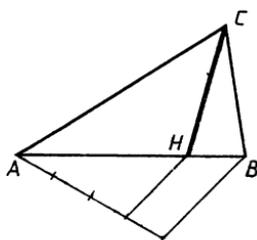


Рис. 122

так, чтобы  $\widehat{A}_0 = 30^\circ$ ,  $\widehat{C}_0 = 90^\circ$ , и проведем его высоту  $C_0H_0$ . Затем найдем образ отрезка  $C_0H_0$  в аффинном преобразовании, которое переводит репер  $(A_0, B_0, C_0)$  в репер  $(A, B, C)$ .

Построение упрощается, если использовать перспективно-аффинное преобразование с осью  $AB$ . Строим треугольник  $ABC_0$  так, чтобы

$\widehat{BAC}_0 = 30^\circ$ ,  $\widehat{AC}_0B = 90^\circ$  (рис. 121), и проводим высоту  $C_0H$  этого треугольника. Отрезок  $CH$  искомый.

Второй способ. Рассмотрим фигуру  $\bar{F}$  на рисунке 120. Так как  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $\widehat{C} = 90^\circ$ , то  $\frac{AH}{HB} = \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{(\sqrt{3})^2}{1} = \frac{3}{1}$ .

Поэтому  $\frac{AH}{HB} = 3$ .

Таким образом, задача сводится к построению точки  $H$  на отрезке  $AB$ , удовлетворяющей условию  $AH = 3HB$ . На рисунке 122 выполнено построение.

**Задача 2.** Треугольник  $ABC$  является изображением треугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , подобного данному треугольнику  $A_0B_0C_0$ . Построить изображение ортоцентра  $\bar{O}$  треугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

**Решение.** Изображение является евклидово определенным, поэтому задача имеет вполне определенное решение.

По аналогии с решением задачи 1 построим треугольник  $ABC_1$ , подобный треугольнику  $A_0B_0C_0$ , так, чтобы точки  $C$  и  $C_1$  лежали по разные стороны от прямой  $AB$  (рис. 123). Затем строим ортоцентр  $O_1$  треугольника  $ABC_1$ .

Рассмотрим перспективно-аффинное преобразование с осью  $AB$ , в котором точка  $C_1$  переходит в точку  $C$ . Образ  $O$  точки  $O_1$  в этом преобразовании является искомой точкой (см. рис. 123).

**Замечание.** Пусть  $ABC$  — изображение треугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  на плоскости  $\sigma$ . Обозначим через  $F$  множество всех точек плоскости  $\sigma$ , принадлежащих к той части

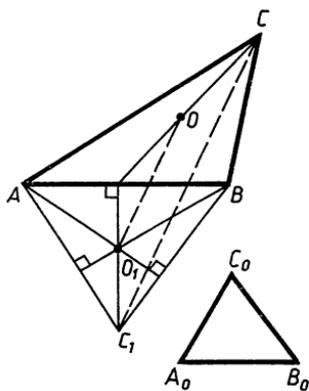


Рис. 123

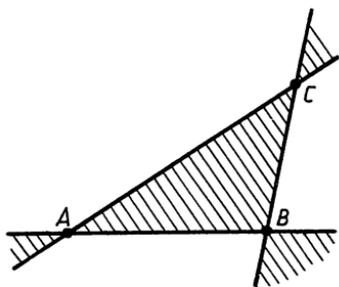


Рис. 124

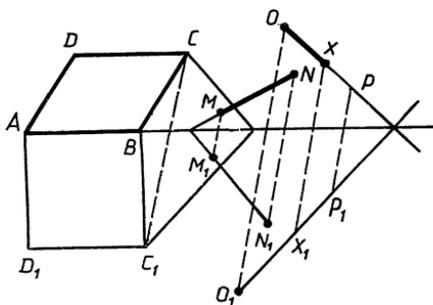


Рис. 125

плоскости, которая заштрихована на рисунке 124. При этом  $A \in F$ ,  $B \in F$ ,  $C \in F$ , а прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , за исключением точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не принадлежат множеству  $F$ . Можно доказать, что точка  $O$  плоскости  $\sigma$  может служить изображением ортоцентра треугольника  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  тогда и только тогда, когда  $O \in F$ .

**Задача 3.** На плоскости  $\sigma$  даны параллелограмм  $ABCD$ , отрезок  $MN$  и луч  $OP$ , которые являются изображениями квадрата, отрезка и луча, лежащих в одной плоскости. Построить изображение отрезка, равного данному отрезку и отложенного на данном луче от его начала.

**Решение.** Построим квадрат  $ABC_1D_1$ , как показано на рисунке 125, и рассмотрим перспективно-аффинное преобразование  $f$  с осью  $AB$  и соответствующими точками  $C$  и  $C_1 = f(C)$ . Построим образы луча  $OP$  и отрезка  $MN$ :  $O_1P_1 = f(OP)$ ,  $M_1N_1 = f(MN)$  (рис. 125).

Отложим на луче  $O_1P_1$  отрезок  $O_1X_1$ , равный отрезку  $M_1N_1$ , и найдем прообраз  $OX$  отрезка  $O_1X_1$  в преобразовании  $f$ . Отрезок  $OX$  искомым.

**4. Задачи в пространстве.** Так же как и в предыдущих двух параграфах, следуя школьной практике, мы не будем отличать точки и прямые оригинала от их аксонометрических проекций; их будем обозначать одними и теми же буквами.

**Задача 4.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , боковое ребро которой равно стороне основания. Построить перпендикуляр, проведенный из вершины  $A$  к плоскости  $A_1BC$ .

**Решение.** Для изображения данной призмы точки общего положения  $A, B, C, A_1$  можно взять произвольно и по теореме Польке — Шварца считать их изображениями соответствующих вершин. Эту фигуру достраиваем до изображения треугольной призмы (рис. 126).

Изображение евклидово определенное, так как если к нему присоединить изображение  $R = (A, B, C, A_1)$  репера  $\bar{R}$ , то  $\bar{R}$  определяется с точностью до подобия (потому что  $\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{C} = \bar{A}\bar{A}_1$ ,  $\bar{B}\bar{A}\bar{C} = 60^\circ$ ,  $\bar{B}\bar{A}\bar{A}_1 = \bar{C}\bar{A}\bar{A}_1 = 90^\circ$ ).

Обозначим через  $E$  середину ребра  $BC$ . Так как  $BC \perp AE$  и  $BC \perp A_1E$ , то прямая  $BC$  перпендикулярна к плоскости  $AA_1E$ . Отсюда

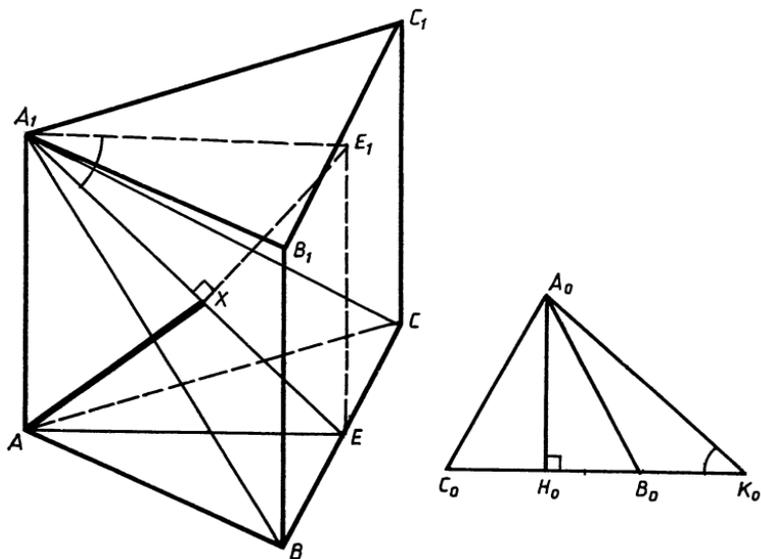


Рис. 126

следует, что плоскость  $A_1BC$  перпендикулярна к плоскости  $A_1AE$ . Таким образом, искомый перпендикуляр  $AH$  к плоскости  $A_1BC$  лежит в плоскости  $AA_1E$  и перпендикулярен к прямой  $A_1E$ , т. е. является высотой треугольника  $AA_1E$ . Эта задача, по существу, сводится к задаче 1, так как истинная форма треугольника  $AA_1E$  известна:  $\angle A$  прямой, а катеты  $AA_1$  и  $AE$  равны соответственно стороне и высоте некоторого равностороннего треугольника.

Построим какой-нибудь равносторонний треугольник  $A_0B_0C_0$  и проведем его высоту  $A_0H_0$ . Затем построим прямоугольный треугольник  $A_0H_0K_0$  с прямым углом  $H_0$  так, чтобы  $H_0K_0 = A_0B_0$  (см. рис. 126). Теперь воспользуемся решением задачи 1 (первый способ). Строим треугольник  $A_1EE_1$  так, чтобы  $\angle EA_1E_1 = \angle A_0K_0H_0$ , угол  $E_1$  был

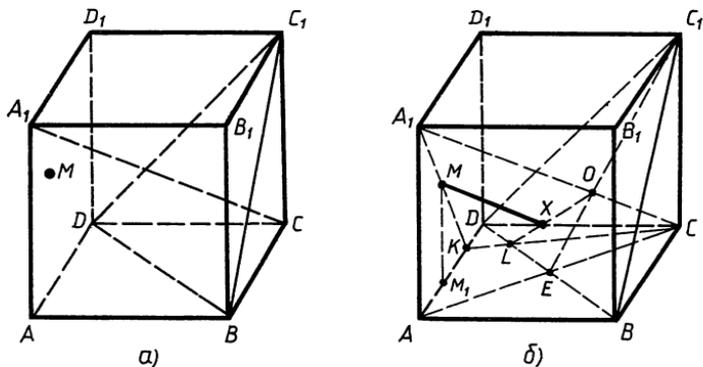


Рис. 127

прямым, и проводим высоту  $E_1X$  этого треугольника. Отрезок  $AX$  искомым.

**Задача 5.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Построить перпендикуляр, проведенный из точки  $M$ , лежащей на грани  $AA_1 D_1$ , к плоскости  $BC_1 D$  (рис. 127, а).

**Решение.** Пусть  $MX$  — искомым перпендикуляр. Заметим, что диагональ  $A_1 C$  данного куба перпендикулярна к прямым  $BD$ ,  $BC_1$  и  $C_1 D$ , поэтому прямая  $A_1 C$  перпендикулярна к плоскости  $BC_1 D$  (рис. 127, а). Отсюда следует, что  $MX \parallel A_1 C$ . Итак, для решения задачи достаточно провести через точку  $M$  прямую, параллельную прямой  $A_1 C$ , и найти точку пересечения этой прямой с плоскостью  $BC_1 D$ .

На рисунке 127, б выполнено построение. Плоскость, проходящая через прямую  $A_1 C$  и точку  $M$ , пересекает грани куба по отрезкам  $A_1 K$  и  $K C$  (рис. 127, б). Найдем линию пересечения плоскостей  $A_1 K C$  и  $BC_1 D$ . Для этого заметим, что точки  $L = BD \cap K C$  и  $O = A_1 C \cap C_1 E$ , где  $E = AC \cap BD$ , лежат на этой прямой. Таким образом,  $X$  есть точка пересечения прямой  $OL$  с прямой, проведенной через точку  $M$  параллельно прямой  $A_1 C$ .

### § 34. Понятие о методе Монжа

1. Метод Монжа<sup>1</sup> состоит в ортогональном проектировании фигуры на две взаимно перпендикулярные плоскости с последующим совмещением этих плоскостей. Полученные две проекции фигуры определяют оригинал с точностью до движения. Иногда рассматривается вспомогательная проекция фигуры на третью плоскость, перпендикулярную к двум первым. Рассмотрим вкратце основы этого метода.

Пусть  $H$  и  $V$  — взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающиеся по прямой  $x$ . Плоскости  $H$  и  $V$  называются *плоскостями проекций*, а прямая  $x$  — *осью проекций*. Плоскость  $H$  обычно представляют себе расположенной горизонтально и называют *горизонтальной плоскостью проекций*, а плоскость  $V$  — *вертикальной плоскостью проекций* (рис. 128).

Пусть  $\bar{F}$  — произвольная фигура пространства, а  $F_1$  и  $F_2$  — ее ортогональные проекции на плоскости  $H$  и  $V$ . Проекцию  $F_1$  на плоскость  $H$  назовем *горизонтальной проекцией* фигуры, а проекцию  $F_2$  на плоскость  $V$  — *вертикальной проекцией*. Выполнив проектирование фигуры  $\bar{F}$  на плоскости  $H$  и  $V$ , повернем плоскость  $H$  на угол  $90^\circ$  около оси  $x$  до совмещения с вертикальной плоскостью  $V$ . Тогда обе проекции окажутся в одной плоскости. Полученный таким образом чертеж называется *эпюром*.

В теории изображений по методу Монжа даются способы построения эпюра по данной пространственной фигуре и обратно: рассматриваются способы для восстановления изображаемой фигуры по эпюру. Достоинство метода Монжа заключается в том, что он дает

<sup>1</sup> Г а с п а р М о н ж (1746—1818) — французский математик, создавший основы начертательной геометрии. Он известен также своими работами по дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям.

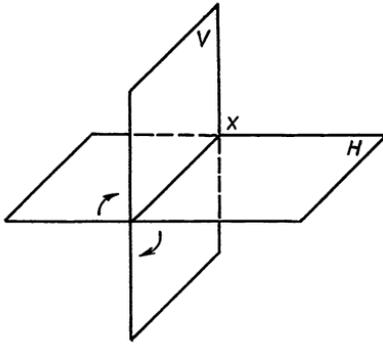


Рис. 128

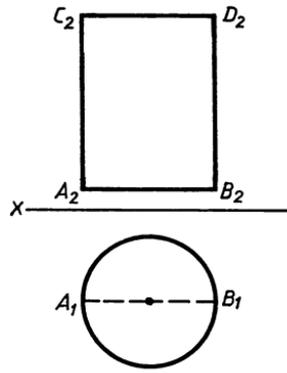


Рис. 129

возможность с помощью простых построений найти по эпюру точно все размеры изображаемой фигуры, в силу чего этот метод широко применяется в инженерной практике. Недостатком этого метода является отсутствие наглядности изображения. Например, на рисунке 129 изображен цилиндр. Этот рисунок по сравнению с рисунком 85 менее наглядный, но он удобен тем, что по нему легко определить радиус и высоту цилиндра:  $r = \frac{1}{2} A_1 B_1$ ,  $h = A_2 C_2$ .

2. Рассмотрим изображение точек и прямых по методу Монжа. Пусть  $\bar{A}$  — произвольная точка пространства, а  $A_1$  и  $A_2$  — ее горизонтальная и вертикальная проекции (рис. 130, а). Плоскость  $\bar{A}A_1A_2$ , очевидно, перпендикулярна к плоскостям  $H$  и  $V$ , следовательно, она перпендикулярна к оси проекций  $x = H \cap V$  и пересекает эту ось в некоторой точке  $A_0$ . После поворота плоскости  $H$  вокруг оси  $x$  до совмещения с плоскостью  $V$  точки  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  окажутся на одной прямой, перпендикулярной оси  $x$  (рис. 130, б). Точки  $A_1$  и  $A_2$  могут

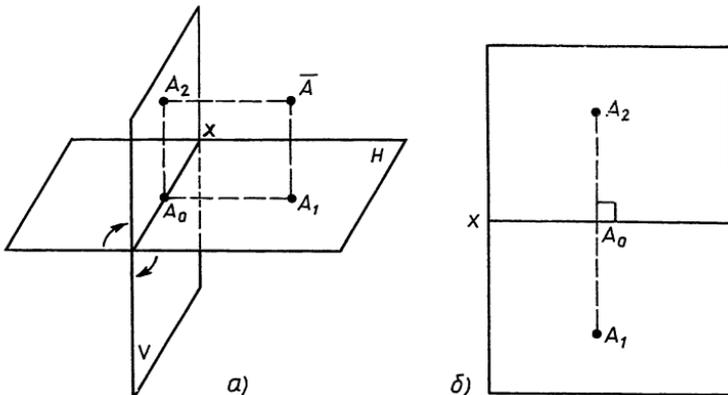


Рис. 130

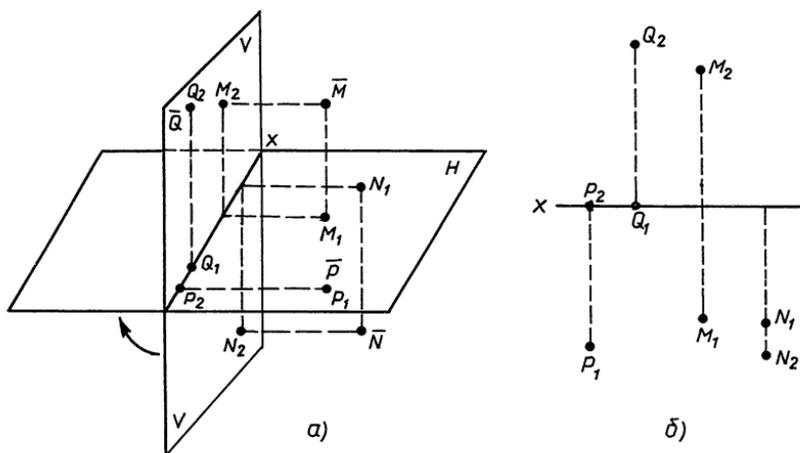


Рис. 131

лежать по разные стороны от прямой  $x$  или по одну сторону в зависимости от положения точки  $\bar{A}$  в пространстве (см. точки  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  на рис. 131, а, б). Если точка лежит в плоскости  $H$ , то ее вертикальная проекция лежит на оси  $x$ , а если точка лежит в плоскости  $V$ , то ее горизонтальная проекция лежит на этой оси (точки  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$  на рис. 131).

Важно отметить, что любые точки  $A_1$  и  $A_2$ , лежащие на эпюре так, что  $A_1A_2 \perp x$ , могут служить проекциями некоторой точки пространства.

Прямая  $\bar{a}$ , расположенная в пространстве, на эпюре задается своими проекциями  $(a_1, a_2)$  или проекциями двух ее точек  $(M_1, M_2)$  и  $(N_1, N_2)$  (рис. 132). Если прямая перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, то одна из ее проекций перпендикулярна к оси  $x$ , а другая есть точка, лежащая на этой перпендикулярной прямой. На рисунке 132 прямая  $(c_1, c_2)$  перпендикулярна к плоскости  $H$ , а прямая  $(d_1, d_2)$  — к плоскости  $V$ .

**Задача 1.** Точка  $\bar{M}(M_1, M_2)$  лежит на прямой  $\bar{a}(a_1, a_2)$ . По заданной точке  $M_2$  построить точку  $M_1$ .

**Решение.** Точка  $\bar{M}$  лежит на прямой  $\bar{a}$ , поэтому  $M_1 \in a_1$ ,

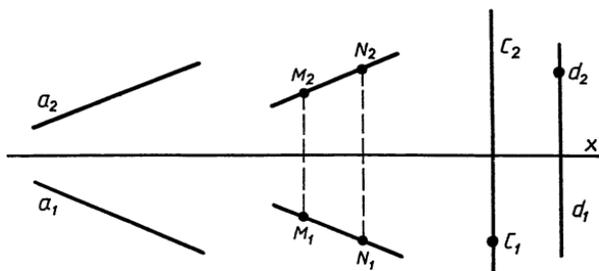


Рис. 132

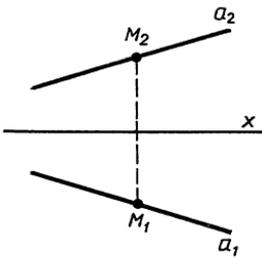


Рис. 133

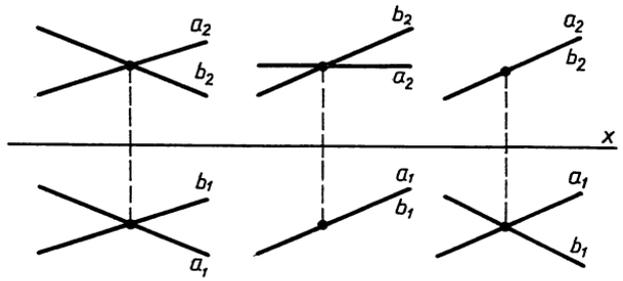


Рис. 134

$M_2 \in a_2$ . Так как точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат на одном перпендикуляре к оси  $x$ , то  $M_1$  — точка пересечения прямой  $a_1$  с прямой, проходящей через точку  $M_2$  перпендикулярно к оси  $x$  (рис. 133).

Выясним взаимное расположение двух прямых  $(a_1, a_2)$  и  $(b_1, b_2)$ , заданных своими проекциями на эпюре. Мы предполагаем, что ни одна из них не перпендикулярна к плоскостям проекций. Эти прямые пересекаются только в том случае, когда они имеют единственную общую точку, т. е. когда имеет место один из трех случаев, изображенных на рисунке 134. Прямые  $(a_1, a_2)$  и  $(b_1, b_2)$  параллельны только в том случае, когда имеет место один из трех случаев, изображенных на рисунке 135. Прямые  $(c_1, c_2)$  и  $(d_1, d_2)$ , изображенные на рисунке 136, скрещиваются.

Точки пересечения прямой с плоскостями проекций называются *следами прямой*. На рисунке 137  $\bar{A}$  — горизонтальный след прямой  $\bar{a}$ , а  $\bar{B}$  — вертикальный след. Мы видим, что горизонтальная проекция горизонтального следа совпадает с самим следом, а вертикальная проекция лежит на оси  $x$ . Аналогично вертикальная проекция вертикального следа совпадает с самой точкой, а горизонтальная проекция лежит на оси  $x$ . Эти утверждения позволяют легко построить следы прямой на эпюре.

**Задача 2.** Построить следы прямой  $\bar{a}$ , заданной на эпюре проекциями  $(a_1, a_2)$ .

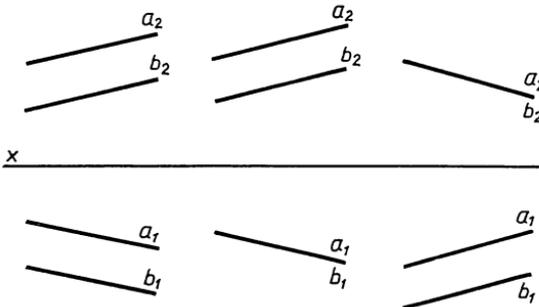


Рис. 135

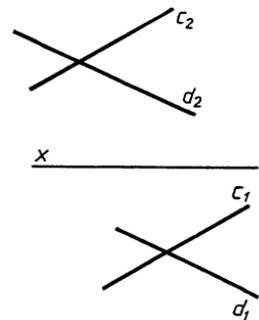


Рис. 136

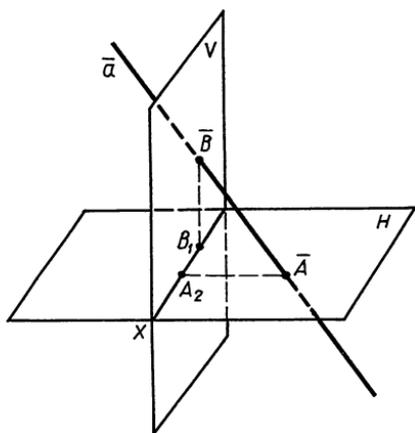


Рис. 137

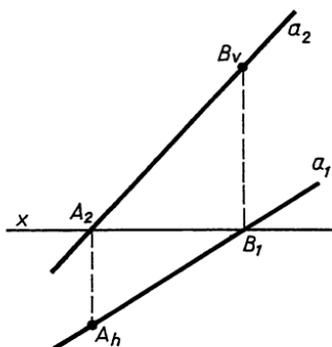


Рис. 138

**Решение.** Пусть  $\bar{A}(A_h, A_2)$  и  $\bar{B}(B_1, B_v)$  — соответственно горизонтальный и вертикальный следы данной прямой  $\bar{a}(a_1, a_2)$ . Тогда по предыдущему  $A_2 \in a_2$  и  $A_2 \in x$ , поэтому  $A_2 = a_2 \cap x$  (рис. 138). Теперь легко построить горизонтальный след  $A_h$  прямой  $\bar{a}$ :  $A_h = a_1 \cap A_2 A_h$ , где  $A_2 A_h \perp x$ . Аналогично строим вертикальный след  $B_v$  этой прямой (рис. 138).

**3.** Плоскость может быть задана тремя своими точками, не лежащими на одной прямой, или двумя пересекающимися или параллельными прямыми, или прямой и точкой, не лежащей на ней. Соответственно каждому из этих способов задания плоскости на эюре должны быть даны проекции элементов, с помощью которых задана плоскость.

**Задача 3.** Прямая  $(a_1, a_2)$  лежит в плоскости, заданной пересекающимися прямыми  $(p_1, p_2)$  и  $(q_1, q_2)$ . По заданной проекции  $a_2$  построить проекцию  $a_1$ .

**Решение.** Найдем сначала проекции точек  $(M_1, M_2)$  и  $(N_1, N_2)$ , в которых прямая  $(a_1, a_2)$  пересекает прямые  $(p_1, p_2)$  и  $(q_1, q_2)$ . Точки  $M_2$  и  $N_2$  определяются непосредственно из условий задачи (рис. 139). Для нахождения точек  $M_1$  и  $N_1$  воспользуемся задачей 1;  $M_1 = p_1 \cap M_2 M_1$ , где  $M_2 M_1 \perp x$ ;  $N_1 = q_1 \cap N_2 N_1$ , где  $N_2 N_1 \perp x$ . Прямая  $M_1 N_1$  искомая.

Если одна из точек  $M_2, N_2$ , например  $N_2$ , не существует, то  $a_1$  есть прямая, проходящая через точку  $M_1$  и имеющая направление прямой  $q_1$ .

Пусть плоскость  $\bar{\sigma}$  пересекает плоскости проекций  $H$  и  $V$  соответственно по прямым  $\bar{s}_h$  и  $\bar{s}_v$  (рис. 140). Эти прямые называются *следами плоскости*  $\bar{\sigma}$  на плоскостях проекций:  $\bar{s}_h$  — *горизонтальный след*,  $\bar{s}_v$  — *вертикальный след*. На эюре эти прямые обозначаются через  $s_h$  и  $s_v$ . Если плоскость  $\sigma$  пересекает ось  $x$ , то следы плоскости пересекаются на этой оси (рис. 140), в противном случае они параллельны

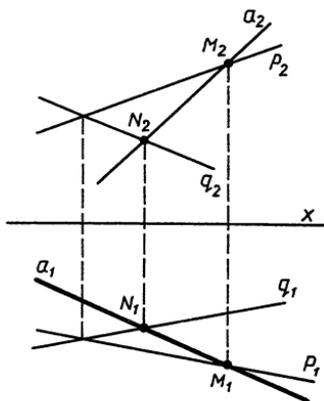


Рис. 139

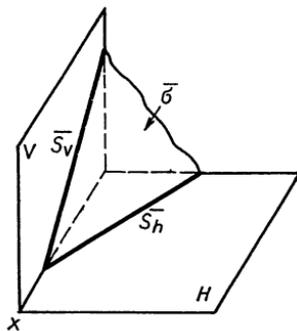


Рис. 140

оси  $x$  или совпадают с ней. Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, имеет только один след.

На эюре плоскость может быть задана своими следами. Так, на рисунке 141 заданы три плоскости  $\bar{\pi}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\tau}$  своими следами:  $\bar{\pi}(p_h, p_v)$ ,  $\bar{\sigma}(s_h, s_v)$ ,  $\bar{\tau}(t_h, t_v)$ . Плоскость  $\bar{\pi}$  имеет произвольное расположение по отношению к плоскостям проекций, плоскость  $\bar{\sigma}$  перпендикулярна к плоскости  $H$  (так как  $s_v \perp x$ ), а плоскость  $\bar{\tau}$  перпендикулярна к плоскости  $V$  (так как  $t_h \perp x$ ).

Отметим следующие очевидные утверждения, которые часто используются при решении задач на взаимное расположение прямых и плоскостей.

1<sup>0</sup>. Прямая  $\bar{a}(a_1, a_2)$ , не параллельная плоскостям проекций, лежит в плоскости  $\bar{\sigma}(s_h, s_v)$  тогда и только тогда, когда ее следы  $A_h$  и  $A_v$  лежат на соответствующих следах плоскости  $\bar{\sigma}$  (рис. 142).

2<sup>0</sup>. Прямая  $\bar{a}(a_1, a_2)$ , параллельная плоскости  $V$ , лежит в плоскости  $\bar{\sigma}(s_h, s_v)$  тогда и только тогда, когда  $A_h \in s_h$ ,  $a_1 \parallel x$ , а  $a_2 \parallel s_v$ , где  $A_h$  — горизонтальный след прямой  $\bar{a}$  (рис. 143, а).

3<sup>0</sup>. Прямая  $\bar{b}(b_1, b_2)$ , параллельная плоскости  $H$ , лежит в плоско-

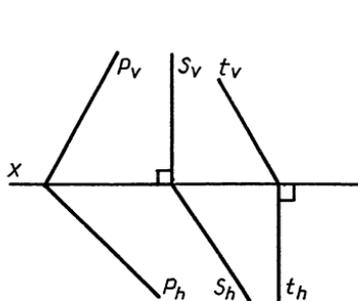


Рис. 141

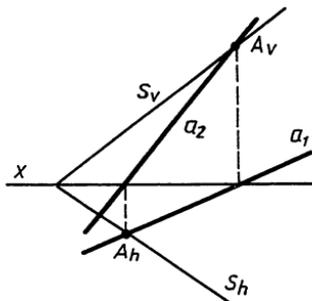


Рис. 142

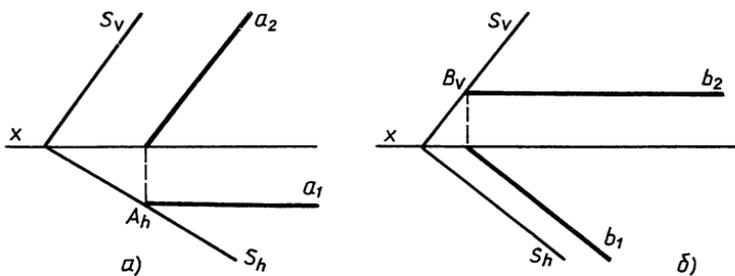


Рис. 143

сти  $\bar{\sigma}(s_h, s_v)$  тогда и только тогда, когда  $B_v \in s_v$ ,  $b_2 \parallel x$ ,  $b_1 \parallel s_h$ , где  $B_v$  — вертикальный след прямой (рис. 143, б).

**Задача 4.** Точка  $(M_1, M_2)$  лежит в плоскости, заданной следами  $(s_h, s_v)$ . По заданной точке  $M_1$  построить точку  $M_2$ .

**Решение.** В данной плоскости через точку  $(M_1, M_2)$  проведем прямую  $(a_1, a_2)$ , параллельную плоскости  $V$ . Горизонтальная проекция  $a_1$  этой прямой проходит через точку  $M_1$  параллельно оси  $x$ , поэтому ее легко построить (рис. 144). Точка  $A_h = a_1 \cap s_h$  — след этой прямой, а  $A_2$  — вертикальная проекция этого следа (см. рис. 144). Прямая  $a_2$  проходит через точку  $A_2$  параллельно  $s_v$ . Таким образом,  $M_2 = a_2 \cap M_1M_2$ , где  $M_1M_2 \perp x$ .

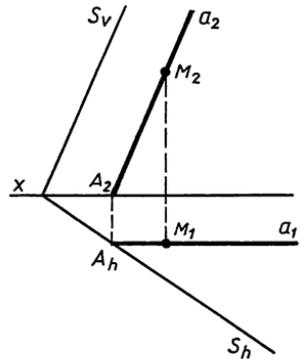


Рис. 144

**Задача 5.** Построить проекции линии пересечения двух плоскостей, заданных следами  $(s_h, s_v)$  и  $(p_h, p_v)$  (рис. 145, а).

**Решение.** Пусть  $(a_1, a_2)$  — искомая прямая, а  $A_h$  и  $A_v$  — ее следы. Так как прямая  $(a_1, a_2)$  лежит в данных плоскостях, то  $A_h \in s_h$ ,  $A_h \in p_h$ , поэтому  $A_h = s_h \cap p_h$ . Аналогично  $A_v = p_v \cap s_v$  (рис. 145, б). Теперь легко построить проекции  $(a_1, a_2)$  прямой по ее следам (задача, обратная задаче 2). Проведем

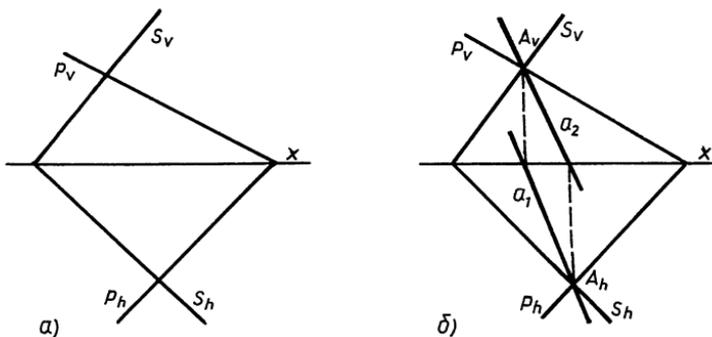


Рис. 145



ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ.  
МНОГОГРАННИКИ. ЛИНИИ  
И ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ  
ПРОСТРАНСТВЕ

Глава IV

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

В предыдущих главах мы изучали геометрию евклидова, аффинного и проективного пространств. Более общим является понятие топологического пространства, которое играет большую роль во многих разделах математики. В этой главе мы познакомимся с основными свойствами топологических пространств.

§ 35. Метрические пространства

1. Пусть  $E$  — непустое множество. Говорят, что на множестве  $E$  задана метрика  $\rho$ , если каждой упорядоченной паре элементов  $x, y \in E$  поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число  $\rho(x, y)$  таким образом, что:

- 1)  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  для любых  $x, y \in E$ ;
- 3)  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$  для любых  $x, y, z \in E$ .

Если  $\mathbf{R}_+$  — множество неотрицательных вещественных чисел, то можно коротко сказать, что метрикой на множестве  $E$  называется отображение  $\rho: E \times E \rightarrow \mathbf{R}_+$ , удовлетворяющее свойствам 1—3, указанным выше.

Множество  $E$  вместе с заданной на нем метрикой  $\rho$ , т. е. пару  $(E, \rho)$ , называют метрическим пространством, а элементы  $x, y, \dots, z, \dots$  множества  $E$  — точками этого пространства. Неотрицательное число  $\rho(x, y)$  называется расстоянием между точками  $x, y$ . Свойства 1—3, которым удовлетворяет функция  $\rho$ , называются аксиомами метрического пространства; свойство 1 называется аксиомой тождества, свойство 2 — аксиомой симметрии, а свойство 3 — аксиомой треугольника (или неравенством треугольника).

На любом непустом множестве  $E$  можно определить так называемую тривиальную метрику, полагая для  $x, y \in E$ :

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Ясно, что при таком определении метрики аксиомы 1—3 выполняются. Таким образом, всякое непустое множество можно превра-

тить в метрическое пространство. Заметим, что на одном и том же множестве, содержащем более одной точки, можно задать различные метрики. В самом деле, если  $\rho$  — метрика, заданная на таком множестве, и  $k$  — положительное число, отличное от единицы, то  $k\rho$  также является метрикой на множестве и эта метрика отлична от метрики  $\rho$ .

Рассмотрим примеры метрических пространств.

**Пример 1.** Для евклидова пространства  $E_n (n = 1, 2, \dots)$  рассмотрим отображение  $\rho : E_n \times E_n \rightarrow \mathbf{R}_+$  по закону: для любых точек  $M$  и  $N$  из  $E_n$  положим  $\rho(M, N) = |\overrightarrow{MN}|$  (именно так в ч. I, § 89 было определено расстояние между любыми двумя точками пространства  $E_n$ ). Мы замечаем, что в этом случае аксиомы 1 и 2 метрического пространства выполняются. Выполнимость аксиомы 3 доказана в ч. I, § 89. Следовательно, евклидово пространство  $E_n$  является метрическим пространством.

**Пример 2.** Пусть  $E$  — числовой отрезок  $[a, b]$ , т. е. множество всех вещественных чисел  $x$ , удовлетворяющих условию  $a \leq x \leq b$ , где  $a < b$ . Расстояние между точками  $x$  и  $y$  определяется формулой  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

В данном случае аксиомы 1 и 2 метрического пространства выполняются с очевидностью. Проверим выполнимость аксиомы 3. Если  $x_1, x_2$  и  $x_3$  — три произвольные точки из  $E$  (т. е. три числа, принадлежащие сегменту  $[a, b]$ ), то, очевидно,  $|x_1 - x_3| = |(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$ . Таким образом,  

$$\rho(x_1, x_3) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3).$$

**Пример 3.** На множестве  $E$  всех вещественных функций, непрерывных на числовом отрезке  $[a, b]$ , определим расстояние по формуле  $\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ , где  $x \in [a, b]$ .

Аксиомы 1 и 2 выполняются с очевидностью, проверку выполнимости аксиомы 3 предоставляем читателю.

Это метрическое пространство, точками которого являются функции, обозначается через  $C_{[a, b]}$ ; оно применяется в математическом анализе. Пространство  $C_{[a, b]}$  является примером функционального пространства.

**З а м е ч а н и е.** Аффинные и проективные пространства не являются метрическими пространствами, так как в этих пространствах не определена метрика.

**2.** Пусть  $(E, \rho)$  — метрическое пространство. *Открытым шаром*  $B(x_0, r)$  с центром в точке  $x_0$  радиуса  $r (r > 0)$  называется множество всех точек  $x$  из  $E$ , удовлетворяющих условию  $\rho(x_0, x) < r$ . Множество всех точек  $x \in E$ , для которых  $\rho(x_0, x) \leq r$ , называют *замкнутым шаром* и обозначают через  $\bar{B}(x_0, r)$ . Множество точек  $x \in E$ , удовлетворяющих условию  $\rho(x_0, x) = r$ , называют *сферой* и обозначают через  $S(x_0, r)$ . Открытый шар  $B(x_0, \varepsilon)$  называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0 \in E$ .

Пусть  $A$  — непустое подмножество метрического пространства  $(E, \rho)$ . Точка  $a \in A$  называется *внутренней точкой* множества  $A$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, содержащаяся полностью

в множестве  $A$ . Множество всех внутренних точек множества  $A$  называется *внутренностью* этого множества и обозначается через  $\overset{\circ}{A}$  (или  $\text{int } A$ ). Множество называется *открытым*, если все его точки являются внутренними. Таким образом, открытое множество  $A$  совпадает со своей внутренностью  $\overset{\circ}{A}$ . Примерами открытых множеств на числовой прямой являются числовой интервал  $]a, b[$ , а также объединение таких интервалов. На плоскости  $E_2$  открытыми множествами являются открытый круг, открытая полуплоскость, внутренность простого многоугольника и т. п.

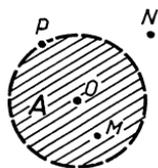


Рис. 147

Точка  $a \in E$  называется *внешней* точкой множества  $A$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, которая не содержит точек из  $A$ . Из этого определения следует, что точка  $a \in E$  является внешней точкой множества  $A \subset E$  тогда и только тогда, когда она является внутренней точкой его дополнения  $CA = E \setminus A$ .

Точка  $a \in E$  называется *граничной* точкой множества  $A$ , если каждая  $\varepsilon$ -окрестность этой точки имеет непустое пересечение как с множеством  $A$ , так и с его дополнением  $CA$ . Множество всех граничных точек множества  $A$  называется его *границей* и обозначается через  $b(A)$  или  $\partial A$ .

Пусть фигура  $A$  — открытый круг  $B(O, r)$  на евклидовой плоскости  $E_2$  (рис. 147). Каждая точка  $M$  этой фигуры является внутренней точкой множества  $A$ . Следовательно, открытый круг на евклидовой плоскости является открытым множеством. На рисунке 147 точка  $N$  плоскости  $E_2$  является внешней точкой множества  $A$ , а точка  $P$  — граничной точкой этого множества. Границей открытого круга  $B(O, r)$  служит окружность  $S(O, r)$ .

Аналогично открытый шар  $B(O, r)$  в евклидовом пространстве  $E_3$  является открытым множеством и его границей служит сфера  $S(O, r)$ .

Множество  $A$  метрического пространства  $(E, \rho)$  называется *ограниченным*, если существует шар, содержащий это множество. Так, на евклидовой плоскости любой многоугольник, любой круг или эллипс — множества ограниченные, а гипербола, парабола, синусоида — множества неограниченные.

3. Обозначим через  $\mathcal{T}$  множество всех открытых множеств метрического пространства  $(E, \rho)$ . Ясно, что  $E \in \mathcal{T}$ . Будем считать, что и пустое множество является открытым, т. е.  $\emptyset \in \mathcal{T}$ . Основные свойства множества  $\mathcal{T}$  выражаются в следующей теореме.

**Т е о р е м а.** В метрическом пространстве: 1) объединение любого семейства открытых множеств есть открытое множество; 2) пересечение любого конечного семейства открытых множеств есть открытое множество.

□ 1) Пусть  $U_\lambda$  — открытые множества метрического пространства  $(E, \rho)$ , т. е.  $U_\lambda \in \mathcal{T}$ , где индекс  $\lambda$  пробегает некоторое множество значений  $\Lambda$  (возможно и бесконечное).

Рассмотрим объединение всех множеств  $U_\lambda$ , которое обозначим через  $U$ :

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}. \quad (1)$$

Возьмем произвольную точку  $x_0$  из  $U$ . В силу равенства (1) найдется по крайней мере одно значение индекса  $\lambda = \lambda_0$ , такое, что  $x_0 \in U_{\lambda_0}$ . Так как  $U_{\lambda_0}$  — открытое множество, то для его точки  $x_0$  существует  $\varepsilon$ -окрестность  $B(x_0, \varepsilon)$ , содержащаяся в множестве  $U_{\lambda_0}$ :  $B(x_0, \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$ . Но так как  $U_{\lambda_0} \subset U$ , то  $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ . Итак, для любой точки  $x_0$  из  $U$  найдется  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, полностью содержащаяся в множестве  $U$ . Следовательно,  $U$  — открытое множество.

2) Свойство 2 достаточно доказать для двух открытых множеств. Пусть  $U_1, U_2$  — открытые множества. Если  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , то наше утверждение справедливо, так как пустое множество является открытым. Рассмотрим поэтому случай, когда  $U_1 \cap U_2 = V \neq \emptyset$ . Возьмем в множестве  $V$  произвольную точку  $x_0$ , тогда  $x_0 \in U_1$  и  $x_0 \in U_2$ . Так как  $U_1, U_2$  — открытые множества, то существует  $\varepsilon_1$ -окрестность  $B(x_0, \varepsilon_1)$ , содержащаяся в множестве  $U_1$ , и  $\varepsilon_2$ -окрестность  $B(x_0, \varepsilon_2)$ , содержащаяся в множестве  $U_2$ . Пусть  $\varepsilon$  — наименьшее из чисел  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Тогда  $B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_1) \subset U_1$  и  $B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_2) \subset U_2$ . Следовательно,  $B(x_0, \varepsilon) \subset V$ .

Итак, множество  $V$  вместе с каждой своей точкой содержит и некоторую  $\varepsilon$ -окрестность этой точки. Это и значит, что множество  $V$  является открытым. ■

## § 36. Топологические пространства

1. Опираясь на основные свойства открытых множеств в метрическом пространстве, сформулированные в теореме § 35, введем общее понятие топологического пространства.

Пусть в множестве  $X$  каким-либо способом выделена система  $\mathcal{T}$  подмножеств, обладающая следующими свойствами.

I. Пустое множество  $\emptyset$  и само множество  $X$  принадлежат системе  $\mathcal{T}$ .

II. Объединение любого семейства подмножеств из системы  $\mathcal{T}$  принадлежит системе  $\mathcal{T}$ .

III. Пересечение любого конечного семейства подмножеств из системы  $\mathcal{T}$  принадлежит системе  $\mathcal{T}$ .

В этом случае говорят, что на множестве  $X$  определена *топологическая структура* (или *топология*), а пару  $(X, \mathcal{T})$  называют *топологическим пространством*. Свойства I, II, III называются аксиомами топологической структуры.

Элементы множества  $X$  называют *точками*, а элементы из  $\mathcal{T}$  — *открытыми* множествами пространства  $(X, \mathcal{T})$ . Если уже известно, какая топология  $\mathcal{T}$  выбрана на множестве  $X$ , то топологическое пространство  $(X, \mathcal{T})$  обозначают просто через  $X$ .

Рассмотрим примеры топологических пространств.

**Пример 1.** Рассмотрим метрическое пространство  $(E, \rho)$ . Из п. 3 § 35 заключаем, что метрическое пространство  $(E, \rho)$  является топологическим. Его топология  $\mathcal{T}$  задается при помощи открытых шаров (см. в п. 2 § 35 определение открытого множества простран-

ства  $(E, \rho)$ . Говорят, что топология этого пространства *индуцирована метрикой*  $\rho$ .

**Пример 2.** В множестве  $\mathbf{R}^n$  можно ввести понятие открытого множества следующим образом. Возьмем  $n$  числовых интервалов  $]a^i, b^i[$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Будем называть открытым координатным параллелепипедом множество всех точек  $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , удовлетворяющих условию  $a^i < x^i < b^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Множество  $F \subset \mathbf{R}^n$  назовем открытым, если оно вместе с каждой своей точкой содержит и некоторый открытый координатный параллелепипед, содержащий эту точку. Пустое множество  $\emptyset$ , как обычно, считаем открытым. Нетрудно проверить, что семейство всех определенных таким образом открытых множеств удовлетворяет аксиомам I, II и III топологической структуры и, значит, определяет некоторую топологию на множестве  $\mathbf{R}^n$  (ее называют *естественной топологией*). Эта топология превращает множество  $\mathbf{R}^n$  в топологическое пространство. Оно называется *числовым пространством* (*числовой прямой* при  $n = 1$ ).

**Пример 3.** На аффинной плоскости  $A_2$  рассмотрим параллелограмм  $ABCD = P$ . Множество  $\mathring{P}$  всех точек  $M$ , удовлетворяющих условию  $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ , называется внутренностью параллелограмма  $P$ . Множество  $F \subset A_2$  называется открытым, если оно вместе с каждой своей точкой содержит и внутренность некоторого параллелограмма, содержащего эту точку. Это значит, что для каждой точки  $M \in F$  существует такой параллелограмм  $P$ , что его внутренность  $\mathring{P}$  удовлетворяет условию  $M \in \mathring{P} \subset F$ .

И здесь можно проверить, что множество  $\mathcal{T}$  определенных таким образом на плоскости  $A_2$  открытых множеств удовлетворяет аксиомам I, II, III топологической структуры. Следовательно, аффинная плоскость является топологическим пространством. Точно так же можно показать, что аффинное пространство  $A_n$  является топологическим пространством. Можно также ввести топологию в проективном пространстве  $P_n$  и рассматривать это пространство как пример топологического.

**Пример 4.** В произвольном множестве  $X$  рассмотрим семейство  $\mathcal{T}$  его подмножеств  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ , состоящее из двух элементов: самого множества  $X$  и пустого множества  $\emptyset$ . Очевидно, семейство подмножеств  $\mathcal{T}$  удовлетворяет аксиомам I, II, III, и, значит,  $\mathcal{T}$  — топология, определенная на множестве  $X$ . Эта топология называется *антидискретной*, а пространство  $(X, \mathcal{T})$  — *антидискретным топологическим пространством*.

**Пример 5.** Пусть  $X$  — некоторое множество, а  $\mathcal{T} = P(X)$  — семейство всех подмножеств множества  $X$ . Аксиомы I, II, III опять будут удовлетворены. Эта топология называется *дискретной*, а пространство  $(X, \mathcal{T})$  — *дискретным топологическим пространством*.

Примеры 4, 5 показывают, что всякое множество  $X$  можно превратить в топологическое пространство.

2. Пусть  $(X, \mathcal{T})$  — топологическое пространство. *Окрестностью* точки  $x \in X$  называют любое открытое множество, содержащее точ-

ку  $x$ . Из этого определения следует, что подмножество  $U \subset X$  тогда и только тогда является окрестностью каждой своей точки, когда оно открыто (т. е. когда  $U \in \mathcal{T}$ ).

Семейство  $\mathcal{B}$  открытых подмножеств топологического пространства  $(X, \mathcal{T})$  называется *базой* топологии  $\mathcal{T}$ , если для каждой точки  $x \in X$  и любой ее окрестности  $U_x$  существует такой элемент  $B_x$  из  $\mathcal{B}$ , который удовлетворяет условию  $x \in B_x \subset U_x$ .

Так, множество интервалов образует базу естественной топологии на множестве  $\mathbf{R}$  вещественных чисел. Открытые шары в евклидовом пространстве образуют базу топологии этого пространства. Открытые координатные параллелепипеды в  $\mathbf{R}^n$  образуют базу естественной топологии в числовом пространстве  $\mathbf{R}^n$ . Ясно, что всякая топология  $\mathcal{T}$  имеет базу (например, можно взять  $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ ). Основное свойство базы топологии сформулировано в следующей теореме.

**Т е о р е м а 1.** Семейство  $\mathcal{B}$  открытых множеств топологического пространства  $(X, \mathcal{T})$  является базой топологии  $\mathcal{T}$  тогда и только тогда, когда каждый элемент из  $\mathcal{T}$  является объединением элементов из  $\mathcal{B}$ .

□ Пусть  $\mathcal{B}$  является базой топологии  $\mathcal{T}$ , а  $U$  — некоторое открытое множество, т. е.  $U \in \mathcal{T}$ . По определению базы для любой точки  $x \in U$  существует такой элемент  $B_x$  из  $\mathcal{B}$ , что  $x \in B_x \subset U$ . Рассмотрим множество элементов  $B_x$  из  $\mathcal{B}$ , где  $x$  — любая точка из  $U$ . Очевидно,  $U$  является объединением элементов  $B_x$ . Обратное утверждение очевидно. ■

Пространство  $(X, \mathcal{T})$  называется *пространством со счетной базой*, если топология  $\mathcal{T}$  имеет хотя бы одну базу, которая состоит из конечного или счетного семейства открытых подмножеств из  $X$ .

Так, базой естественной топологии числовой прямой  $\mathbf{R}$  служит семейство интервалов с рациональными концами. Эта база счетна. Следовательно,  $\mathbf{R}$  — пространство со счетной базой. Точно так же убеждаемся, что числовое пространство  $\mathbf{R}^n$  — пространство со счетной базой. Отсюда следует, что аффинное и евклидово пространства являются пространствами со счетной базой.

**3.** Пусть  $A$  — непустое множество топологического пространства  $(X, \mathcal{T})$ . Точка  $a \in A$  называется *внутренней* точкой множества  $A$ , если существует окрестность этой точки, содержащаяся полностью в множестве  $A$ . Точка  $a \in X$  называется *внешней* точкой множества  $A$ , если существует окрестность этой точки, которая не содержит ни одной точки из  $A$ , и *границной* точкой множества  $A$ , если каждая окрестность этой точки имеет непустое пересечение как с множеством  $A$ , так и с его дополнением  $CA$  (ср. с определениями внутренности, внешних и граничных точек множества в метрическом пространстве в п. 2 § 35). Понятия внутренности  $\overset{\circ}{A}$  и границы  $b(A)$  множества  $A$  вводятся точно так же, как и в метрическом пространстве. И здесь множество  $A$  открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью:

$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}. \quad (1)$$

Точка  $x$  называется *точкой прикосновения* множества  $A$ , если лю-

бая ее окрестность имеет с множеством  $A$  непустое пересечение. Из этого определения следует, что любая точка множества  $A$  и любая точка его границы  $b(A)$  являются точками прикосновения этого множества. Множество  $\bar{A}$  всех точек прикосновения множества  $A$  называется его *замыканием*. Очевидно, что  $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup b(A)$ . Так, замыканием интервала  $]a, b[ \subset \mathbf{R}$  является числовой отрезок  $[a, b]$ , замыканием открытого круга  $B(O, r) \subset E_2$  является замкнутый круг  $\bar{B}(O, r)$ .

Из определения внешней точки и определения точки прикосновения множества  $A$  следует, что если точка  $x$  не является точкой прикосновения множества  $A$ , то эта точка является внешней к множеству  $A$ . Обратное: если  $x$  — внешняя точка к множеству  $A$ , то она не может служить точкой прикосновения этого множества. Следовательно, дополнение к замыканию множества  $A$  совпадает с внутренностью дополнения этого множества, т. е. справедливо равенство

$$C\bar{A} = \overset{\circ}{CA}. \quad (2)$$

Множество  $A$  в топологическом пространстве  $(X, \mathcal{T})$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $CA$  открыто.

Примерами замкнутых множеств являются числовой отрезок  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ , замкнутый круг  $\bar{B}(O, r) \subset E_2$ . Топологическое пространство  $(X, \mathcal{T})$  замкнуто и открыто одновременно.

В следующей теореме сформулирован признак замкнутости множества.

**Теорема 2.** *Множество  $A$  в топологическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда это множество совпадает со своим замыканием.*

□ Пусть множество  $A$  в топологическом пространстве  $(X, \mathcal{T})$  является замкнутым. Это значит, что  $CA \in \mathcal{T}$ . Но тогда по формуле (1)

$CA = \overset{\circ}{CA}$ . Учитывая равенство (2), находим  $CA = C\bar{A}$ . Отсюда  $A = \bar{A}$ . (Здесь мы учли, что для всякого подмножества  $Y \subset X$  справедливо  $CCY = Y$ .)

Обратно: пусть  $A = \bar{A}$ . Тогда  $CA = C\bar{A}$  и по формуле (2)  $CA = \overset{\circ}{CA}$ . Отсюда по (1) получаем  $CA \in \mathcal{T}$ , поэтому само множество  $A$  замкнуто. ■

4. Рассмотрим какое-либо подмножество  $A$  в топологическом пространстве  $(X, \mathcal{T})$ . Обозначим через  $T$  множество пересечений элементов из  $\mathcal{T}$  с множеством  $A$ , т. е.  $T = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$ .

Можно проверить, что семейство  $T$  подмножеств из  $A$  удовлетворяет аксиомам I, II, III топологии. Следовательно,  $(A, T)$  — топологическое пространство. Оно называется *подпространством* пространства  $(X, \mathcal{T})$ . О топологии  $T$  мы скажем, что она *индуцирована* на множестве  $A$  топологией  $\mathcal{T}$ .

Например, топология евклидовой плоскости  $E_2$  индуцирует на окружности  $\gamma \subset E_2$  топологию  $T$ , элементами которой служат пересечения открытых множеств плоскости  $E_2$  с окружностью  $\gamma$ . Окружность  $\gamma$ , наделенная топологией  $T$ , является подпространством в  $E_2$ .

## § 37. Непрерывность и гомеоморфизм

Как известно, в математическом анализе большую роль играют непрерывные функции числового аргумента. Их обобщением являются непрерывные отображения, которые занимают существенное место в геометрии.

1. Пусть  $(X, \mathcal{T})$  и  $(Y, T)$  — топологические пространства. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *непрерывным* в точке  $x \in X$ , если для любой окрестности  $V$  точки  $f(x)$  в пространстве  $Y$  найдется окрестность  $U$  точки  $x$  в пространстве  $X$ , такая, что  $f(U) \subset V$ . Отображение называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке из  $X$ . Мы замечаем, что если пространства  $X$  и  $Y$  являются числовой прямой  $\mathbb{R}$ , то это определение переходит в известное из анализа определение непрерывной функции  $f(x)$ .

Следующая теорема выражает критерий непрерывности отображения.

**Т е о р е м а.** *Отображение  $f$  топологического пространства  $(X, \mathcal{T})$  в топологическое пространство  $(Y, T)$  непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества из  $Y$  является открытым множеством в  $X$ .*

□ Пусть отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно и  $V$  — какое-либо открытое множество из  $Y$ , т. е.  $V \in T$ . Мы докажем, что множество  $U$  всех тех точек  $x \in X$ , для которых  $f(x) \in V$ , открыто в пространстве  $X$ , т. е. что  $U \in \mathcal{T}$ .

Возьмем какую-либо точку  $x_0 \in U$ . Так как  $f(x_0) \in V$ , то множество  $V$  является окрестностью точки  $f(x_0)$ . По условию отображение  $f$  непрерывно в точке  $x_0$ . Поэтому существует такая окрестность  $U_{x_0}$  точки  $x_0$ , что  $f(U_{x_0}) \subset V$ . Но тогда  $U_{x_0} \subset U$ . Следовательно, множество  $U$  вместе с каждой своей точкой  $x_0$  содержит и некоторую ее окрестность. Как мы знаем, таким свойством обладают только открытые множества, и потому  $U \in \mathcal{T}$ .

Обратно: пусть в отображении  $f$  прообраз любого открытого множества является множеством открытым. Докажем, что отображение  $f$  непрерывно в каждой точке пространства  $X$ . Возьмем какую-либо точку  $x_0 \in X$  и любую окрестность  $V$  точки  $f(x_0)$ . По условию прообраз  $U$  множества  $V$  открыт в  $X$ . Имеем  $x_0 \in U$  и  $f(U) \subset V$ . Итак, для любой окрестности  $V$  точки  $f(x_0)$  нашлась такая окрестность  $U$  точки  $x_0$ , что  $f(U) \subset V$ . По определению это и значит, что отображение непрерывно в точке  $x_0$ . ■

2. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *гомеоморфизмом* (или топологическим отображением), если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Это значит, что  $f$  удовлетворяет двум условиям: 1)  $f$  — биекция; 2)  $f$  и  $f^{-1}$  — непрерывные отображения.

Если существует гомеоморфизм  $f: X \rightarrow Y$ , то пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомеоморфными*. В этом случае пишут:  $X \sim Y$ .

Таким образом, на классе  $M$  топологических пространств мы имеем отношение  $\sim$ . Нетрудно доказать, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, оно является отношением эквивалентности на классе  $M$ .

Элементы фактор-множества  $M/\sim$  называются *топологическими типами*.

О двух гомеоморфных пространствах мы скажем, что они топологически эквивалентны (принадлежат к одному и тому же топологическому типу). Те свойства пространства  $(X, \mathcal{T})$ , которые не меняются при гомеоморфизмах, называются *топологическими свойствами* (или топологическими инвариантами). Изучение таких свойств и является предметом топологии — большого раздела математики.

**Пример 1.** Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $E_3$  с топологией, индуцированной метрикой  $\rho$ , и числовое трехмерное пространство  $\mathbf{R}^3$  с естественной топологией (см. § 36, примеры 1 и 2). Если в пространстве  $E_3$  задана прямоугольная система координат  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ , то устанавливается биективное отображение  $f: E_3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  по закону  $f(M) = m$ . Здесь  $M \in E_3$ ,  $m \in \mathbf{R}^3$ , причем  $m = (x^1, x^2, x^3)$ , где  $x^1, x^2, x^3$  — координаты точки  $M$  в системе  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ . Докажем, что это отображение является гомеоморфизмом.

Пусть  $M_0$  — произвольная точка пространства  $E_3$ , а  $m_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$  — ее образ. Возьмем в пространстве  $\mathbf{R}^3$  произвольную окрестность  $V_0$  точки  $m_0$  и рассмотрим открытый координатный параллелепипед  $V(a^i < x_0^i < b^i, i = 1, 2, 3)$ , содержащий точку  $m_0$  и содержащийся в окрестности  $V_0$  (см. § 36, пример 2). Пусть  $\varepsilon$  — наименьшее из чисел  $|a^i - x_0^i|, |b^i - x_0^i|, i = 1, 2, 3$ . Тогда, очевидно, для  $\varepsilon$ -окрестности  $U$  точки  $M_0$  имеем  $f(U) \subset V \subset V_0$ . Следовательно, отображение  $f$  непрерывно в точке  $M_0$ . Так как  $M_0$  — произвольная точка из  $E_3$ , то отображение  $f$  непрерывно.

Из описанного построения можно заключить, что  $f^{-1}: \mathbf{R}^3 \rightarrow E_3$  также является непрерывным, т. е.  $f$  — гомеоморфизм. Таким образом,  $E_3 \sim \mathbf{R}^3$ . Таким же способом можно доказать, что  $E_2 \sim \mathbf{R}^2$  и  $E_1 \sim \mathbf{R}^1$ . Аналогично можно убедиться в том, что аффинное пространство  $A_3$  гомеоморфно числовому пространству  $\mathbf{R}^3$ , а аффинная плоскость  $A_2$  гомеоморфна числовому пространству  $\mathbf{R}^2$ .

**Пример 2.** Рассмотрим на евклидовой плоскости  $E_2$  полуокружность  $\gamma$  с концами в точках  $A$  и  $B$  и отрезок  $I = A_0B_0$ , где  $A_0$  и  $B_0$  — ортогональные проекции точек  $A$  и  $B$  на касательную  $d$  к полуокружности  $\gamma$ , параллельную прямой  $AB$  (рис. 148). Топология евклидовой плоскости  $E_2$  индуцирует на множестве  $\gamma$  некоторую топологию  $\mathcal{T}$ , а на множестве  $I$  топологию  $T$ , и мы имеем топологические пространства  $(\gamma, \mathcal{T})$  и  $(I, T)$ . Докажем, что они гомеоморфны.

Пусть  $f$  — ортогональное проектирование полуокружности  $\gamma$  на отрезок  $A_0B_0$ . Ясно, что  $f$  — взаимно однозначное отображение. Докажем, что это отображение является непрерывным. Для этого рассмотрим произвольную точку  $M_0 \in \gamma$  и ее образ  $N_0 = f(M_0)$ . Нетрудно заметить, что для любой окрестности  $V$  точки  $N_0$  можно указать такую окрест-

ность  $U$  точки  $M_0$  такую, что  $f(U) \subset V$ . Следовательно, отображение  $f$  непрерывно в точке  $M_0$ . Так как  $M_0$  — произвольная точка из  $\gamma$ , то отображение  $f$  непрерывно.

Пусть  $f$  — ортогональное проектирование полуокружности  $\gamma$  на отрезок  $A_0B_0$ . Ясно, что  $f$  — взаимно однозначное отображение. Докажем, что это отображение является непрерывным. Для этого рассмотрим произвольную точку  $M_0 \in \gamma$  и ее образ  $N_0 = f(M_0)$ . Нетрудно заметить, что для любой окрестности  $V$  точки  $N_0$  можно указать такую окрест-

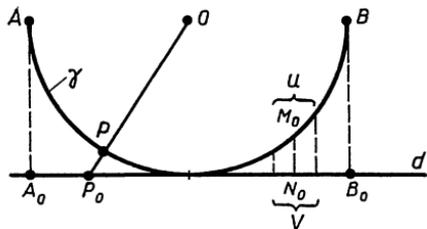


Рис. 148

ность  $U$  точки  $M_0$ , что  $f(U) \subset V$  (рис. 148). Значит, отображение  $f$  непрерывно в точке  $M_0$ , и так как  $M_0$  — произвольная точка из  $\gamma$ , то отображение  $f$  непрерывно. Как и в случае отображения  $f$ , мы убеждаемся, что обратное отображение  $f^{-1}$  непрерывно. Таким образом, полуокружность с концами гомеоморфна отрезку. Аналогично убеждаемся, что полуокружность  $\gamma'$  без концов гомеоморфна отрезку  $I'$  без концов.

Пусть  $O$  — центр полуокружности  $\gamma$  (рис. 148). Рассмотрим отображение  $g: \gamma' \rightarrow d$  полуокружности  $\gamma'$  без концов на прямую  $d$  по закону  $g(P) = P_0$ , где  $P_0$  — точка пересечения луча  $OP$  с прямой  $d$ . Легко видеть, что и это отображение является гомеоморфизмом. Композиция  $g \circ f^{-1}$  двух гомеоморфизмов  $f^{-1}: I' \rightarrow \gamma'$  и  $g: \gamma' \rightarrow d$  также является гомеоморфизмом. Таким образом, отрезок без концов гомеоморфен прямой линии. Отсюда следует, что числовой интервал  $]a, b[$  гомеоморфен числовой прямой  $\mathbf{R}$ . С помощью аналогичных построений легко обосновать следующие утверждения:

- 1<sup>0</sup>. Полусфера с границей гомеоморфна замкнутому кругу.
- 2<sup>0</sup>. Полусфера без границы гомеоморфна открытому кругу.
- 3<sup>0</sup>. Открытый круг гомеоморфен плоскости.
- 4<sup>0</sup>. Выпуклый многоугольник гомеоморфен замкнутому кругу.
- 5<sup>0</sup>. Луч гомеоморфен полуинтервалу  $[a, b[$ .

3. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм. Если пространства  $X$  и  $Y$  совпадают, то топологическое отображение  $f: X \rightarrow X$  называют гомеоморфизмом пространства  $X$ . Примером гомеоморфизма является любое подобие евклидовой плоскости  $E_2$ , если эту плоскость рассматривать как топологическое пространство, топология которого индуцирована метрикой плоскости  $E_2$ . Другим примером гомеоморфизма является любое аффинное преобразование аффинной плоскости  $A_2$ , если эту плоскость рассматривать как топологическое пространство, топология которого вводится, как в примере 3 § 36.

### § 38. Отделимость. Компактность. Связность

В этом параграфе будут выделены три класса топологических пространств, наиболее важных в математике.

1. Топологическое пространство называется *отделимым* (или хаусдорфовым<sup>1</sup>), если у любых его различных точек существуют непересекающиеся окрестности.

Например, отделимыми являются числовое пространство, евклидово пространство, все метрические, аффинное и проективное пространства. Антидискретное пространство, содержащее не менее двух точек, очевидно, неотделимо (см. § 36, пример 4).

*Покрытием* множества  $X$  называется такое семейство  $(X_\lambda)$  его подмножеств, что множество  $X$  является объединением этих подмножеств. Покрытие  $(X_\lambda)$  топологического пространства  $(X, \mathcal{T})$  назы-

<sup>1</sup> Ф. Хаусдорф (1868—1942) — немецкий математик, который впервые сформулировал понятие топологического пространства и ввел аксиому отделимости; известен работами по теории множеств и топологии.

вается *открытым*, если каждое  $X_\lambda$  открыто. Подпокрытием покрытия  $(X_\lambda)$  называется такое его подсемейство, которое само является покрытием.

Топологическое пространство  $(X, \mathcal{T})$  называется *компактным*, если оно удовлетворяет аксиоме Бореля — Лебега: каждое открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Множество  $A$  топологического пространства  $(X, \mathcal{T})$  называется *компактным*, если подпространство  $A$  компактно. Так, числовой отрезок  $[a, b]$  — компактное множество в числовом пространстве  $\mathbf{R}$ . Окружность, треугольник, сфера в евклидовом пространстве — компактные подпространства. Все евклидово пространство (евклидова плоскость, евклидова прямая) не является компактным. Можно доказать, что подмножество в евклидовом пространстве  $E_n$  компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Например, открытый шар  $B(a, r)$  — некомпактное множество (оно ограничено, но не замкнуто), полупространство вместе со своей границей — некомпактное множество (оно замкнуто, но не ограничено), замкнутый шар  $\bar{B}(a, r)$  и сфера  $S(a, r)$  компактны.

2. Покрытие множества  $X$  называется *разбиением* этого множества, если элементы покрытия — непустые множества и любые два различных элемента покрытия не пересекаются.

Топологическое пространство  $(X, \mathcal{T})$  называется *связным*, если не существует его разбиения на два открытых множества. Подмножество  $A \subset X$  называется *связным*, если оно является связным подпространством в  $X$ .

Можно доказать, что евклидово, аффинное, проективное пространства связны. Сфера, плоскость, прямая, эллипс — примеры связных подмножеств евклидова пространства.

Докажем, что гипербола  $\Gamma$  на евклидовой плоскости не является связным множеством. В самом деле, пусть  $A$  и  $B$  — ветви этой гиперболы. Обозначим через  $T$  топологию, индуцированную на множестве  $\Gamma$  топологией евклидовой плоскости. Тогда  $(\Gamma, T)$  — подпространство в  $E_2$ . Для каждой точки  $M_0 \in A$  можно указать открытое множество из  $(\Gamma, T)$ , которое содержит точку  $M_0$  и содержится в  $A$ . Следовательно,  $A$  открыто в пространстве  $(\Gamma, T)$ . Аналогично убеждаемся, что и  $B$  открыто в этом пространстве. Мы имеем  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ ,  $A \cup B = \Gamma$ ,  $A \cap B = \emptyset$ . Таким образом, для пространства  $(\Gamma, T)$  существует его разбиение на два открытых множества  $A$  и  $B$ . Значит, гипербола не является связным множеством.

**З а м е ч а н и е.** Понятия отделимости, компактности и связности были определены с помощью соответствующих требований, предъявляемых к топологии пространства, т. е. к семейству  $\mathcal{T}$  всех его открытых множеств. Отсюда следует, что *свойство пространства быть отделимым, компактным или связным сохраняется при гомеоморфизмах*.

## § 39. Многообразия

1. Пусть  $(X, \mathcal{T})$  — топологическое пространство.  $k$ -мерной координатной системой в этом пространстве называется гомеоморфизм  $\varphi$  некоторого открытого множества  $U \subset X$  на открытое множество числового пространства  $\mathbf{R}^k$ . При этом пару  $(U, \varphi)$  называют  $k$ -мерной картой, а множество  $U$  — координатной окрестностью этой карты.

Если  $x \in U$ , то  $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbf{R}^k$ . Вещественные числа  $x^i$  называются *координатами точки  $x$*  в данной карте.

$k$ -мерным топологическим многообразием (или просто  $k$ -мерным многообразием) называют отделимое топологическое пространство  $(X, \mathcal{T})$  со счетной базой, если это пространство можно покрыть координатными окрестностями  $k$ -мерных карт.

В топологии доказывают, что число  $k$  (размерность многообразия) является топологическим инвариантом, т. е. не меняется при любых гомеоморфизмах пространства  $(X, \mathcal{T})$ . Мы ограничиваемся рассмотрением только одномерных и двумерных многообразий. Рассмотрим примеры таких многообразий.

**Пример 1.** Числовое пространство  $\mathbf{R}^k$  ( $k = 1, 2$ ) отделимо и имеет счетную базу. Можно рассмотреть  $k$ -мерную карту  $(U, \varphi)$ , где  $U = \mathbf{R}^k$  и  $\varphi$  — тождественное преобразование пространства  $\mathbf{R}^k$ . Следовательно,  $\mathbf{R}^k$  является  $k$ -мерным многообразием.

Точно так же убеждаемся в том, что *аффинное пространство  $A_k$*  и *евклидово пространство  $E_k$*  являются  $k$ -мерными многообразиями. Можно доказать, что и проективное пространство  $P_k$  является  $k$ -мерным многообразием.

**Пример 2.** Пусть  $\gamma$  — окружность радиуса  $r$  на евклидовой плоскости  $E_2$ . Возьмем прямоугольную систему координат  $Oxy$  с началом в центре  $O$  окружности (рис. 149) и обозначим через  $A$  и  $B$  точки пересечения окружности с осью  $Oy$ . Рассмотрим множества  $U_1 = \gamma \setminus \{A\}$  (окружность  $\gamma$ , «проколотая» в точке  $A$ ) и  $U_2 = \gamma \setminus \{B\}$  (окружность  $\gamma$ , «проколотая» в точке  $B$ ). Рассмотрим далее отображения  $\varphi$  и  $\psi$ , где  $\varphi: U_1 \rightarrow Ox$  по закону: если  $M \in U_1$ , то  $\varphi(M) = M_0$  — точка пересечения луча  $AM$  с осью  $Ox$ ; отображение  $\psi: U_2 \rightarrow Ox$  по закону: если  $N \in U_2$ , то  $\psi(N) = N_0$  — точка пересечения луча  $BN$  с осью  $Ox$ .

Нетрудно заметить, что  $U_1, U_2$  — открытые множества на окружности  $\gamma$  (в индуцированной топологии),  $\varphi$  — гомеоморфизм открытого подмножества  $U_1 \subset \gamma$  на ось  $Ox$  (которая гомеоморфна  $\mathbf{R}$ ). Таким образом,  $(U_1, \varphi)$  — карта на окружности  $\gamma$ , а  $(U_2, \psi)$  — другая карта этой окружности. Координатные окрестности  $U_1, U_2$  этих карт покрывают всю окружность  $\gamma$ . Значит, *окружность — одномерное многообразие*. Можно доказать, что *любое связное одномерное некомпактное многообразие гомеоморфно прямой, а связное одномерное компактное многообразие гомеоморфно окружности*.

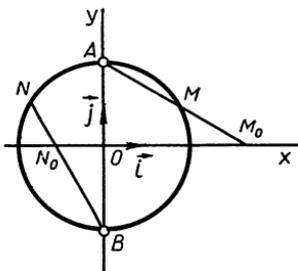


Рис. 149

Аналогично примеру 2 можно доказать, что сфера в евклидовом пространстве  $E_3$  является двумерным многообразием. Двумерными многообразиями также являются вещественный эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, вещественные цилиндры второго порядка.

Следует только заметить, что сфера и эллипсоид являются компактными (как ограниченные замкнутые подмножества в евклидовом пространстве), а остальные из указанных поверхностей второго порядка являются некомпактными двумерными многообразиями.

2. В геометрии часто встречаются так называемые многообразия с краем.

Обозначим через  $\mathbf{R}_+^k$  множество тех точек из  $\mathbf{R}^k$  ( $k = 1, 2$ ), у которых координата  $x^k$  удовлетворяет условию  $x^k \geq 0$ . Следовательно,  $\mathbf{R}_+^k$  — это замкнутое полупространство в  $\mathbf{R}^k$ .

Пространство  $(X, \mathcal{T})$  называется  $k$ -мерным многообразием с краем, если оно отделимо, имеет счетную базу и его точки можно разбить на два непустых класса так, что каждая из точек одного класса (точки внутренние) имеет окрестность, гомеоморфную пространству  $\mathbf{R}^k$ , а каждая из точек другого класса (точки краевые) имеет окрестность, гомеоморфную  $\mathbf{R}_+^k$ , но не имеет окрестности, гомеоморфной  $\mathbf{R}^k$ .

Множество всех краевых точек называется *краем* многообразия  $(X, \mathcal{T})$ .

Пример 3. Отрезок  $[a, b]$  числовой прямой  $\mathbf{R}$  является (в индуцированной топологии) одномерным многообразием с краем. Край состоит из точек  $a$  и  $b$ .

Точно так же убеждаемся, что отрезок и замкнутый луч в аффинном пространстве  $A_3$  (или в евклидовом пространстве  $E_3$ ) являются одномерными многообразиями с краем. Край отрезка состоит из его концов, а край луча — из его начала. Можно доказать, что *любое связное одномерное многообразие с краем гомеоморфно либо отрезку, либо замкнутому лучу*.

Пример 4. Выпуклый многоугольник на евклидовой плоскости является двумерным многообразием с краем. Краем служит граница этого многоугольника. Заметим, что внутренность этого многоугольника является двумерным многообразием в обычном смысле (без края), хотя это множество имеет границу на плоскости, но не содержит ее.

Пример 5. Замкнутая евклидова полуплоскость, т. е. полуплоскость вместе с ограничивающей ее прямой  $a$ , — двумерное многообразие с краем; краем служит прямая  $a$ . Это пример некомпактного многообразия с краем.

Пример 6. В евклидовом пространстве  $E_3$  зададим прямоугольную систему координат  $Oxyz$  и рассмотрим в плоскости  $Oxy$  прямоугольник

$$ABCD = [M(x, y, 0) \mid |x| \leq a, |y| \leq b], \text{ где } a > 0 \text{ и } b > 0. (1)$$

Каждую точку  $M(x, b)$  стороны  $AB$  прямоугольника отождествим с точкой  $M'(x, -b)$  стороны  $DC$ , которая симметрична точке  $M$  относительно оси  $Ox$  (рис. 150, а). Тогда прямоугольник превратится

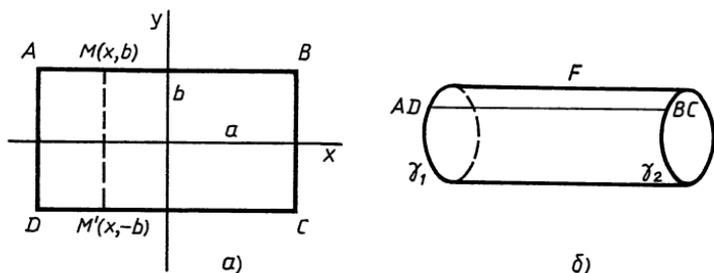


Рис. 150

в фигуру  $F$ , напоминающую боковую поверхность цилиндра (рис. 150, б). Топология пространства  $E_3$  индуцирует на фигуре  $F$  некоторую топологию  $T$ . Мы замечаем, что пространство  $(F, T)$  является двумерным многообразием с краем. Его край состоит из двух фигур  $\gamma_1, \gamma_2$ , каждая из которых гомеоморфна окружности.

Полученное в примере 6 многообразие  $(F, T)$  с краем называется *ручкой* и будет нами использовано в дальнейшем. Говорят, что эта ручка получена из прямоугольника  $ABCD$  *склеиванием* по паре противоположных сторон с помощью указанного выше отождествления точек  $M$  и  $M'$ .

**Пример 7.** Рассмотрим тот же прямоугольник  $ABCD$  (см. (1)), но теперь каждую точку  $M(a, y)$  стороны  $BC$  отождествим с точкой  $M'(-a, -y)$  стороны  $DA$ , которая симметрична точке  $M$  относительно точки  $O$  (рис. 151). Так мы получаем фигуру  $\Phi$ , на которой топология из  $E_3$  индуцирует некоторую топологию  $\mathcal{T}_1$ . Пространство  $(\Phi, \mathcal{T}_1)$  называется *листом Мебиуса*<sup>1</sup> и является двумерным многообразием с краем.

Чтобы высветить строение края листа Мебиуса, представим себе точку  $K$ , которая описывает край листа Мебиуса, выйдя из точки  $A$ . Описав отрезок  $AB$ , точка  $K$  окажется в точке  $D$  (так как точки  $B$  и  $D$  отождествлены, т. е. считаются за одну точку). Далее, описав отрезок  $DC$ , точка  $K$  окажется опять в точке  $A$  (так как точки  $C$  и  $A$  отождествлены). Мы приходим к выводу, что край листа Мебиуса представляет одномерное компактное многообразие, и, значит, он

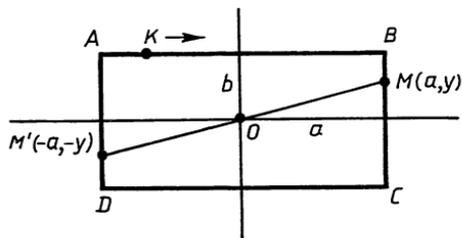


Рис. 151

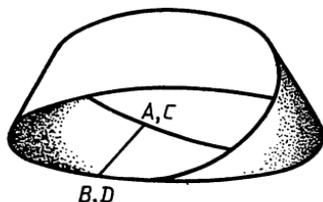


Рис. 152

<sup>1</sup> А. Ф. Мебиус (1790—1868) — немецкий математик и астроном.

гомеоморфен окружности. Этим мы воспользуемся в дальнейшем. Лист Мебиуса изображен на рисунке 152. Говорят, что он получен путем склеивания прямоугольника  $ABCD$  по направленным отрезкам  $\overline{BC}$  и  $\overline{DA}$ .

#### § 40. Понятие о клеточном разложении. Эйлерова характеристика многообразия

1. Назовем *клеткой* любое многообразие с краем, гомеоморфное выпуклому многоугольнику. При этом предполагается, что для данной клетки этот гомеоморфизм фиксирован. Образ вершины многоугольника при этом гомеоморфизме мы назовем *вершиной клетки*, а образ стороны многоугольника — *стороной клетки*.

Мы скажем, что двумерное многообразие  $F$  *разложено* на конечное множество клеток  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , если выполняются два условия:

- 1) эти клетки образуют покрытие многообразия  $F$ ;
- 2) пересечение любых двух клеток  $F_i$  и  $F_j$  ( $i \neq j$ ) либо пусто, либо является вершиной этих клеток, либо стороной каждой из них.

Например, грани тетраэдра образуют клеточное разложение поверхности этого тетраэдра (его границы).

В топологии доказывают, что всякое двумерное компактное многообразие и всякое двумерное компактное многообразие с краем можно разложить на конечное множество клеток и такое разложение можно сделать многими способами.

2. Пусть  $K$  — клеточное разложение двумерного многообразия  $F$  (компактного или компактного с краем). Точка  $x \in F$  называется *вершиной клеточного разложения  $K$* , если  $x$  — вершина хотя бы одной клетки из  $K$ . Фигура  $\gamma \subset F$  называется *стороной разложения  $K$* , если она является стороной хотя бы одной клетки из  $K$ . Введем обозначения:  $\alpha_0$  — число вершин,  $\alpha_1$  — число сторон,  $\alpha_2$  — число клеток разложения  $K$ .

Число  $\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$  называется *эйлеровой характеристикой многообразия  $F$* . Например, если  $F$  — поверхность тетраэдра, а клеточное разложение  $K$  состоит из его граней, то нетрудно подсчитать, что в этом случае  $\alpha_0 = 4$ ,  $\alpha_1 = 6$ ,  $\alpha_2 = 4$ , поэтому  $\chi(F) = 2$ .

Можно доказать, что *эйлерова характеристика многообразия не зависит от выбора его клеточного разложения*<sup>1</sup>.

Нетрудно доказать, что *эйлерова характеристика является топологическим инвариантом многообразия*. В самом деле, пусть  $F$  и  $F_1$  — гомеоморфные компактные двумерные многообразия (или гомеоморфные двумерные компактные многообразия с краем) и  $f: F \rightarrow F_1$  — гомеоморфизм (в топологии доказывают, что при этом край многообразия  $F$  переходит в край многообразия  $F_1$ ). Этот гомеоморфизм переводит клеточное разложение  $K$  многообразия  $F$  в клеточное разложение  $K_1$  многообразия  $F_1$ . Ясно, что разложение

<sup>1</sup> Это утверждение для наиболее важного случая будет доказано в главе VIII.

$K'$  имеет те же числа  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ , что и разложение  $K$ . Следовательно,  $\chi(F) = \chi(F')$ , что и требовалось доказать.

Найдем эйлерову характеристику сферы. В сферу  $S \subset E_3$  впишем какой-нибудь тетраэдр, границу которого обозначим через  $F$ . Граница  $F$  тетраэдра представляет собой компактное двумерное многообразие.

Пусть  $M_0$  — какая-либо внутренняя точка тетраэдра. Построим отображение  $f: F \rightarrow S$  по закону: если  $P \in F$ , то  $f(P) = P_0$  — точка пересечения луча  $M_0P$  со сферой  $S$ . Легко заметить, что отображение  $f$  является гомеоморфным, и, значит,  $\chi(S) = \chi(F)$ . Но выше было доказано, что  $\chi(F) = 2$ , поэтому  $\chi(S) = 2$ .

## § 41. Ориентируемые и неориентируемые двумерные многообразия

1. Пусть  $\Phi$  — двумерное компактное многообразие (или двумерное компактное многообразие с краем) и  $K$  — какое-либо клеточное разложение этого многообразия. Рассмотрим какую-либо клетку  $ABCD$  (рис. 153). Назовем сторону клетки *ориентированной*, если мы принимаем во внимание тот порядок, в котором указаны ее концы: первый из указанных концов — *начало*, а второй — *конец* ориентированной стороны. При этом говорят, что стороны  $AB$  и  $BA$  ориентированы противоположно.

Если одна из сторон клетки  $ABCD$ , например сторона  $AB$ , ориентирована, то можно ввести согласованную ориентацию всей границы клетки, как показано стрелками на рисунке 153 (т. е. конец  $B$  стороны  $AB$  будем считать началом стороны  $BC$ , а точку  $C$  — концом; сторона  $BC$  оказывается ориентированной и т. д.).

Говорят, что клетка *ориентирована*, если ориентирована ее граница описанным здесь способом. Каждую клетку можно ориентировать двумя способами (второй способ получим, отправляясь не от стороны  $AB$ , а от стороны  $BA$ , рис. 153, б).

Рассмотрим клеточное разложение  $K$  многообразия  $\Phi$ . Возьмем две клетки  $\Phi_1, \Phi_2$  с общей стороной и каждую из них ориентировем каким-либо из двух возможных способов (рис. 154). Если при этом окажется, что в этих ориентациях клеток  $\Phi_1, \Phi_2$  их общая сторона получила противоположные ориентации, то мы скажем, что клетки  $\Phi_1, \Phi_2$  *одинаково* ориентированы. Если же общая сторона получила

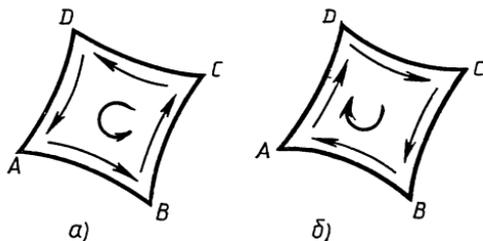


Рис. 153

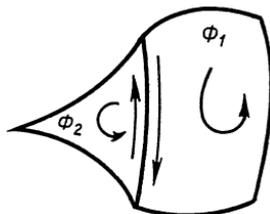


Рис. 154

одну и ту же ориентацию, то мы скажем, что эти клетки *противоположно* ориентированы. На рисунке 154 клетки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  одинаково ориентированы.

Если в некотором клеточном разложении  $K$  многообразия  $\Phi$  клетки можно ориентировать так, что каждые две клетки, имеющие общую сторону, будут одинаково ориентированы, то многообразие  $\Phi$  называется *ориентируемым*. Если же такого клеточного разложения не существует, то многообразие  $\Phi$  называется *неориентируемым*.

В топологии доказывают, что понятие ориентируемости многообразия не зависит от выбора его клеточного разложения.

Покажем, что ориентируемость многообразия является его топологическим инвариантом.

Пусть  $\Phi$  — ориентируемое многообразие,  $\Phi'$  — гомеоморфное ему многообразие:  $\Phi' = f(\Phi)$ , где  $f$  — гомеоморфизм. На многообразии  $\Phi$  существует клеточное разложение  $K$ , клетки которого можно так ориентировать, как это указано в определении ориентируемого многообразия. Гомеоморфизм  $f$  переводит клеточное разложение многообразия  $\Phi$  в определенное клеточное разложение  $K'$  многообразия  $\Phi'$ . При этом ориентация каждой клетки из  $K$  переходит на соответствующую клетку из  $K'$ . Следовательно, каждые две клетки из  $K'$ , имеющие общую сторону, будут одинаково ориентированы (потому что таким свойством обладали клетки — их прообразы из разложения  $K$ ). А это и значит, что многообразие  $\Phi'$  ориентируемо.

Таким образом, свойство многообразия быть ориентируемым (или неориентируемым) сохраняется при гомеоморфизмах.

2. Как узнать, ориентируемо или неориентируемо данное многообразие  $\Phi$ ?

Пусть  $K$  — какое-либо клеточное разложение этого многообразия. Берем одну из клеток  $\Phi_1$  этого разложения и ориентируем ее любым из двух возможных способов. Потом берем клетку, которая имеет с клеткой  $\Phi_1$  общую сторону, и ориентируем эту клетку так, чтобы общая сторона получила ориентацию, противоположную той, какую эта сторона получила в ориентации клетки  $\Phi_1$ . Затем берем следующую соседнюю клетку и т. д. Окончательно мы придем к одному из двух возможных случаев.

а) Каждые две клетки, имеющие общую сторону, будут одинаково ориентированы, и, значит, многообразие  $\Phi$  ориентируемо.

б) Найдутся две клетки, противоположно ориентированные. Можно доказать, что так будет при любом выборе клеточного разложения этого многообразия, и, значит, многообразие  $\Phi$  неориентируемо.

Таким образом, при проверке многообразия на ориентируемость можно использовать любое его клеточное разложение.

Покажем, что граница  $F$  любого тетраэдра ориентируема. Грани тетраэдра образуют клеточное разложение его границы.

Для удобства рассмотрим развертку границы тетраэдра (рис. 155). Эта развертка состоит

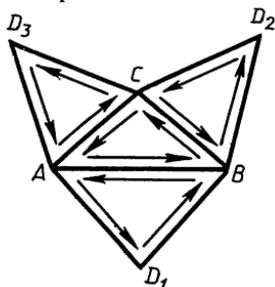


Рис. 155

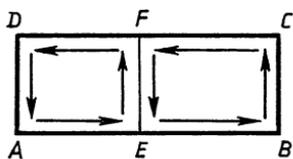


Рис. 156

из четырех треугольников:  $ABC$ ,  $ABD_1$ ,  $BCD_2$  и  $ACD_3$  (точкам  $D_1, D_2, D_3$  развертки соответствует на границе тетраэдра одна точка  $D$ ). Сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  ориентируем, принимая за начало точку  $A$  и за конец точку  $B$ . Это определяет ориентацию треугольника  $ABC$  (см. стрелки на рис. 155). Возьмем треугольник  $ABD_1$  и ориентируем его так,

чтобы его общая с треугольником  $ABC$  сторона  $BA$  получила ориентацию от точки  $B$  к точке  $A$ . Треугольник  $ABD_1$  окажется ориентированным. Остальные треугольники ориентируем аналогично (рис. 155). При этом мы замечаем, что общая сторона  $AD$  клеток  $ABD_1$  и  $ACD_3$  получила противоположную ориентацию (в клетке  $ABD_1$  эта ориентация от точки  $A$  к точке  $D_1$ , а в клетке  $ACD_3$  — от точки  $D_3$  к точке  $A$ ). То же происходит и с другими соседними клетками. Отсюда следует, что граница тетраэдра ориентируема.

Так как сфера гомеоморфна границе тетраэдра, то и сфера ориентируема.

Лист Мебиуса является примером неориентируемого компактного многообразия с краем. В самом деле, пусть лист Мебиуса получен из прямоугольника  $ABCD$  склеиванием по направленным отрезкам  $\overline{BC}$  и  $\overline{DA}$  (рис. 156). Возьмем разложение листа Мебиуса на две клетки  $AEFD$  и  $EBCF$ , где  $E$  — точка отрезка  $AB$  и  $F$  — точка отрезка  $CD$ . Ориентируя эти клетки согласно указанному выше правилу (начиная с отрезка  $EF$ ), мы замечаем, что их общая сторона  $BC = DA$  получила одну и ту же ориентацию. Следовательно, лист Мебиуса неориентируем.

## § 42. Понятие о классификации компактных двумерных многообразий

В этом параграфе мы сформулируем несколько теорем, лежащих в основе классификации компактных двумерных многообразий.

1. Пусть  $S$  — сфера с центром в точке  $O$  радиуса  $r$  в евклидовом пространстве  $E_3$  и  $\pi$  — плоскость, удаленная от точки  $O$  на расстояние  $h$ , где  $0 < h < r$ . Обозначим через  $F$  множество всех тех точек сферы, каждая из которых и точка  $O$  лежат по разные стороны от плоскости  $\pi$ . Мы замечаем, что фигура  $Q_1 = S \setminus F$  является многообразием с краем; оно гомеоморфно замкнутому кругу. Но замкнутый круг гомеоморфен треугольнику, и, значит, эйлерова характеристика этих трех многообразий — одна и та же, она равна единице. Многообразие  $Q_1$  называется *сферой с одной дырой*. Для него  $\chi(Q_1) = 1$ .

Таким же образом можно получить многообразие  $Q_r$  — сферу с  $r$  дырами. Мы будем эти дыры вырезать так, чтобы никакие две из окружностей, образующих край многообразия, не имели общих точек.

Многообразие  $Q_2$  (сфера с двумя дырами) гомеоморфно замкнутому кругу с одной дырой (рис. 157). Его эйлерову характеристику легко подсчитать. Беря клеточное разложение, указанное на рисунке

157, находим  $\alpha_0 = 6$ ,  $\alpha_1 = 9$ ,  $\alpha_2 = 3$ . Следовательно,  $\chi(Q_2) = 6 - 9 + 3 = 0$ .

Мы замечаем, что каждая дыра уменьшает эйлерову характеристику на единицу. Применяя метод математической индукции, можно доказать, что для сферы  $Q_r$  с  $r$  дырами справедлива формула

$$\chi(Q_r) = 2 - r. \quad (1)$$

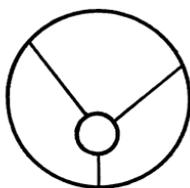


Рис. 157

2. Край сферы  $Q_2$  с двумя дырами состоит из двух окружностей  $\gamma'_1$ ,  $\gamma'_2$ . Ручка (см. рис. 150, б) также является многообразием с краем, и ее край состоит из двух одномерных многообразий  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , каждое из которых гомеоморфно окружности. Следовательно, существуют гомеоморфизмы  $f_1 : \gamma_1 \rightarrow \gamma'_1$ ,  $f_2 : \gamma_2 \rightarrow \gamma'_2$ . С помощью этих гомеоморфизмов мы отождествим  $\gamma_1$  с  $\gamma'_1$  и  $\gamma_2$  с  $\gamma'_2$ . При этом происходит приклеивание ручки к сфере  $Q_2$ . Мы предполагаем, что это приклеивание выполнено так, что внутренние точки ручки являются внешними относительно того шара  $\bar{B}(O, r)$ , граница которого содержит многообразие  $Q_2$ . Полученное многообразие называется сферой с одной ручкой (рис. 158). Это многообразие гомеоморфно тору. Тором называют поверхность, полученную вращением некоторой окружности  $\gamma$  вокруг прямой  $a$ , лежащей с этой окружностью в одной плоскости, но не пересекающей ее (рис. 159).

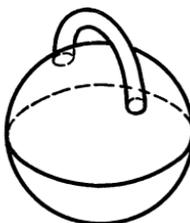


Рис. 158



Рис. 159

Возьмем теперь многообразие  $Q_{2p+r}$  — сферу с  $2p + r$  дырами и  $p$  пар этих дыр заклеим ручками, а  $r$  дыр оставим. Получим многообразие  $Q_{p,r}$ , которое называют сферой с  $p$  ручками и  $r$  дырами. Здесь  $p$  и  $r$  — целые неотрицательные числа. Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства:

**Теорема 1.** Любое ориентируемое компактное двумерное многообразие гомеоморфно некоторому многообразию  $Q_{p,r}$ ; любое ориентируемое компактное двумерное многообразие с краем гомеоморфно некоторому многообразию  $Q_{p,r}$ .

Число  $p$  называется родом данного многообразия, а число  $r$  — числом контуров этого многообразия.

Справедлива формула

$$\chi(Q_{p,r}) = 2 - 2p - r, \quad (2)$$

которая является обобщением формулы (1). Из формулы (2) следует, что эйлерова характеристика тора равна нулю:  $\chi(Q_{1,0}) = 0$ .

Имеет место следующий критерий гомеоморфности двух ориентируемых компактных многообразий:

**Теорема 2.** Два ориентируемых компактных многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же род (или одну и ту же эйлерову характеристику). Два ориентируемых компактных многообразия с краем гомеоморфны тогда и только

тогда, когда они имеют один и тот же род и одно и то же число контуров.

Доказательство теоремы мы опускаем.

Говорят, что сфера с  $p$  ручками представляет собой *нормальную форму* двумерного ориентируемого компактного многообразия рода  $p$ , а сфера с  $p$  ручками и  $r$  дырами является *нормальной формой* двумерного ориентируемого компактного многообразия рода  $p$ , край которого состоит из  $r$  контуров.

**3.** О неориентируемых компактных многообразиях мы выскажем лишь основные факты. Мы знаем, что край листа Мебиуса гомеоморфен окружности (см. рис. 152). Поэтому можно взять сферу  $Q_{p+1}$  с  $p+1$  дырами и все дыры заклейте листами Мебиуса. Мы получим компактное неориентируемое многообразие  $\psi_p$ . Можно подсчитать, что  $\chi(\psi_p) = \chi(Q_{p+1})$ . По формуле (1) получаем:

$$\chi(\psi_p) = 1 - p. \quad (3)$$

Так, если взять сферу  $Q_1$  с одной дырой ( $p = 0$ ) и заклейте ее листом Мебиуса, то получим многообразие  $\psi_0$ , для которого  $\chi(\psi_0) = 1$ . Это многообразие мы рассмотрим в следующем параграфе. Сформулируем две теоремы без доказательства.

**Т е о р е м а 3.** Любое компактное неориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно некоторому многообразию  $\psi_p$ . Число  $p$  называется родом данного многообразия.

**Т е о р е м а 4.** Два компактных неориентируемых двумерных многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же род (одну и ту же эйлерову характеристику).

### § 43. Топологические свойства листа Мебиуса и проективной плоскости

1. Рассмотрим топологические свойства листа Мебиуса.

<sup>1</sup>0. Край листа Мебиуса гомеоморфен окружности.

<sup>2</sup>0. Лист Мебиуса неориентируем (§ 41, п. 2).

Можно показать, что ориентируемые двумерные многообразия являются двусторонними, а неориентируемые — односторонними. Эти термины можно пояснить, исходя из наглядных соображений, следующим образом. Если взять ориентируемое двумерное многообразие, например сферу или ручку, и попытаться раскрасить это многообразие, не переходя через его край (если он есть), то окрашенной окажется лишь одна сторона многообразия (например, внешняя сторона сферы), а другая сторона останется неокрашенной. Если же подобную процедуру провести с неориентируемым двумерным многообразием (например, с листом Мебиуса), то окажется окрашенным все многообразие, и, значит, у этого многообразия одна сторона.

Рассмотрим прямоугольник  $ABCD$ , изображенный на рисунке 160, а. Пусть  $E$  — середина отрезка  $AD$ ,  $F$  — середина отрезка  $BC$ . При склеивании этого прямоугольника по направленным отрезкам  $\overline{BC}$  и  $\overline{AD}$  мы получим ручку (рис. 160, б). При этом точки  $E$  и  $F$  окажутся отождествлены и отрезок  $EF$  перейдет в одномерное многообразие  $\gamma_0$ , гомеоморфное окружности. Если ручку разрезать по этому многообразию  $\gamma_0$ , то ручка распадется на две отдельные ручки. Совсем иное мы получим в случае листа Мебиуса.

Мы знаем, что лист Мебиуса можно получить из прямоугольника  $ABCD$  (рис. 160, а), склеивая его по направленным отрезкам  $\overline{BC}$  и  $\overline{DA}$ . При этом точки  $E$  и  $F$  будут опять отождествлены и отрезок  $EF$  перейдет в одномерное многообразие, гомеоморфное окружности; его называют *средней линией* листа Мебиуса.

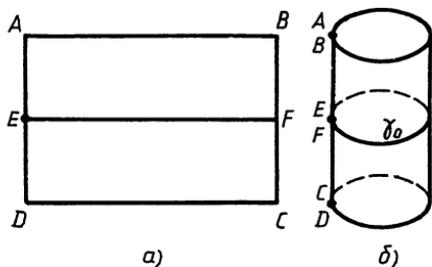


Рис. 160

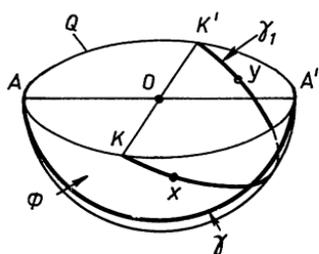


Рис. 161

3°. Если лист Мебиуса разрезать по средней линии, то он останется связным двумерным многообразием.

Это свойство листа Мебиуса мы рекомендуем каждому читателю проверить самостоятельно, используя полоску бумаги, клей и ножницы.

2. Обратимся теперь к рассмотрению топологических свойств проективной плоскости.

Как известно, одной из моделей проективной плоскости  $P_2$  служит связка прямых в трехмерном аффинном или евклидовом пространстве. От этой модели проективной плоскости мы перейдем к другой. Рассмотрим в евклидовом пространстве  $E_3$  полусферу  $\Phi$  с центром в точке  $O$ . Это есть двумерное компактное многообразие с краем, которым служит большая окружность  $Q$  (рис. 161). Каждая прямая связки с центром  $O$ , не лежащая в плоскости окружности  $Q$ , пересекает полусферу  $\Phi$  в единственной точке. Если же прямая связки лежит в плоскости окружности  $Q$ , то она пересекает полусферу  $\Phi$  в двух диаметрально противоположных точках этой окружности. Это наводит нас на мысль отождествить каждую пару диаметрально противоположных точек окружности  $Q$  (например, точки  $A, A'$  или  $K, K'$  на рис. 161) и, значит, склеить полусферу  $\Phi$  по этому отождествлению. Мы получим двумерное компактное многообразие, не имеющее краевых точек. Обозначим это многообразие через  $\Phi^*$ . Теперь мы имеем биективное отображение  $f$  многообразия  $\Phi^*$  на связку прямых с центром  $O$ : каждой точке  $M \in \Phi^*$  ставится в соответствие прямая  $OM$  этой связки. Эта биекция позволяет считать многообразие  $\Phi^*$  еще одной моделью проективной плоскости и перенести структуру компактного двумерного многообразия с  $\Phi^*$  на любую модель проективной плоскости.

1°. Проективная плоскость  $P_2$  является компактным двумерным многообразием (без краевых точек).

В связке прямых с центром  $O$  как модели проективной плоскости  $P_2$ , прямая линия представляет собой пучок прямых с центром  $O$ . Плоскость этого пучка пересечет многообразие  $\Phi^*$  по одномерному многообразию — большой полуокружности с отождествленными концами. На рисунке 161 изображена такая полуокружность  $\gamma$ , концы  $A$  и  $A'$  которой считаем отождествленными. Следовательно, проективная прямая гомеоморфна окружности.

Возьмем теперь на модели  $\Phi^*$  две точки  $X$  и  $Y$ , ни одна из которых не лежит на прямой  $\gamma$ . На модели  $\Phi^*$  существует единственная прямая  $\gamma_1$ , проходящая через точки  $X, Y$ . (Такой прямой служит сечение многообразия  $\Phi^*$  плоскостью, проходящей через три точки  $O, X, Y$ .) Ясно теперь, что при любом расположении точек  $X, Y$  на многообразии  $\Phi^*$  вне прямой  $\gamma$  мы можем, перемещаясь по прямой  $\gamma_1$ , перейти из точки  $X$  в точку  $Y$ , не пересекая прямой  $\gamma$  (можно пройти через точку  $K$ , она же  $K'$ ). Мы можем сформулировать второе свойство проективной плоскости.

2°. Для любой прямой  $\gamma$  на проективной плоскости  $P_2$  множество  $P_2 \setminus \gamma$  связно.

Этим проективная плоскость существенно отличается от евклидовой плоскости  $E_2$ , где для любой прямой  $\gamma \subset E_2$  множество  $E_2 \setminus \gamma$  несвязно. Из свойства 2° следует, что если проективную плоскость  $P_2$  разрезать по прямой  $\gamma$ , то плоскость не распадется на две части, а получится одно многообразие, но с краем.

Рассмотрим опять полусферу  $\Phi$ , границей которой служит большая окружность  $Q$  (рис. 162). Отметим на этой окружности две пары диаметрально противоположных точек  $M, M'$  и  $N, N'$ . Плоскость, проходящая через прямую  $MN$  перпенди-

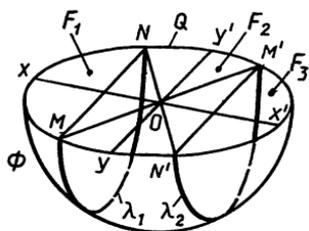


Рис. 162

кулярно плоскости окружности  $Q$ , пересечет полусферу  $\Phi$  по малой полуокружности  $\lambda_1$ . Аналогично получим другую малую полуокружность  $\lambda_2$  (проведем через прямую  $M'N'$  плоскость, перпендикулярную плоскости окружности  $Q$ ). Мы видим, что полусфера  $\Phi$  склеена из трех многообразий с краем:  $F_1, F_2, F_3$  (обозначения указаны на рис. 162).

Перейдем теперь от полусферы  $\Phi$  к многообразию  $\Phi^*$ , описанному выше, которое служит моделью проективной плоскости. Для этого надо полусферу  $\Phi$  склеить по каждой паре диаметрально противоположных точек окружности  $Q$ . Мы будем производить это склеивание постепенно, учитывая наличие многообразий

$F_1, F_2, F_3$ . Сперва мы склеим многообразия  $F_1$  и  $F_3$  по дугам  $M\bar{X}N$  и  $M'\bar{X}'N'$ . Получим многообразие, гомеоморфное замкнутому кругу, или, что то же самое, гомеоморфное сфере с одной дырой.

Многообразие  $F_2$  гомеоморфно прямоугольнику. Склеивая его по дугам  $M\bar{Y}N'$  и  $M'\bar{Y}'N$ , мы получим многообразие с краем, гомеоморфное листу Мебиуса.

Таким образом, многообразие  $\Phi^*$  гомеоморфно сфере с одной дырой, заклеенной листом Мебиуса, т. е. гомеоморфно многообразию  $\psi_0$ , отмеченному в п. 3 предыдущего параграфа. Мы нашли третье свойство проективной плоскости.

**3<sup>0</sup>. Проективная плоскость гомеоморфна многообразию  $\psi_0$  и, следовательно, неориентируема; ее эйлерова характеристика равна единице.**

## § 44. Геометрическое тело

1. *Областью* в топологическом пространстве называют непустое открытое связное множество. Область в евклидовом пространстве  $E_3$  называется *ограниченной*, если существует шар, содержащий эту область. Замыкание ограниченной области называется *геометрическим телом*. Таким образом, всякое геометрическое тело состоит из своей внутренности (которая и является ограниченной областью) и границы. Границу геометрического тела называют его *поверхностью*. Геометрические тела различают по виду их границы: многогранники, цилиндры, конусы, шары и т. д.

Примером геометрического тела является замкнутый шар. Сфера, ограничивающая шар, — поверхность этого тела. Сама сфера в  $E_3$  не является геометрическим телом, так как у нее нет внутренности. Открытый шар тоже не является геометрическим телом.

Примером геометрических тел являются также тетраэдр, призма, пирамиды, цилиндры, конусы, которые изучаются в средней школе. Замкнутое полупространство не является геометрическим телом, так как оно неограничено.

Можно доказать, что произвольные две внутренние точки геометрического тела можно соединить непрерывной линией, целиком состоящей из внутренних точек тела. С другой стороны, любая непрерывная линия (в частности, отрезок), соединяющая внутреннюю точку с точкой, внешней к телу, пересекает его поверхность по крайней мере в одной точке.

2. *Выпуклое тело* является частным случаем выпуклой фигуры. Фигура называется *выпуклой*, если она вместе с любыми своими двумя точками  $A$  и  $B$  содержит и весь отрезок  $AB$ . Так, прямая, открытый круг, открытый и замкнутый шары, тетраэдр — примеры выпуклых фигур. Удобно фигуру, состоящую из одной точки, а также пустое множество считать выпуклыми фигурами. Тогда из определения выпуклой фигуры следует, что пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой. Отсюда мы заключаем, что пересечение конечного числа выпуклых фигур — выпуклая фигура.

В следующей теореме формулируется один из способов построения выпуклых фигур.

**Теорема 1.** *Если  $F$  — выпуклая фигура, а  $P$  — не принадлежащая ей точка, то объединение  $F'$  всех отрезков  $PM$ , где  $M$  пробегает фигуру  $F$ , является выпуклой фигурой.*

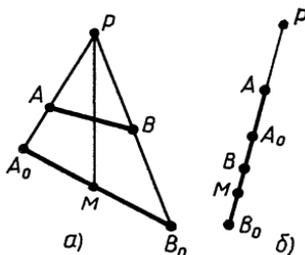


Рис. 163

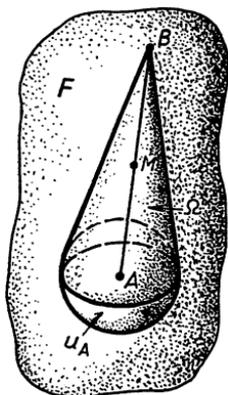


Рис. 164

□ Возьмем произвольные две точки  $A$  и  $B$  фигуры  $F'$  и докажем, что отрезок  $AB$  целиком принадлежит этой фигуре. По условию теоремы на фигуре  $F$  найдутся такие точки  $A_0$  и  $B_0$ , что  $A$  — точка отрезка  $PA_0$ , а  $B$  — точка отрезка  $PB_0$ . Если точки  $A_0$  и  $B_0$  совпадают, то точки  $A$  и  $B$  лежат на отрезке  $PA_0$ , поэтому фигура  $F'$ , содержащая отрезок  $PA_0$ , содержит и часть этого отрезка — отрезок  $AB$ .

Рассмотрим случай, когда  $A_0$  и  $B_0$  — различные точки. Так как  $F$  — выпуклая фигура, то любая точка  $M$  отрезка  $A_0B_0$  принадлежит фигуре  $F$ , поэтому отрезок  $PM$  целиком принадлежит фигуре  $F'$ . Но каждая точка отрезка  $AB$  лежит на каком-нибудь из отрезков  $PM$  (рис. 163, а, б), поэтому отрезок  $AB$  целиком принадлежит фигуре  $F'$ . Таким образом,  $F'$  — выпуклая фигура. ■

Из этой теоремы следует, что конус, изучаемый в средней школе, является выпуклой фигурой.

Другой способ получения выпуклой фигуры основан на применении следующей теоремы.

**Теорема 2.** Если  $F$  — выпуклая фигура, а  $\vec{p}$  — ненулевой вектор, то объединение всех отрезков  $MM'$ , где  $M$  пробегает фигуру  $F$ , а  $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$ , является выпуклой фигурой.

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 1, и мы рекомендуем читателю провести его самостоятельно. Из этой теоремы следует, что цилиндр является выпуклой фигурой.

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых тел.

1<sup>0</sup>. Если  $A$  — внутренняя точка, а  $B$  — внутренняя или граничная точка выпуклого тела  $F$ , то любая точка, лежащая между точками  $A$  и  $B$ , является внутренней точкой тела.

□ Так как  $A$  — внутренняя точка тела  $F$ , то существует окрестность  $U_A$  точки  $A$ , все точки которой принадлежат выпуклому телу  $F$ . Не нарушая общности, можно предположить что  $U_A$  —  $\varepsilon$ -окрестность и  $B \notin U_A$ . Объединение  $\Omega$  всех отрезков  $BX$ , где  $X$  пробегает окрестность  $U_A$ , является выпуклой фигурой (теорема 1), содержащейся в  $F$  (рис. 164). Каждая точка  $M$ , лежащая между точками  $A$  и  $B$ , является, очевидно, внутренней точкой фигуры  $\Omega$ , поэтому  $M$  — внутренняя точка тела  $F$ . ■

2<sup>0</sup>. Любой луч, исходящий из внутренней точки выпуклого тела, пересекает границу этого тела в одной точке.

□ Пусть  $M_0$  — внутренняя точка данного тела  $F$ , а  $h$  — замкнутый луч, исходящий из этой точки. Докажем, что пересечение  $F \cap h$

есть некоторый отрезок. Действительно, нетрудно заметить, что пересечение  $F \cap h$  является фигурой: а) выпуклой (так как  $F$  и  $h$  — выпуклые фигуры); б) замкнутой (так как  $F$  и  $h$  замкнуты); в) ограниченной (так как тело — фигура ограниченная). Очевидно, только отрезок является частью луча, которая обладает свойствами а), б), в). Обозначим этот отрезок через  $M_0M_1$ . Мы утверждаем, что  $M_1$  — граничная точка тела  $F: M_1 \in b(F)$ . В самом деле, если предположить, что  $M_1$  — внутренняя точка тела  $F$  (т. е.  $M_1 \in \overset{\circ}{F}$ ), то по определению внутренней точки найдется  $\varepsilon$ -окрестность  $B(M_1, \varepsilon)$  этой точки, целиком содержащаяся во внутренности тела  $F$ . Но тогда на луче  $h$  найдутся точки тела  $F$ , лежащие на продолжении отрезка  $M_0M_1$  за точку  $M_1$ . Мы пришли к противоречию с тем, что пересечение  $F \cap h$  есть отрезок  $M_0M_1$ . Значит,  $M_1 \notin \overset{\circ}{F}$  и  $M_1 \in b(F)$ .

Из свойства 1<sup>0</sup> непосредственно следует, что все точки, лежащие между точками  $M_0$  и  $M_1$ , являются внутренними точками тела  $F$ , поэтому луч  $h$  пересекает границу  $F$  только в одной точке. ■

## §45. Выпуклые многогранники

1. *Многогранником* называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников, удовлетворяющих следующим двум условиям.

а) Никакие два смежных многоугольника не лежат в одной плоскости.

б) Объединение всех многоугольников является двумерным многообразием.

Эти многоугольники называются *гранями*, их вершины — *вершинами*, а стороны — *ребрами* многогранника.

Примерами многогранников являются тетраэдры, произвольные пирамиды и призмы, изучаемые в средней школе.

*Родом многогранника* называется род его поверхности. Как мы отметили в § 40, п. 2, граница тетраэдра гомеоморфна сфере, следовательно, тетраэдр — пример многогранника нулевого рода. Многогранники нулевого рода, грани которых являются клетками, называются также *простыми*. Тетраэдр и куб — примеры простых многогранников. На рисунке 165 изображен многогранник рода 1 (его граница гомеоморфна сфере с одной ручкой).

Докажем теорему Эйлера для многогранников.

**Т е о р е м а 1.** *В любом простом многограннике сумма числа вершин и числа граней на две единицы больше числа его ребер.*

□ Рассмотрим произвольный простой многогранник  $F$  и обозначим через  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  соответственно число вершин, ребер и граней этого многогранника. Грани многогранника  $F$  образуют клеточное разложение его границы  $b(F)$ , и потому эйлерова характеристика  $\chi(b(F))$  границы  $b(F)$  равна  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ . Но по определению простого многогранника  $\chi(b(F)) = 2$  (см. § 42, формула (2)). Таким образом,  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ , или  $\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2$ . ■

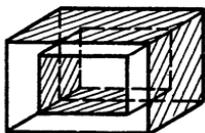


Рис. 165

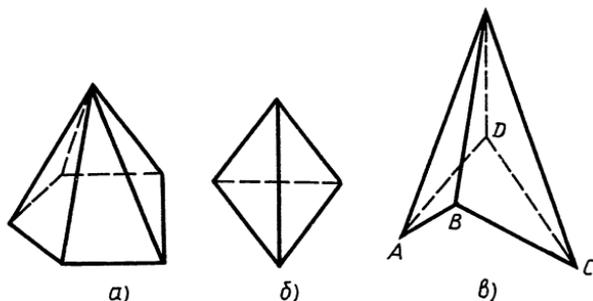


Рис. 166

2. Многогранник  $F$  называется *выпуклым*, если  $F$  — выпуклое тело. Отсюда непосредственно следует, что грани выпуклого многогранника — выпуклые многоугольники.

Рассмотрим примеры выпуклых многогранников. Из теоремы 1 §44 следует, что если основание пирамиды является выпуклым многоугольником, то такая пирамида является выпуклым многогранником (рис. 166, а). В частности, тетраэдр — выпуклый многогранник (рис. 166, б). На рисунке 166, в изображена невыпуклая пирамида.

Из теоремы 2 §44 следует, что если основанием призмы служит выпуклый многоугольник, то такая призма является выпуклым многогранником. В частности, параллелепипед — выпуклый многогранник.

Еще один способ получения выпуклых многогранников из многогранников, уже известных, основан на разложении многогранников. Говорят, что *фигура*  $\Phi \subset E_3$  *разложена на фигуры*  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , если выполнены следующие два условия: 1) фигуры  $F_k$  образуют покрытие фигуры  $\Phi$ , т. е.  $\Phi = \cup F_k$ ; 2) любые две фигуры  $F_i, F_j$  не имеют общих внутренних точек:  $\overset{\circ}{F}_i \cap \overset{\circ}{F}_j = \emptyset$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j$ ).

Пусть  $\Phi$  — выпуклый многогранник и плоскость  $\sigma$  пересекает внутренность  $\overset{\circ}{\Phi}$  этого многогранника (т. е.  $\overset{\circ}{\Phi} \cap \sigma \neq \emptyset$ ). Так как  $\Phi$  и  $\sigma$  — фигуры выпуклые, то их пересечение  $\Phi \cap \sigma = F_0$  является фигурой выпуклой. Легко видеть, что  $F_0$  — выпуклый многоугольник. Плоскость  $\sigma$  делит все не принадлежащие ей точки многогранника  $\Phi$  на две части  $\Phi'_1$  и  $\Phi'_2$ , расположенные по разные стороны от плоскости  $\sigma$ . Мы приходим к двум новым выпуклым многогранникам  $\Phi_1 = \Phi'_1 \cup F_0$  и  $\Phi_2 = \Phi'_2 \cup F_0$ , причем данный многогранник  $\Phi$  разложен на многогранники  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

Ясно, что наименьшее число вершин у выпуклого многогранника равно четырем, и такое число вершин имеет тетраэдр. В этом смысле тетраэдр — простейший выпуклый многогранник.

Можно доказать, что всякий многогранник разложим на конечное число выпуклых многогранников, а всякий выпуклый многогранник разложим на конечное число тетраэдров. Отсюда следует, что всякий многогранник разложим на конечное число тетраэдров.

Докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** *Выпуклый многогранник является простым.*

□ Пусть  $F$  — выпуклый многогранник, а  $M_0$  — одна из его внутренних точек. Так как  $F$  — фигура ограниченная, то существует содержащий его шар. Обозначим через  $S$  границу этого шара. По свойству 2<sup>0</sup> § 44 любой луч  $M_0N$  с началом в точке  $M_0$  пересекает границу  $b(F)$  многогранника в некоторой точке  $M$  и сферу  $S$  в какой-то точке  $M'$ . Следовательно, с помощью лучей  $M_0N$  устанавливается биективное отображение  $f: b(F) \rightarrow S$  по закону  $M' = f(M)$ . Это отображение является гомеоморфизмом, поэтому граница выпуклого многогранника  $F$  гомеоморфна сфере  $S$ , и, значит,  $F$  — многогранник нулевого рода. Но, как отмечено выше, его грани — выпуклые многоугольники. Отсюда и следует утверждение теоремы. ■

3. Докажем две теоремы, из которых следует, что данное нами определение выпуклого многогранника совпадает с соответствующим определением школьного курса геометрии.

**Теорема 3.** *Все точки выпуклого многогранника расположены в одном и том же замкнутом полупространстве, границей которого является плоскость любой грани.*

□ Пусть  $\pi_f$  — плоскость грани  $f$  выпуклого многогранника  $F$ , а  $M_0$  — некоторая внутренняя точка многогранника. Докажем, что  $F \subset \omega_f$ , где  $\omega_f$  — полупространство с границей  $\pi_f$ , содержащее точку  $M_0$ . Доказательство проведем методом от противного, т. е. допустим, что существует точка  $M \in F$ , такая, что  $M \notin \omega_f$ . Но тогда отрезок  $M_0M$  пересекает плоскость  $\pi_f$  в некоторой точке  $P$ . По свойству 1<sup>0</sup> § 44 точка  $P$  — внутренняя точка многогранника  $F$ .

Проведем через точку  $P$  прямую, пересекающую многоугольник  $f$ , и возьмем точки  $A$  и  $B$  так, чтобы точка  $B$  лежала между точками  $P$  и  $A$  (рис. 167). Так как  $B$  — граничная точка, то мы пришли в противоречие с тем же свойством 1<sup>0</sup> § 44. Таким образом,  $F \subset \omega_f$ . ■

Докажем обратную теорему.

**Теорема 4.** *Если все точки многогранника  $F$  расположены в одном замкнутом полупространстве, границей которого является плоскость любой грани, то  $F$  — выпуклый многогранник.*

Допустим, что утверждение теоремы неверно, т. е.  $F$  не является выпуклым многогранником. Тогда найдутся такие две точки,  $A, B \in F$ , что отрезок  $AB$  содержит хотя бы одну точку  $M$ , внешнюю к многограннику  $F$ . Пусть  $M_0$  — внутренняя точка многогранника  $F$ , не лежащая на прямой  $AB$  (рис. 168). Отрезок  $M_0M$  пересекает

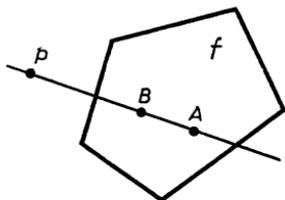


Рис. 167

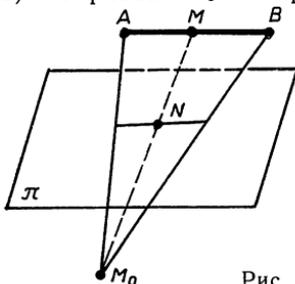


Рис. 168

поверхность многогранника в некоторой точке  $N$  (см. § 44, п. 1), поэтому через точку  $N$  проходит плоскость  $\pi$  какой-то грани многогранника. По условию теоремы ни одна из точек плоскости  $\pi$  не является внутренней точкой многогранника, поэтому  $M_0 \notin \pi$ . Отсюда следует, что плоскость  $\pi$  пересекает по крайней мере один из отрезков  $M_0A$  или  $M_0B$ . Но это противоречит условию теоремы, так как точки многогранника  $F$  не могут лежать по разные стороны от плоскости  $\pi$ . ■

4. Отметим вкратце некоторые результаты, относящиеся к общей теории выпуклых многогранников.

Работами А. Д. Александрова были в основном завершены исследования в метрической теории многогранников, которые начал еще Коши<sup>1</sup>. На основе этих исследований А. В. Погорелов создал основы общей теории выпуклых поверхностей.

Уже в наше время теория выпуклых многогранников нашла широкое применение в различных задачах кибернетики, в частности в задачах оптимизации. Напомним, что теория выпуклых многогранников играет большую роль в кристаллографии.

Приведем без доказательства три теоремы о выпуклых многогранниках.

Пусть нам даны два многогранника  $F_1$  и  $F_2$ . Обозначим через  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) множество граней, через  $B_i$  — множество ребер, через  $C_i$  — множество вершин многогранника  $F_i$  и составим множества  $M_i = A_i \cup B_i \cup C_i$ .

Многогранники  $F_1, F_2$  называются *изоморфными*, если существует биективное отображение  $f: M_1 \rightarrow M_2$ , удовлетворяющее следующим трем условиям:

- 1)  $f(A_1) = A_2, f(B_1) = B_2, f(C_1) = C_2$ ;
- 2) соответствующие грани имеют одно и то же число вершин;
- 3) отображение  $f$  сохраняет взаимную принадлежность вершин, ребер и граней.

Так, изоморфными многогранниками будут два произвольных тетраэдра, параллелепипед и куб.

**Т е о р е м а 5** (теорема Коши о жесткости выпуклого многогранника). *Если два выпуклых многогранника изоморфны и каждые две соответственные грани их равны, то и многогранники равны.*

По поводу этой теоремы надо дать небольшое пояснение. Если на плоскости взят выпуклый  $n$ -угольник ( $n > 3$ ), то его можно «деформировать» путем изменения величины его углов, но сохраняя длины его сторон и их последовательность. Так, можно рассмотреть два параллелограмма  $ABCD$  и  $ABC'D'$  с соответственно равными сторонами (и общей стороной  $AB$ ), расположенными в одном и том же порядке. Но эти параллелограммы не равны (возьмем, например,  $\angle BAD' < \angle BAD$ ). Из теоремы Коши следует, что такая ситуация для выпуклого многогранника невозможна. А именно выпуклый многогранник не допускает деформации с сохранением его граней и по-

<sup>1</sup> О. Коши (1789—1857) — французский математик, почетный член Петербургской академии наук (с 1831 г.).

рядка их взаимного расположения. В этом смысле говорят, что выпуклый многогранник является жестким.

**Теорема 6** (теорема А. Д. Александрова). *Если каждая из граней выпуклого многогранника имеет центр симметрии, то и сам этот многогранник имеет центр симметрии.*

Пусть дан выпуклый многогранник  $F$ ,  $G$  — какая-либо его грань,  $O \in G$  и луч  $OX$  перпендикулярен к плоскости грани  $G$ . Этот луч называется *внешней нормалью* грани  $G$ , если он не пересекает внутренности многогранника  $F$ .

**Теорема 7** (теорема А. Д. Александрова). *Пусть  $F$  и  $F'$  — выпуклые многогранники, а  $A$  и  $A'$  — множества, элементами которых служат грани многогранников  $F$  и  $F'$  соответственно. Если существует биективное отображение  $f: A \rightarrow A'$ , удовлетворяющее двум условиям: 1) внешние нормали каждой двух соответственных граней одинаково направлены; 2) ни одну из двух соответственных граней нельзя перевести внутрь другой с помощью параллельного переноса, то многогранники  $F$  и  $F'$  равны.*

## §46. Правильные многогранники

1. Назовем простой многогранник *топологически правильным*, если все его грани имеют одно и то же число вершин, а все многогранные углы — одно и то же число граней. Примером топологически правильного многогранника является любой тетраэдр или любой параллелепипед.

Пусть  $F$  — топологически правильный многогранник. Обозначим через  $n$  число вершин каждой грани, через  $g$  число граней каждого его многогранного угла, а через  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно число вершин, ребер и граней.

Каждое ребро многогранника  $F$  является общей стороной двух его граней, а каждая грань содержит  $n$  ребер. Поэтому

$$n\alpha_2 = 2\alpha_1. \quad (1)$$

Каждая вершина многогранника  $F$  является общим концом  $g$  ребер. Значит,

$$g\alpha_0 = 2\alpha_1. \quad (2)$$

По теореме 1 §45  $\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2$ . Подставив сюда значения  $\alpha_0$  и  $\alpha_2$  из (1) и (2), получаем:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_1}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Так как  $g \geq 3$  и  $n \geq 3$ , то из неравенства (4) получаем  $\frac{1}{g} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , поэтому  $g < 6$ . Аналогично полу-

чаем  $n < 6$ . Таким образом,  $3 \leq g < 6$ ,  $3 \leq n < 6$ , т. е.  $g$  и  $n$  могут принимать только значения 3, 4 и 5. Из неравенства (4) следует, что числа  $g$  и  $n$  одновременно не могут быть больше трех, т. е. хотя бы одно из чисел  $g$  или  $n$  равно 3. Таким образом, возможны следующие пять комбинаций этих чисел: 1)  $g = n = 3$ ; 2)  $g = 3, n = 4$ ; 3)  $g = 3, n = 5$ ; 4)  $g = 4, n = 3$ ; 5)  $g = 5, n = 3$ . В каждом из этих случаев, используя формулу (3), находим  $\alpha_1$ , а по формулам (1) и (2) находим  $\alpha_0$  и  $\alpha_2$ .

Итак, любой топологически правильный многогранник принадлежит к одному из следующих пяти типов:

№	Название многогранника	$g$	$n$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1	Тетраэдр (четырёхгранник)	3	3	4	6	4
2	Гексаэдр (шестигранник)	3	4	8	12	6
3	Додекаэдр (двенадцатигранник)	3	5	20	30	12
4	Октаэдр (восьмигранник)	4	3	6	12	8
5	Икосаэдр (двадцатигранник)	5	3	12	30	20

Мы доказали, что существует *не более* пяти типов топологически правильных многогранников. Существование многогранников, принадлежащих к каждому из этих типов, будет доказано в следующем пункте их построением.

2. Мы рассматривали до сих пор только топологические свойства многогранников в пространстве  $E_3$ . Рассмотрим теперь класс многогранников, которые характеризуются своими метрическими свойствами.

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники, а многогранные углы при его вершинах имеют одно и то же число граней. По теореме 2 § 45 выпуклые многогранники являются простыми, поэтому правильные многогранники представляют собой частный случай топологически правильных многогранников. В п. 1 мы доказали, что топологически правильных многогранников может существовать не более пяти типов. Следовательно, и правильных многогранников может существовать не более пяти типов. Сейчас мы докажем построением существование точно пяти типов правильных многогранников.

1°. **Куб.** Рассмотрим трехгранный угол с вершиной  $O$ , ребра которого взаимно перпендикулярны. От точки  $O$  на ребрах этого трехгранного угла отложим равные отрезки  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  и через каждую из точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  проведем плоскость, параллельную грани, проходящей через другие точки. Получим выпуклый многогранник (§ 45, теорема 4). Его гранями являются шесть равных квадратов (рис. 169), а многогранные углы при его вершинах все трехгранные. Следовательно, построенный многогранник является правильным. Он называется *правильным гексаэдром* или *кубом*.

Так как куб — частный случай параллелепипеда, то его диагона-

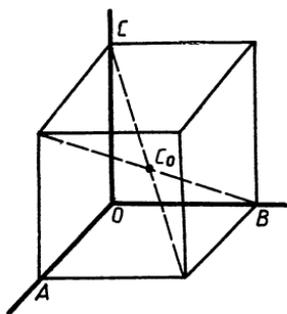


Рис. 169

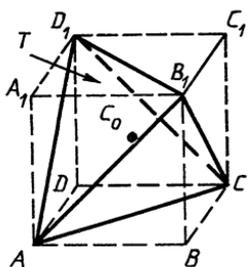


Рис. 170

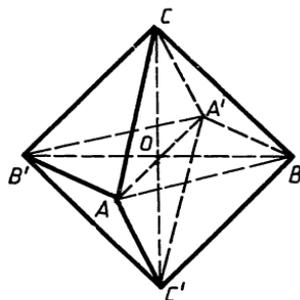


Рис. 171

ли пересекаются в одной точке, которую обозначим через  $C_0$  (рис. 169). Эта точка, как нетрудно видеть, равноудалена от всех вершин куба, от его граней и от его ребер. Следовательно, точка  $C$  является центром трех сфер: описанной сферы, проходящей через вершины, вписанной сферы, касающейся всех граней, и сферы, касающейся всех его ребер. Общий центр этих сфер (точка  $C_0$ ) называется *центром куба*.

**2<sup>0</sup>. Правильный тетраэдр.** Пусть  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб (рис. 170). Точки  $A, B_1, C, D_1$  не лежат в одной плоскости, поэтому являются вершинами некоторого тетраэдра  $T$ . Поверхность этого тетраэдра образована четырьмя равными правильными треугольниками, так как стороны этих треугольников являются диагоналями граней куба. Многогранные углы при вершинах тетраэдра  $T$  имеют одно и то же число граней (три). Отсюда мы заключаем, что  $T$  — правильный тетраэдр.

Сфера, описанная около куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , описана также около правильного тетраэдра  $T$ . Предоставляем читателю проверить, что центр  $C_0$  этой сферы является также центром вписанной в тетраэдр сферы и центром сферы, касающейся ребер тетраэдра  $T$ . Точка  $C_0$  называется *центром правильного тетраэдра*.

**З а м е ч а н и е.** Заметим, что центр куба является также и центром симметрии куба. У правильного же тетраэдра его центр не является центром симметрии. В самом деле, точки  $A$  и  $C_1$ , например, симметричны относительно точки  $C_0$  и  $A \in T$ , но  $C_1 \notin T$ .

**3<sup>0</sup>. Правильный октаэдр.** Построим три равных попарно перпендикулярных отрезка  $AA', BB'$  и  $CC'$ , имеющих общую середину  $O$  (рис. 171). Легко убедиться, что точки  $A, B, C, A', B', C'$  служат вершинами правильного восьмигранника, гранями которого являются равные друг другу правильные треугольники  $ABC, ABC', BA' C, BA' C', A' B' C, A' B' C', B' A C, B' A C'$ . Этот многогранник называется *правильным октаэдром*. Нетрудно заметить, что точка  $O$  равноудалена от всех вершин, граней и ребер правильного октаэдра, поэтому он является центром трех сфер — описанной, вписанной и касающейся всех ребер. Точка  $O$  называется *центром правильного октаэдра*.

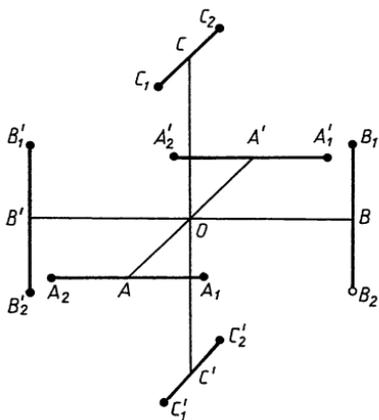


Рис. 172

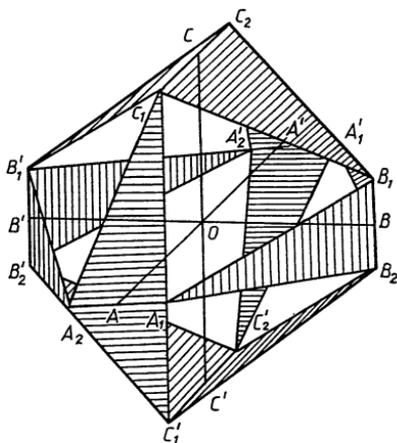


Рис. 173

**4<sup>0</sup>. Правильный икосаэдр.** Так же как и в случае правильного октаэдра, строим три равных попарно перпендикулярных отрезка  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , имеющие общую середину  $O$  (рис. 172). Обозначим через  $2a$  длину каждого из этих отрезков. Затем строим равные отрезки  $A_1A_2$  и  $A'_1A'_2$  с серединами в точках  $A$  и  $A'$ , параллельные отрезку  $BB'$ . Обозначим длины этих отрезков через  $2b$ . Далее строим отрезки  $B_1B_2$  и  $B'_1B'_2$  с серединами в точках  $B$  и  $B'$ , параллельные отрезку  $CC'$  и равные  $2b$ . Наконец, строим отрезки  $C_1C_2$  и  $C'_1C'_2$  с серединами в точках  $C$  и  $C'$ , параллельные отрезку  $AA'$  и равные  $2b$ . Мы получаем 12 точек:  $A_1, A_2, A'_1, A'_2, B_1, B_2, B'_1, B'_2, C_1, C_2, C'_1, C'_2$ , которые являются вершинами некоторого икосаэдра.

Для построения граней этого икосаэдра поступим следующим образом. Рассмотрим плоскость  $AOB$ . Мы замечаем, что точки  $B_1$  и  $B'_1$  и отрезок  $C_1C_2$  лежат по одну сторону от этой плоскости, а точки  $B_2$  и  $B'_2$  и отрезок  $C'_1C'_2$  — по другую сторону (рис. 172). Соединив концы отрезка  $C_1C_2$  с точками  $B_1$  и  $B'_1$ , а концы отрезка  $C'_1C'_2$  с точками  $B_2$  и  $B'_2$ , получим четыре равнобедренных треугольника  $C_1C_2B_1$ ,  $C_1C_2B'_1$ ,  $C'_1C'_2B_2$ ,  $C'_1C'_2B'_2$ . Рассмотрим теперь плоскость  $AOC$  и аналогично построим четыре равнобедренных треугольника  $B_1B_2A_1$ ,  $B_1B_2A'_1$ ,  $B'_1B'_2A_2$ ,  $B'_1B'_2A'_2$ . Наконец, рассмотрим плоскость  $BOC$  и построим равнобедренные треугольники  $A_1A_2C_1$ ,  $A_1A_2C'_1$ ,  $A'_1A'_2C_2$ ,  $A'_1A'_2C'_2$ . Мы получим двенадцать равнобедренных, равных друг другу треугольников. При этом образовалось еще восемь равносторонних треугольников:  $C_1B_1A_1$ ,  $C_1B'_1A_2$ ,  $C_2B_1A'_1$ ,  $C_2B'_1A'_2$ ,  $C'_1B_2A_1$ ,  $C'_1B'_2A_2$ ,  $C'_2B_2A'_1$ ,  $C'_2B'_2A'_2$ . Мы получаем выпуклый топологически правильный двадцатигранник, изображенный на рисунке 173. На этом рисунке двенадцать равнобедренных треугольников заштрихованы.

Нетрудно подобрать числа  $a$  и  $b$  так, чтобы построенный многогранник был правильным. Для этого достаточно потребовать, например, чтобы  $A_1B_1 = B_1B_2$ . Рассмотрим прямоугольный треугольник  $A_1B_1B$  (рис. 174). Так как  $OA = a$ ,  $BB_1 = b$ , то  $A_1B_1^2 = A_1B^2 +$

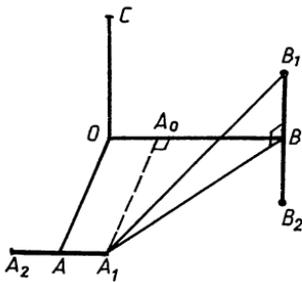


Рис. 174

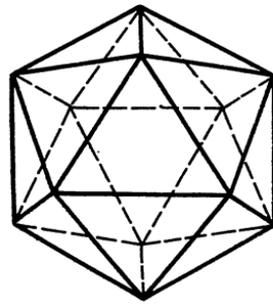


Рис. 175

$+ BB_1^2 = A_1A_0^2 + A_0B^2 + BB_1^2$ . Поэтому  $A_1B_1^2 = a^2 + (a - b)^2 + b^2 = 2(a^2 - ab + b^2)$ . Так как  $B_1B_2 = 2b$ , то равенство  $A_1B_1 = B_1B_2$  равносильно равенству  $a^2 - ab + b^2 = 2b^2$ , или  $b^2 + ab - a^2 = 0$ . Учитывая  $a > 0$  и  $b > 0$ , отсюда получаем  $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a$ .

Если это равенство выполнено, то все грани построенного икосаэдра — равные правильные треугольники, а многогранные углы при вершинах имеют одно и то же число граней — пять. Таким образом, построенный икосаэдр правильный.

Можно проверить, что точка  $O$  является центром трех сфер: описанной, вписанной и сферы, которая касается ребер икосаэдра. Эта точка называется *центром икосаэдра*. Из способа построения вершин икосаэдра (см. рис. 172) непосредственно следует, что центр икосаэдра является центром его симметрии.

Правильный икосаэдр изображен на рисунке 175.

5<sup>0</sup>. **Правильный додекаэдр.** Для построения правильного додекаэдра используют правильный икосаэдр. Нетрудно видеть, что *центры граней правильного икосаэдра  $F$  служат вершинами правильного додекаэдра*.

Докажем это утверждение. Вершины  $M_1, M_2, \dots, M_{12}$  икосаэдра  $F$  лежат на описанной сфере  $S$  с центром в точке  $O$  (рис. 176, на этом рисунке сфера  $S$  не изображена). Ребра  $M_1M_2, \dots, M_1M_6$  с общим концом  $M_1$  являются равными хордами сферы  $S$ . Отсюда следует, что углы  $OM_1M_2, \dots, OM_1M_6$  равны и вершины  $M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  проектируются ортогонально на прямую  $OM_1$  в одну и ту же точку  $O_1$ . Значит, вершины

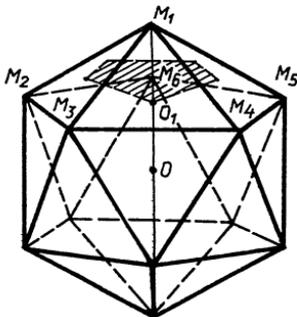


Рис. 176

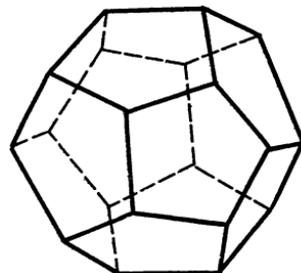


Рис. 177

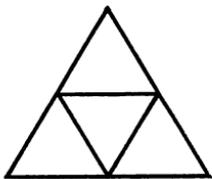


Рис. 178

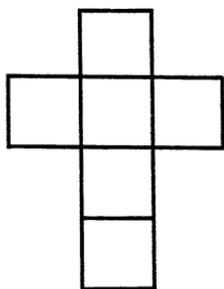


Рис. 179

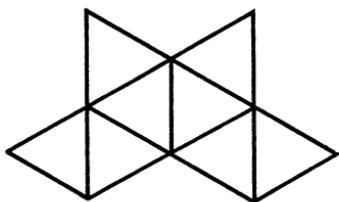


Рис. 180

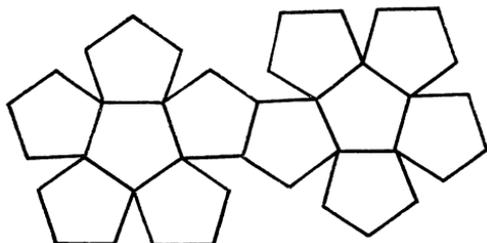


Рис. 181

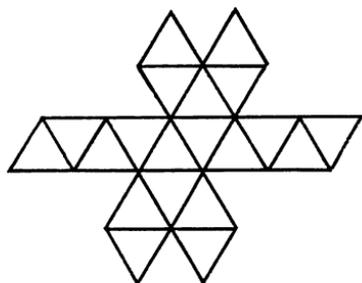


Рис. 182

$M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  лежат в одной плоскости, проходящей через точку  $O_1$  и перпендикулярной к прямой  $OM_1$  (рис. 176). Пирамида  $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$  правильная, и точка  $O_1$  — центр ее основания.

При повороте пространства вокруг прямой  $OM_1$  на угол  $\frac{2\pi}{5}$  эта пирамида переходит в себя (легко заметить, что и весь икосаэдр  $F$  перейдет при этом в себя). Отсюда следует, что центры боковых граней пирамиды  $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$  являются вершинами правильного пятиугольника. Для каждой вершины  $M_i$  правильного икосаэдра мы получим, таким образом, соответствующий этой вершине правильный пятиугольник, причем, как нетрудно заметить, все эти правильные пятиугольники равны. Полученные правильные пятиугольники составляют границу некоторого додекаэдра (двенадцатигранника), у которого к тому же все многогранные углы трехгранные. Следовательно, этот додекаэдр правильный.

Правильный додекаэдр изображен на рисунке 177.

Центр правильного икосаэдра  $F$  является и центром правильного додекаэдра (т. е. общим центром трех сфер: описанной, вписанной и сферы, которая касается ребер додекаэдра).

Таким образом, существование всех пяти типов правильных многогранников доказано. На рисунках 178—182 приведены развертки всех пяти типов правильных многогранников. Эти развертки могут быть использованы для изготовления моделей правильных многогранников из плотной бумаги или картона.

Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что у *правильного многогранника все его двугранные углы равны.*

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что центры граней правильного многогранника  $F$  служат вершинами другого правильного многогранника  $F'$ . Так, центры граней правильного тетраэдра образуют правильный тетраэдр, центры граней куба — правильный октаэдр и наоборот, центры граней правильного додекаэдра — правильный икосаэдр и наоборот. Многогранники  $F$  и  $F'$  называются *взаимными*. Таким образом, взаимными являются куб и правильный октаэдр, а также правильный икосаэдр и правильный додекаэдр. Правильный тетраэдр взаимен сам себе.

## §47. Группы симметрий правильных многогранников

1. Пусть  $F$  — произвольная фигура. Множество  $D_F$  всех движений пространства, переводящих фигуру  $F$  в себя, является группой (подгруппа группы  $D$  движений пространства). Если группа  $D_F$  содержит более одного элемента, то она называется *группой симметрий фигуры  $F$* , а элементы этой группы называются преобразованиями симметрии или просто *симметриями фигуры  $F$* . Если же группа  $D_F$  состоит только из тождественного преобразования, то мы скажем, что фигура  $F$  не имеет симметрий.

Важную роль в изучении свойств фигуры  $F$  играют *элементы симметрии* этой фигуры. Дадим их определение.

Точка  $O$  называется *центром симметрии* фигуры  $F$ , если эта фигура переходит в себя в центральной симметрии относительно точки  $O$ . Плоскость  $\sigma$  называется *плоскостью симметрии* фигуры  $F$ , если эта фигура переходит в себя в симметрии относительно плоскости  $\sigma$ .

Прямая  $d$  называется *осью симметрии порядка  $n$  фигуры  $F$* , если фигура  $F$  переходит в себя при повороте вокруг прямой  $d$  на угол  $\frac{2\pi}{n}$ , где  $n$  — натуральное число и  $n \geq 2$ . В случае  $n = 2$  прямую  $d$  иногда называют просто осью симметрии фигуры  $F$  (без указания порядка).

Прямая  $d$  называется *зеркально-поворотной осью порядка  $2n$  фигуры  $F$* , если эта фигура переходит в себя при поворотном отражении с осью  $d$  и наименьшим по абсолютному значению углом  $\frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{2n}$ , где  $n$  — натуральное число и  $n \geq 2$ .

*Элементами симметрии фигуры  $F$  называются ее центры симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии и зеркально-поворотные оси.*

2. Рассмотрим некоторые свойства симметрий правильных многогранников. Пусть  $F$  — правильный многогранник. Очевидно, любая симметрия этого многогранника каждую его вершину переводит в некоторую вершину, каждое ребро — в некоторое ребро, каждую грань — в грань.

<sup>10</sup>. *Центр правильного многогранника является инвариантной точкой любой симметрии этого многогранника.*

□ Пусть  $F$  — данный многогранник с центром  $O$ , а  $f$  — некоторая симметрия этого многогранника. Если  $S$  — сфера, описанная около

многогранника  $F$ , то, очевидно,  $S = f(S)$  (так как все вершины многогранника  $F$  лежат на  $S$  и их образы также лежат на  $S$ ). Отсюда и следует, что  $O = f(O)$ . ■

Из этого свойства вытекает, что группа  $D_F$  правильного многогранника  $F$  не содержит движений, не имеющих инвариантных точек. Элементами группы  $D_F$  могут быть только повороты, центральные симметрии, симметрии относительно плоскости и поворотные отражения (см. ч. I, §70, п. 5). Далее, если группа  $D_F$  содержит центральную симметрию  $f$  относительно некоторой точки  $C$ , то эта точка — центр многогранника  $F$ . В самом деле, так как центральная симметрия  $f$  имеет только одну инвариантную точку, то по свойству  $1^0$  этой точкой является центр  $C$  многогранника  $F$ .

$2^0$ . *Группа  $D_F$  правильного многогранника  $F$  либо не содержит центральных симметрий, либо содержит только одну центральную симметрию относительно центра многогранника.*

$3^0$ . *Все оси симметрии, зеркально-поворотные оси симметрии и плоскости симметрии правильного многогранника  $F$  проходят через его центр  $O$ .*

□ Пусть  $d$  — ось симметрии правильного многогранника  $F$ . Это означает, что существует поворот  $f$  вокруг прямой  $d$ , такой, что  $F = f(F)$ . Так как все инвариантные точки движения  $f$  лежат на прямой  $d$ , то по свойству  $1^0$   $O \in d$ . Точно так же доказывается, что зеркально-поворотные оси и плоскости симметрии многогранника  $F$  проходят через точку  $O$ . ■

Докажем следующее вспомогательное предложение.

*Л е м м а. Пусть  $A, B, C$  — последовательные вершины одной грани, а  $A', B', C'$  — последовательные вершины той же или другой грани правильного многогранника  $F$ . Тогда существует одно и только одно преобразование симметрии многогранника  $F$ , которое переводит вершины  $A, B, C$  соответственно в вершины  $A', B', C'$ .*

□ Обозначим через  $O$  центр многогранника  $F$  и рассмотрим два аффинных репера  $R = (B, A, C, O)$  и  $R' = (B', A', C', O)$ , координатные векторы которых обозначим так:  $\vec{e}_1 = \vec{BA}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{BC}$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{BO}$ ;  $\vec{e}'_1 = \vec{B'A'}$ ,  $\vec{e}'_2 = \vec{B'C'}$ ,  $\vec{e}'_3 = \vec{B'O}$ . Если  $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ , а  $g'_{ij} = \vec{e}'_i \vec{e}'_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), то, очевидно,  $g_{ij} = g'_{ij}$ , так как длины координатных векторов репера  $R$  и углы между ними равны соответственно длинам координатных векторов и углам между ними репера  $R'$ .

Докажем сначала, что существует такое преобразование симметрии многогранника  $F$ , которое вершины  $A, B, C$  переводит соответственно в вершины  $A', B', C'$ . Для этого рассмотрим аффинное преобразование  $f$ , которое переводит репер  $R$  в репер  $R'$ . Докажем, что  $f$  — движение. В самом деле, пусть  $M_1$  и  $M_2$  — произвольные точки пространства, а  $M'_1$  и  $M'_2$  — их образы. Если обозначить через  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  в репере  $R$ , то по теореме 1 (ч. I, §72) точки  $M'_1$  и  $M'_2$  в репере  $R'$  имеют те же координаты. Поэтому, вычислив расстояние  $M_1 M_2$  в репере  $R$  по формуле (1) §33 и расстояние  $M'_1 M'_2$  в репере  $R'$  по той же формуле и учитывая, что  $g_{ij} = g'_{ij}$ , получаем  $M_1 M_2 = M'_1 M'_2$ . Таким образом,  $f$  сохраняет рас-

стояния, поэтому является движением. При движении  $f$  грань  $ABC \dots$  перейдет в грань  $A'B'C' \dots$ . Так как многогранник  $F$  правильный, то все его двугранные углы равны и все грани равны. Поэтому движение  $f$  переводит грани, смежные с  $ABC \dots$ , в грани, смежные с  $A'B'C' \dots$ , и т. д. Очевидно, что внутренность каждого двугранного угла переходит во внутренность соответствующего двугранного угла. Отсюда мы заключаем, что движение  $f$  переводит в себя как границу многогранника  $F$ , так и его внутренность, и, значит, движение  $f$  переводит многогранник  $F$  в себя.

Так как существует не более чем одно движение, которое репер  $R$  переводит в репер  $R'$  (ч. I, § 68, лемма), то  $f$  — единственное движение, удовлетворяющее условиям леммы. ■

Справедлива следующая основная теорема.

**Т е о р е м а 1.** Число элементов группы  $D_F$  симметрий правильно-го многогранника  $F$  равно удвоенному числу плоских углов всех его граней.

□ Пусть  $\angle ABC$  и  $\angle A'B'C'$  — плоские углы правильного многогранника  $F$ . По доказанной лемме существует единственное преобразование симметрии  $f_1$ , которое точки  $A, B, C$  переводит соответственно в точки  $A', B', C'$ , и другое единственное преобразование симметрии  $f_2$ , которое точки  $A, B, C$  переводит соответственно в точки  $C', B', A'$ . Поэтому если  $f$  — преобразование симметрии многогранника  $F$ , которое угол  $ABC$  переводит в угол  $A'B'C'$ , то  $f$  совпадает либо с  $f_1$ , либо с  $f_2$ . Отсюда и следует, что число элементов группы  $D_F$  равно  $2k$ , где  $k$  — число плоских углов всех граней многогранника  $F$ . ■

**Т е о р е м а 2.** Взаимные правильные многогранники  $F$  и  $F'$  имеют одни и те же элементы симметрии.

□ Допустим, что центры граней многогранника  $F$  служат вершинами многогранника  $F'$ . Если  $f \in D_F$ , то преобразование  $f$  центр каждой грани многогранника  $F$  переводит в центр той же или другой грани этого многогранника, поэтому симметрия  $f$  вершины многогранника  $F'$  переводит в вершины того же многогранника, т. е.  $f \in D_{F'}$ . Таким образом,  $D_F \subset D_{F'}$ . Пусть многогранники  $F$  и  $F'$  имеют соответственно  $k$  и  $k'$  плоских углов. Пользуясь таблицей (с. 168), легко установить, что  $k = k'$ . В самом деле, если, например,  $F$  — куб, то  $F'$  — октаэдр, поэтому по таблице на с. 168 находим  $k = 24$  и  $k' = 24$ . Аналогично если  $F$  — икосаэдр, а  $F'$  — додекаэдр, то  $k = 60$  и  $k' = 60$ . По теореме 1  $D_F$  и  $D_{F'}$  имеют одно и то же число симметрий, поэтому из соотношения  $D_F \subset D_{F'}$  следует, что  $D_F$  и  $D_{F'}$  совпадают. ■

Учитывая доказанную теорему, мы можем при изучении элементов симметрии правильных многогранников ограничиться рассмотрением элементов симметрии куба, правильного тетраэдра и правильного икосаэдра. Условимся обозначать через  $g^k, \bar{g}^k, \sigma$  соответственно ось симметрии порядка  $k$ , зеркально-поворотную ось порядка  $k$ , плоскость симметрии правильного многогранника. Если правильный многогранник имеет  $n$  осей симметрии порядка  $k$ , то мы запишем так:  $ng^k$ ; аналогично запишем и другие элементы симметрии.

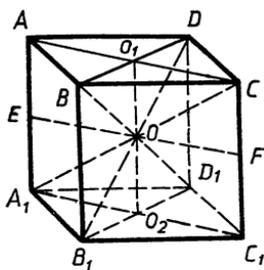


Рис. 183

**3. Элементы симметрии куба.** Пусть  $F = ABCDA_1B_1C_1D_1$  — данный куб, а  $O$  — его центр (рис. 183). Мы уже отмечали, что точка  $O$  является центром симметрии куба.

Куб имеет три оси симметрии четвертого порядка, проходящие через центры параллельных граней. На рисунке 183 изображена одна из этих осей — ось  $O_1O_2$ . Легко видеть, что каждая из этих осей является зеркально-поворотной осью четвертого порядка. Далее, куб имеет четыре оси симметрии третьего порядка, содержащие диагонали  $AC_1, BD_1, CA_1$  и  $DB_1$ . Каждая

из этих осей является зеркально-поворотной осью шестого порядка. Куб имеет шесть осей симметрии (второго порядка). Каждая из них проходит через середины двух ребер куба, принадлежащих его диагональному сечению. На рисунке 183 изображена одна из этих осей — прямая  $EF$ .

Куб имеет девять плоскостей симметрии. Шесть из них содержат по две диагонали куба (например, плоскость прямоугольника  $BDD_1B_1$  на рис. 183), а каждая из остальных трех проходит через центр куба параллельно двум параллельным граням.

Найденные элементы симметрии куба можно записать так:

$$O, 3g^4(3\bar{g}^4), 4g^3(4\bar{g}^6), 6g^2, 9\sigma. \quad (1)$$

Точка  $O$  по свойству  $2^0$  определяет только одно отражение, а плоскости  $9\sigma$  — девять отражений от этих плоскостей.

Найдем число различных симметрий, определяемых осями симметрии и зеркально-поворотными осями.

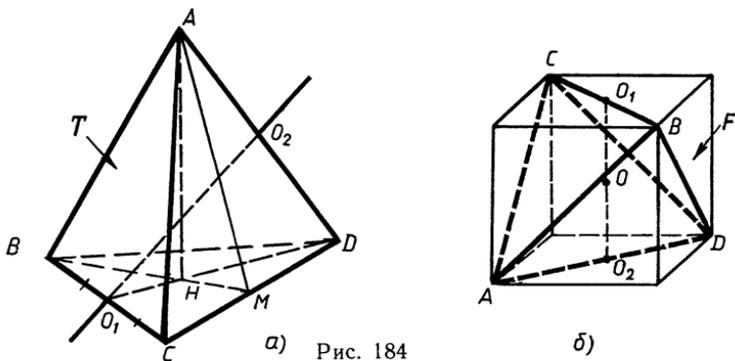
$3g^4(3\bar{g}^4)$ ; каждая прямая определяет три поворота (с углами поворота  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ ) и два поворотных отражения (с углами  $\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}$ ), отличных от тождественного преобразования и центральной симметрии. Значит, каждая прямая определяет пять симметрий, всего 15 симметрий.

$4g^3(4\bar{g}^6)$ ; каждая прямая определяет два поворота (с углами  $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ ) и два поворотных отражения (с углами  $\frac{5}{3}\pi, \frac{\pi}{3}$ ). Значит, каждая прямая определяет четыре симметрии, всего 16 симметрий.

$6g^2$ ; каждая прямая определяет одну симметрию, всего шесть симметрий.

Таким образом, элементы (1) определяют 48 симметрий с учетом тождественного преобразования. Учитывая теорему 1, мы приходим к выводу, что куб не имеет преобразований симметрии, отличных от тех, которые перечислены выше.

**4. Элементы симметрии правильного тетраэдра.** Пусть  $T = ABCD$  — правильный тетраэдр. Так как центр правильного тетраэдра не является центром его симметрии, то согласно свойству  $2^0$  п. 2 многогранник  $T$  не имеет центра симметрии.



а) Рис. 184

б)

Правильный тетраэдр  $T$  имеет четыре оси симметрии третьего порядка, каждая из которых проходит через одну из вершин и центр противоположной грани (прямая  $AH$  на рис. 184, а). Тетраэдр  $T$  имеет три оси симметрии второго порядка, совпадающие с осями четвертого порядка куба  $F$ , с помощью которого мы строили тетраэдр  $T$  (рис. 184, б). Эти же оси являются зеркально-поворотными осями четвертого порядка. Так, на рисунке 184, б ось  $O_1O_2$  — зеркально-поворотная ось четвертого порядка тетраэдра  $T$ . При повороте этого тетраэдра вокруг оси  $O_1O_2$  на угол  $\varphi = \frac{2\pi}{4}$  или  $\frac{3\pi}{2}$  и отражении от плоскости, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно к оси  $O_1O_2$ , тетраэдр  $T$  переходит в себя. (При повороте на угол  $\frac{2\pi}{4}$ :  $C \mapsto A$ ,  $B \mapsto D$ ,  $D \mapsto C$ ,  $A \mapsto B$ , а при повороте на угол  $\frac{3\pi}{2}$ :  $C \mapsto D$ ,  $B \mapsto A$ ,  $D \mapsto B$ ,  $A \mapsto C$ .) Отметим, наконец, что тетраэдр имеет шесть плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через некоторое ребро и середину противоположного ребра (например, плоскость  $ABM$  на рисунке 184, а). Таким образом, тетраэдр имеет следующие элементы симметрии:

$$4g^3, 3g^2(3\bar{g}^4), 6\sigma. \quad (2)$$

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что эти элементы симметрии в точном соответствии с теоремой 1 определяют 24 преобразования симметрии, включая тождественное преобразование.

**5. Элементы симметрии правильного икосаэдра.** Мы не будем подробно исследовать элементы симметрии правильного икосаэдра<sup>1</sup>. Отметим лишь, что правильный икосаэдр имеет следующие элементы симметрии:

$$O, 6g^5(6\bar{g}^{10}), 10g^3(10\bar{g}^6), 15g^2, 15\sigma. \quad (3)$$

В соответствии с теоремой 1 элементы (3) определяют с учетом тождественного преобразования 120 симметрий.

<sup>1</sup> Этот многогранник, так же как и правильный додекаэдр, почти не встречается в школьной практике.

В этой главе и в двух последующих главах мы будем изучать геометрические фигуры (линии и поверхности), применяя методы математического анализа. Такой раздел математики называется *дифференциальной геометрией*.

#### § 48. Векторная функция скалярного аргумента

1. Пусть  $V$  — трехмерное евклидово векторное пространство и  $I$  — некоторый числовой промежуток. Если каждому числу  $t \in I$  по некоторому закону поставлен в соответствие определенный вектор  $\vec{v}(t)$  из пространства  $V$ , то говорят, что в промежутке  $I$  задана *векторная функция  $\vec{v}(t)$  скалярного аргумента  $t$* . Легко заметить, что длина  $|\vec{v}(t)|$  вектора  $\vec{v}(t)$  является обычной (принимавшей числовые значения) функцией от переменной  $t$ .

Векторная функция  $\vec{v}(t)$ , определенная в промежутке  $I$ , называется *бесконечно малой* вблизи точки  $t_0 \in I$ , если функция  $|\vec{v}(t)|$  является бесконечно малой вблизи точки  $t_0$ , т. е. если  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{v}(t)| = 0$ .

*Пределом* функции  $\vec{v}(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  называется такой постоянный вектор  $\vec{a}$ , что разность  $\vec{v}(t) - \vec{a}$  бесконечно мала вблизи точки  $t_0$ . В этом случае пишут:  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$ .

Если в точке  $t_0 \in I$  имеем равенство  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0)$ , то векторная функция  $\vec{v}(t)$  называется *непрерывной в точке  $t_0$* . Векторная функция  $\vec{v}(t)$  называется *непрерывной в промежутке  $I$* , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Рассмотрим некоторую точку  $t \in I$  и дадим  $t$  приращение  $\Delta t$ , такое, что  $t + \Delta t \in I$ . Найдем вектор  $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ . Функция  $\vec{v}(t)$  называется *дифференцируемой* в точке  $t$ , если существует предел  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ . Этот предел обозначают через  $\dot{\vec{v}}(t)$  или через

$\frac{d\vec{v}}{dt}$  и называют *производной* функции  $\vec{v}(t)$  в точке  $t$ . Вектор  $d\vec{v} = \dot{v}dt$  называется дифференциалом функции  $\vec{v}(t)$  в точке  $t$ . Функция  $\vec{v}(t)$  называется *дифференцируемой* в промежутке  $I$  (или просто дифференцируемой), если она дифференцируема в каждой точке этого промежутка.

2. Рассмотрим векторную функцию  $\vec{v}(t)$ , заданную в промежутке  $I$ . Возьмем какой-нибудь ортонормированный базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  векторного пространства  $V$  и в каждой точке  $t \in I$  разложим вектор  $\vec{v}(t)$  по векторам этого базиса:

$$\vec{v}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1)$$

Таким образом, с помощью базиса  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  векторная функция  $\vec{v}(t)$  определяет три скалярные функции  $x(t), y(t), z(t)$ , заданные в том же промежутке  $I$ , в котором задана функция  $\vec{v}(t)$ . Эти функции называются *координатами* функции  $\vec{v}(t)$  в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ( $x(t)$  — первая координата,  $y(t)$  — вторая, а  $z(t)$  — третья).

Из равенства (1) следует, что векторная функция  $\vec{v}(t)$  непрерывна в точке  $t_0 \in I$  тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна каждая из функций  $x(t), y(t), z(t)$ . Если  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$  — постоянный вектор, то

$$|\vec{v}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2}. \quad (2)$$

Из формулы (2) непосредственно следует, что  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_2, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_3$ .

Пользуясь этими утверждениями, докажем следующую теорему.

**Теорема.** Функция  $\vec{v}(t)$ , заданная в промежутке  $I$  своими координатами с помощью разложения (1), дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируема каждая из функций  $x(t), y(t), z(t)$ . При этом

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (3)$$

□ Из формулы (1) находим  $\Delta\vec{v} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$ , где  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t), \Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$ . Получаем:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}. \quad (4)$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. В самом деле, по предыдущему предел  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  существует тогда и только тогда,

когда существуют пределы  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$ ,

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$  и имеет место формула (3). ■

Рассмотрим примеры дифференцируемых функций.

Пример 1.  $\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$ , где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — постоянные векторы.

Функция  $\vec{v}(t)$  задана на всей числовой оси. Если в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют координаты  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ , то  $x(t) = a_1t + b_1$ ,  $y(t) = a_2t + b_2$ ,  $z(t) = a_3t + b_3$ . По доказанной теореме функция  $\vec{v}(t)$  дифференцируема, причем

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = \vec{a}.$$

Мы видим, что производная функции  $\vec{v}(t)$  — постоянный вектор.

Пример 2.  $\vec{v}(t) = (a \cos t)\vec{i} + (a \sin t)\vec{j} + (bt)\vec{k}$ , где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — ортонормированный базис,  $a$  и  $b$  — постоянные числа.

В данном базисе координатами  $\vec{v}(t)$  являются числовые функции

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = bt.$$

По доказанной теореме  $\vec{v}(t)$  — дифференцируемая функция, причем

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (-a \sin t)\vec{i} + (a \cos t)\vec{j} + b\vec{k}.$$

3. Нетрудно доказать, что для любых векторных функций  $\vec{v}(t)$ ,  $\vec{w}(t)$  и числовой функции  $f(t)$ , дифференцируемых в промежутке  $I$ , справедливы следующие правила дифференцирования:

- 1<sup>0</sup>.  $\frac{d}{dt}(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt}$ ;
- 2<sup>0</sup>.  $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{w} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt}$ ;
- 3<sup>0</sup>.  $\frac{d}{dt}[\vec{v}, \vec{w}] = \left[ \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{w} \right] + \left[ \vec{v}, \frac{d\vec{w}}{dt} \right]$ ;
- 4<sup>0</sup>.  $\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{df}{dt}\vec{v} + f \frac{d\vec{v}}{dt}$ .

Докажем, например, формулу 4<sup>0</sup>. Выберем ортонормированный базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и обозначим через  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  координаты функции  $\vec{v}(t)$  в этом базисе. Тогда функция  $f(t) \cdot \vec{v}(t)$  в том же базисе имеет координаты  $f(t)x(t)$ ,  $f(t)y(t)$ ,  $f(t)z(t)$ . По доказанной теореме

$$\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{d(fx)}{dt}\vec{i} + \frac{d(fy)}{dt}\vec{j} + \frac{d(fz)}{dt}\vec{k}.$$

Отсюда, используя правила дифференцирования числовых функций, получаем:

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}v) = \frac{df}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + f\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) = \frac{df}{dt}\vec{v} + f\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Предлагаем читателю аналогично доказать справедливость формул  $1^0$ ,  $2^0$  и  $3^0$ .

В дальнейшем изложении используется следующая лемма.

**Л е м м а.** Если в промежутке  $I$  имеем  $|\vec{v}(t)| = 1$ , то в каждой точке  $t \in I$  вектор  $\vec{v}(t)$  ортогонален производной  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ , найденной в этой точке.

□ По условию имеем тождество в промежутке  $I$ :  $\vec{v}^2 = 1$ . Дифференцируя по переменной  $t$  это тождество, используя правило  $2^0$ , находим  $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ . Отсюда и следует, что векторы  $\vec{v}$  и  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  ортогональны в каждой точке промежутка  $I$ . ■

**З а м е ч а н и е.** Производная  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  данной функции  $\vec{v}(t)$ , заданной в промежутке  $I$ , является векторной функцией в этом промежутке. Поэтому по аналогии с числовыми функциями можно ввести понятие производных высших порядков:  $\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$ ,  $\frac{d^3\vec{v}}{dt^3}$ , ...,  $\frac{d^n\vec{v}}{dt^n}$ .

## § 49. Понятие линии

1. Первоначальное представление о линии нам дают наши наблюдения траектории движущейся материальной частицы, обращение с проволокой, нитью и т. п. Математическое понятие линии явилось результатом абстракции этого первоначального представления.

Пусть частица  $M$  движется в евклидовом пространстве  $E_3$ . Зададим в пространстве прямоугольную систему координат  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ . Положение частицы в момент времени  $t$  (из некоторого временного промежутка  $I$ ) можно определить радиус-вектором  $\vec{r}(t)$  точки  $M$  относительно точки  $O$ . Когда  $t$  меняется в промежутке  $I$ , мы получаем векторную функцию  $\vec{r}(t)$  скалярного аргумента  $t$ , определенную в промежутке  $I$ . Эта функция имеет координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  в базе  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Это значит, что

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (1)$$

причем  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  — координаты точки  $M$  в момент времени  $t$ .

Равенство (1) называют *законом движения частицы  $M$*  в системе координат  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ . Когда время  $t$  изменяется в промежутке  $I$ , точка  $M$  описывает в пространстве некоторую траекторию (рис. 185).

Эти простые соображения, взятые из механики, позволяют нам получить наглядное представление о так называемой элементарной линии (строгое определение элементарной линии дано в п. 2): если

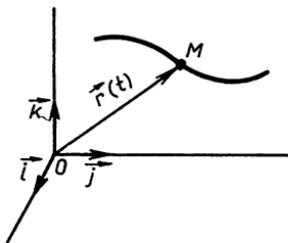


Рис. 185

закон (1) устанавливает гомеоморфизм промежутка  $I$ , в котором изменяется время  $t$ , на траекторию точки  $M$ , то эта траектория называется *элементарной линией*.

2. Простейшими линиями в пространстве  $E_3$  назовем любую прямую, отрезок и луч (здесь мы лучом называем замкнутый луч).

Фигура  $\gamma_0 \subset E_3$  называется *элементарной линией* (или *элементарной кривой*), если она гомеоморфна одной из простейших линий. Фигура, гомеоморфная отрезку, называется *дугой*.

Пусть нам дана прямая  $d$ . Зададим на ней какую-нибудь систему координат  $O'e$ . Если каждому числу  $t \in \mathbf{R}$  поставить в соответствие точку  $M$  с координатой  $t$  ( $\overrightarrow{O'M} = t\vec{e}$ ), то мы получим биективное отображение  $\mathbf{R} \rightarrow d$ . Нетрудно заметить, что это отображение является гомеоморфизмом. В этом отображении числовая прямая  $\mathbf{R}$  переходит в прямую  $d$ , интервал  $] \alpha, \beta [$  — в отрезок без концов (гомеоморфный прямой, см. § 37, п. 2), числовой отрезок  $[\alpha, \beta]$  — в отрезок  $AB$ , где  $A$  и  $B$  — образы концов  $\alpha$  и  $\beta$  отрезка  $[\alpha, \beta]$ . Промежуток  $[\alpha, \beta]$  переходит в отрезок  $AB$  без конца  $B$  ( $A$  и  $B$  — образы чисел  $\alpha$  и  $\beta$ ), который гомеоморфен лучу.

Таким образом, любой числовой промежуток (т. е. вся числовая прямая, числовой замкнутый луч, числовой отрезок, числовой отрезок без одного или без двух концов) гомеоморфен одной из простейших линий. Так как отношение гомеоморфизма является отношением эквивалентности (см. § 37, п. 2), то данное выше определение элементарной линии можно сформулировать так: *фигура  $\gamma_0 \subset E_3$  называется элементарной линией, если она гомеоморфна некоторому числовому промежутку*.

Рассмотрим примеры элементарных линий.

**Пример 1.** В § 37 мы доказали, что полуокружность  $\omega$  с концами  $A$  и  $B$  гомеоморфна отрезку, поэтому полуокружность  $\omega$  является элементарной линией, точнее, дугой.

Полуокружность  $\omega'$  без концов  $A$  и  $B$  гомеоморфна прямой (см. § 37, пример 2), поэтому полуокружность  $\omega'$  — элементарная линия.

**Пример 2.** Синусоиду  $y = \sin x$ , заданную в прямоугольной системе координат  $Oij$ , можно рассматривать как фигуру, заданную в системе координат  $Oijk$  уравнениями

$$x = t, y = \sin t, z = 0, \text{ где } t \in \mathbf{R}.$$

Эти уравнения устанавливают гомеоморфизм между множеством  $\mathbf{R}$  и синусоидой. Так как  $\mathbf{R}$  гомеоморфно оси  $Ox$ , то синусоида — элементарная линия.

Из сказанного выше следует, что если в пространстве  $E_3$  задана прямоугольная система координат  $Oijk$ , то элементарная линия  $\gamma_0$  определяется системой уравнений

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (2)$$

где  $t$  изменяется в некотором промежутке  $I$ , а правые части в формулах (2) — непрерывные в промежутке  $I$  функции, которые и осуществляют гомеоморфное отображение  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  промежутка  $I$  на линию  $\gamma_0$ .

Уравнения (2) называются *параметрическими уравнениями* данной линии.

Здесь возникает следующий вопрос: если написать уравнения вида (2), где правые части непрерывны в некотором промежутке  $I$ , то что надо потребовать от правых частей, чтобы эти уравнения определяли элементарную линию? Можно доказать, что для этого достаточно потребовать, чтобы хоть одна из этих правых частей была строго монотонна в промежутке  $I$ .

**3. Линией (или кривой) называется фигура, которую можно покрыть конечным или счетным множеством элементарных линий.**

Из этого определения вытекает следующий важный вывод: *если  $\gamma$  — некоторая линия и  $M$  — точка на ней, то существует элементарная линия  $\gamma_0$ , такая, что  $M \in \gamma_0 \subset \gamma$ .*

**Пример 3.** Окружность (рис. 186) можно покрыть двумя дугами  $AMB$  и  $CND$ . Следовательно, окружность является линией в смысле данного здесь определения.

**Пример 4.** График функции  $y = \operatorname{tg} x$  (тангенсоида) состоит из счетного множества элементарных линий, каждая из которых является графиком этой функции при изменении  $x$  в интервале  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ). Следовательно, вся тангенсоида является линией.

Точно так же можно убедиться, что гипербола является линией. Она состоит из двух ветвей, каждая из которых гомеоморфна прямой линии.

Пусть даны линия  $\gamma$  и на ней точка  $M$ . Точка  $M$  называется *обыкновенной точкой* линии  $\gamma$ , если существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что пересечение линии  $\gamma$  с  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $M$ , т. е. фигура  $\gamma \cap B(M, \varepsilon)$ , является элементарной линией (рис. 187).

При этом различают два случая:

а) это пересечение гомеоморфно прямой; такая точка называется *внутренней*;

б) это пересечение гомеоморфно лучу; такая точка называется *границной* или *концом* линии.

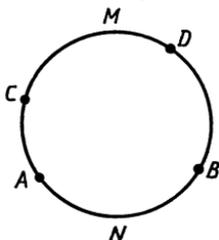


Рис. 186

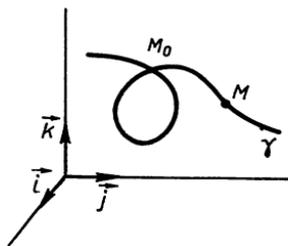


Рис. 187

Точка  $M_0 \in \gamma$  называется *особой* (точнее, топологически особой), если она не является обыкновенной (рис. 187).

Линия, все точки которой обыкновенные, называется *простой*. Следовательно, всякая элементарная линия простая. Окружность, эллипс — примеры линий, которые являются простыми, но не элементарными. Можно заметить, что всякая простая линия является одномерным многообразием (или одномерным многообразием с краем). Известные из математического анализа лист Декарта и лемниската Бернулли — примеры линий, не являющихся простыми (каждая из них имеет по одной особой точке).

**З а м е ч а н и е.** Можно доказать, что всякая простая линия или является элементарной, или гомеоморфна окружности.

4. В предыдущем пункте было отмечено, что любая элементарная линия  $\gamma_0$  задается параметрическими уравнениями вида (2), которые определяют эту линию относительно прямоугольной системы координат  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  и в то же время устанавливают гомеоморфное отображение надлежащего числового промежутка  $I$  на элементарную линию  $\gamma_0$ . Но сами функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  могут иметь, как говорят в анализе, *естественную область* определения, которую мы обозначим через  $U$  и которая содержит промежуток  $I$ , но не совпадает с ним. Когда параметр  $t$  изменяется в области  $U$ , уравнения (2) определяют некоторую фигуру  $\gamma \subset E_3$ , причем  $\gamma_0 \subset \gamma$ . Если область  $U$  можно покрыть не более как счетным множеством промежутков  $I_k: U = \bigcup_k I_k$ , в каждом из которых уравнения (2) определяют элементарную линию  $\gamma_k$ , то  $\gamma = \bigcup_k \gamma_k$ , тем самым фигура  $\gamma$  оказывается покрытой не более как счетным множеством элементарных линий, и по определению  $\gamma$  — линия. Уравнения (2) являются ее параметрическими уравнениями.

## § 50. Гладкие линии

1. Пусть элементарная линия  $\gamma_0$  определена параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (1)$$

где  $t$  изменяется в некотором промежутке  $I$ . Линия  $\gamma_0$  называется *гладкой линией класса  $C^k$* , где  $k$  — некоторое натуральное число, если функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  имеют в промежутке  $I$  непрерывные производные до порядка  $k$  включительно, причем в каждой точке  $t \in I$  должно выполняться условие

$$\text{ранг} \|\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\| = 1 \quad (2)$$

(точка над обозначением переменной означает дифференцирование этой переменной по параметру  $t$ ).

Геометрический смысл условия (2) будет выяснен в следующем параграфе. Аналитически это условие означает, что производные  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  не обращаются в нуль одновременно ни при каком значении  $t$  из промежутка  $I$ .

**П р и м е р 1.** Уравнения  $x = t, y = \sin t, z = 0, t \in \mathbf{R}$  определяют синусоиду на плоскости  $Oxy$  (см. § 49, пример 2). Правые части уравнений синусоиды имеют в  $\mathbf{R}$  непрерывные производные любого поряд-

ка, причем  $\dot{x} = 1$ ,  $\dot{y} = \cos t$ ,  $\dot{z} = 0$  и условие (2) выполнено. Следовательно, синусоида — гладкая линия класса  $C^\infty$ .

*Простая линия  $\gamma$  называется гладкой класса  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), если у каждой ее внутренней точки  $M$  существует такая  $\varepsilon$ -окрестность  $B(M, \varepsilon)$ , что пересечение  $\gamma \cap B(M, \varepsilon)$  — гладкая (элементарная) линия класса  $C^k$ .*

Нетрудно убедиться в том, что окружность является гладкой линией класса  $C^\infty$ . В самом деле, окружность радиуса  $a$  в прямоугольной системе координат  $O\overset{\text{---}}{i}\overset{\text{---}}{j}$  имеет параметрические уравнения  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ . Ее можно рассматривать как фигуру, заданную в системе координат  $O\overset{\text{---}}{i}\overset{\text{---}}{j}\overset{\text{---}}{k}$  по закону

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = 0. \quad (3)$$

Выше было отмечено, что окружность можно покрыть двумя дугами, каждая из которых определяется параметрическими уравнениями (3), причем для одной дуги  $t \in I_1$ , а для другой —  $t \in I_2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  — числовые промежутки, покрывающие промежуток  $0 \leq t < 2\pi$ . Правые части уравнений (3) имеют в  $\mathbf{R}$  непрерывные производные любого порядка, причем  $\dot{x} = -a \sin t$ ,  $\dot{y} = a \cos t$ ,  $\dot{z} = 0$  и условие (2) выполнено, так как  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \neq 0$ . Следовательно, окружность — простая гладкая линия класса  $C^\infty$ .

2. Пусть уравнения (1) определяют линию  $\gamma$  в некоторой области  $U$  изменения переменной  $t$ . Эта линия называется *кусочно-гладкой*, если область  $U$  можно покрыть не более как счетным множеством промежутков  $I_k$ , *внутри* каждого из которых уравнения (1) определяют гладкую линию (на концах этих промежутков требование гладкости может нарушаться).

**Пример 2.** Фигура, определяемая уравнениями

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 0, \quad (4)$$

где  $a = \text{const} > 0$ , называется *обыкновенной циклоидой* или просто *циклоидой*. Она лежит в плоскости  $Oxy$  и изображена на рисунке 188. Циклоида гомеоморфна прямой линии (это нетрудно установить, ортогонально проектируя ее на ось  $Ox$ ) и, значит, является элементарной кривой. Но эта линия не является гладкой. В точках  $t = 2ak\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) имеем  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $\dot{z} = 0$ , и, значит, условие (2) нарушено. Как показывают уравнения (4), циклоида определена на всей числовой прямой  $\mathbf{R}$ . Числовую прямую можно покрыть счетным множеством числовых отрезков  $I_k = [2a(k-1)\pi, 2ak\pi]$ , *внутри* каждого из которых, т. е. в каждом интервале  $I_k = ]2a(k-1)\pi, 2ak\pi[$ , уравнения (4) определяют гладкую линию. Следовательно, циклоида — кусочно-гладкая линия.

3. Пусть уравнения (1) определяют элементарную линию  $\gamma_0$

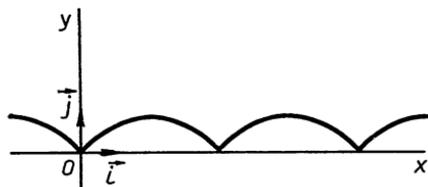


Рис. 188

при изменении параметра  $t$  в некотором промежутке  $I$ . Как отмечалось выше, эти уравнения устанавливают определенный гомеоморфизм  $f: I \rightarrow \gamma_0$  так, что  $f(I) = \gamma_0$ . Если гомеоморфизм  $h$  переводит промежуток  $I$  в промежуток  $I'$  по некоторому закону  $\tau = h(t)$ , где  $t \in I$ ,  $\tau \in I'$ , то обратное отображение  $h^{-1}: I' \rightarrow I$  также является гомеоморфизмом, причем  $t = h^{-1}(\tau)$ .

Подставляя выражение  $t$  в правые части уравнений (1), получим:

$$x = f_1(\tau), \quad y = f_2(\tau), \quad z = f_3(\tau), \quad (5)$$

где  $f_1(\tau) = x(h^{-1}(\tau))$ ,  $f_2(\tau) = y(h^{-1}(\tau))$ ,  $f_3(\tau) = z(h^{-1}(\tau))$  — сложные функции переменной  $\tau$ , причем  $\tau$  изменяется в промежутке  $I'$ . Обозначим отображение  $I' \rightarrow E_3$  по закону (5) через  $g$ . Как показывает сравнение формул (1) и (5) (где  $x, y, z$  — одни и те же),  $f(t) = g(\tau)$ , если  $\tau = h(t)$ . Отсюда  $f = gh$  и  $g = f \cdot h^{-1}$ . Значит,  $g$  — гомеоморфизм. Он переводит промежуток  $I'$  в линию  $\gamma_0$ .

Говорят, что функция  $\tau = h(t)$  *определяет замену параметра  $t$  на линии  $\gamma_0$* . Таким образом, в общем случае элементарной линии замена параметра в уравнениях (1) осуществляется с помощью гомеоморфизма  $h: I \rightarrow I'$ . Несколько сложнее обстоит дело в случае гладкой кривой. Прежде всего функция  $\tau = h(t)$  должна быть дифференцируемой в промежутке  $I$ . Но этого мало. Так как по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad (6)$$

то условие (2), которому должна удовлетворять гладкая линия, налагает на функцию  $\tau = h(t)$  следующее ограничение: производная  $\frac{d\tau}{dt}$  не обращается в нуль нигде в промежутке  $I$ . Кроме того, чтобы линия  $\gamma_0$  принадлежала по-прежнему (и при новой параметризации) классу  $C^k$ , надо потребовать, чтобы функция  $h(t)$  имела в промежутке  $I$  непрерывные производные до порядка  $k$  включительно.

Итак, для гладкой кривой  $\gamma_0$  класса  $C^k$ , заданной уравнениями (1), где  $t$  изменяется в промежутке  $I$ , мы считаем допустимой только такую замену параметра  $h: I \rightarrow I'$ , когда функция  $h(t)$  имеет в промежутке  $I$  непрерывные производные до порядка  $k$  включительно, и первая производная  $\frac{dh}{dt}$  во всех точках промежутка отлична от нуля. Рассмотрим пример.

**Пример 3.** Параболу  $y = x^2$  плоскости  $Oxy$  в пространстве  $E_3$  можно задать параметрически уравнениями  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = 0$ , где  $t$  изменяется в промежутке  $I = \mathbf{R}$ . Парабола — гладкая линия класса  $C^\infty$ . Замена параметра  $\tau = t^3 + t$  является допустимой, так как функция  $h(t) = t^3 + t$  имеет непрерывные производные любого порядка и  $\frac{dh}{dt} = 3t^2 + 1 \neq 0$  при любом  $t$ . Однако замена параметра по формуле  $\tau = t^2$  недопустима, потому что она переводит промежуток  $I$  в негомеоморфный ему промежуток  $I' = [0, \infty[$ . Замена параметра по формуле  $\tau = t^3$  также недопустима. В самом деле,

хотя здесь функция  $t^3$  имеет в промежутке  $I$  непрерывные производные любого порядка и эта замена гомеоморфно отображает промежуток  $I$  на себя, но  $\frac{dt}{dt} = 0$  при  $t = 0 \in I$ .

4. Мы знаем, что если в пространстве  $E_3$  задана прямоугольная система координат, то прямую линию (которую мы теперь можем рассматривать как частный случай гладкой кривой) можно задать системой двух независимых линейных уравнений относительно координат  $x, y, z$  текущей точки прямой. Естественно, возникает такой вопрос: когда система уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

определяет гладкую кривую? Здесь  $F$  и  $\Phi$  — функции от переменных  $x, y, z$ . Ответ на этот вопрос дает *теорема о неявных функциях*, которую доказывают в руководствах по математическому анализу. Эта теорема состоит в следующем.

Допустим, что  $G$  — множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (7). Пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$  — такая точка, что выполняются следующие два условия: а) в некоторой окрестности  $V_{M_0}$  точки  $M_0$  левые части уравнений (7) непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка; б) в самой точке  $M_0$  ранг  $\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{pmatrix} = 2$ . Тогда существует окрестность  $V_{M_0}^* \subset V_{M_0}$  точки  $M_0$ , такая, что пересечение  $V_{M_0}^* \cap G$  является гладкой кривой.

Если при этом в точке  $M_0$  имеем  $\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix} \neq 0$ , то в окрестности  $V_{M_0}^*$  систему уравнений (7) можно разрешить относительно  $y$  и  $z$ . Получим  $y = f(x), z = g(x)$ .

В математическом анализе доказывают, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют непрерывные производные первого порядка в соответствующем промежутке  $I$ . Следовательно, уравнения  $x = t, y = f(t), z = g(t)$  определяют гладкую линию  $\gamma_0$ , проходящую через точку  $M_0$  и лежащую в окрестности  $V_{M_0}^*$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать только гладкие линии, необязательно элементарные. При этом мы назовем линию гладкой, если все покрывающие ее элементарные кривые являются гладкими. Например, окружность — гладкая линия.

## § 51. Касательная. Длина дуги

1. Если в пространстве задана прямоугольная система координат  $O \overset{---}{i} \overset{---}{j} \overset{---}{k}$ , то гладкая линия  $\gamma_0$  класса  $C^k$  может быть задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (1)$$

где в некотором промежутке  $I$  правые части этих уравнений имеют

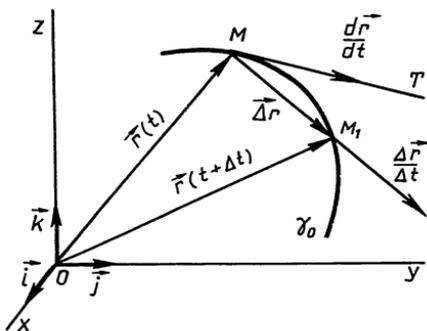


Рис. 189

непрерывные производные до порядка  $k$  включительно и в этом промежутке

$$\text{ранг} \left\| \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\| = 1. \quad (2)$$

Умножив уравнения (1) соответственно на  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  и сложив, получаем:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (3)$$

где  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , а  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ . Здесь  $\vec{r}(t)$  —

векторная функция с координатами  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , определенная в промежутке  $I$ . Уравнения (1) равносильны одному векторному уравнению (3), которое является уравнением той же линии  $\gamma_0$  в векторной форме.

Условие (2) выражает тот факт, что при любом значении  $t \in I$  имеем  $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$ .

Возьмем на гладкой линии  $\gamma_0$  две точки  $M$  и  $M_1$ , определяемые радиус-векторами  $\vec{r}(t)$  и  $\vec{r}(t + \Delta t)$ . Вектор  $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  является направляющим вектором секущей прямой  $MM_1$ . Следовательно, вектор  $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$  также направляющий вектор секущей  $MM_1$  (рис. 189).

Когда  $\Delta t$  стремится к нулю, точка  $M_1$ , перемещаясь по линии  $\gamma_0$ , неограниченно приближается к точке  $M$  и в пределе совпадает с ней. Секущая  $MM_1$  вращается при этом вокруг точки  $M$  и в пределе совпадает с касательной  $MT$  к линии  $\gamma_0$  в точке  $M$  (касательная  $MT$  определяется, как предельное положение секущей). Направляющий вектор  $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$  секущей  $MM_1$  в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  станет направляющим вектором  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  касательной  $MT$ . Если взять другую параметризацию кривой  $\gamma_0 : \tau = h(t)$ , то получим:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}. \quad (4)$$

Так как  $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$  во всех точках промежутка  $I$ , то из равенства (4) следует, что  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  и  $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$  коллинеарны, и во всех точках промежутка  $I$  имеем  $\frac{d\vec{r}}{d\tau} \neq 0$ . Следовательно,  $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$  — направляющий вектор той же касательной  $MT$ . Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема.** В каждой точке  $M$  гладкой линии  $\gamma_0$ , заданной уравнением (3), существует касательная прямая, которая определяется точкой  $M$  и направляющим вектором  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ .

**З а м е ч а н и е.** Уравнение  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , где  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , можно рассматривать как закон движения точки  $M$  по линии  $\gamma_0$ , если под  $t$  понимать время, прошедшее с начала движения. Тогда, как устанавливают в механике, производная  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  есть вектор скорости  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ . Вторая производная  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{w}$  есть вектор ускорения точки  $M$  в момент времени  $t$ .

2. Пусть гладкая линия  $\gamma_0$  класса  $C^k$  определена уравнениями (1), где  $t$  изменяется в некотором промежутке  $I$ . Возьмем числовой отрезок  $[\alpha, t] \subset I$ . Когда  $t$  меняется на этом отрезке, уравнения (1) определяют гладкую дугу  $\gamma_1$  с концами в точках  $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$  и  $B(x(t), y(t), z(t))$ . Как известно из курса математического анализа, длина  $s$  дуги  $\gamma_1$  вычисляется по формуле

$$s = \int_{\alpha}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (5)$$

или в векторной форме:

$$s = \int_{\alpha}^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt. \quad (6)$$

Следовательно, длина дуги  $s = s(t)$  является функцией от параметра  $t$ .

По свойству интеграла с переменным верхним пределом из равенства (5) находим:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|. \quad (7)$$

Следовательно, длина дуги  $s(t)$  гладкой линии является возрастающей функцией параметра  $t$ .

Возьмем промежуток  $I_0 = \{t \in I \mid t \geq \alpha\}$ . Если рассматривать уравнения (1) только в промежутке  $I_0$ , то они определяют некоторую гладкую линию  $\gamma_1 \subset \gamma_0$  (того же класса  $C^k$ ). Формула (5) устанавливает отображение  $s = s(t)$  промежутка  $I_0$  на некоторый промежуток  $I_0^* \subset \mathbf{R}$ . Функция  $s = s(t)$  строго возрастает в промежутке  $I_0$ . Следовательно, для нее существует обратная функция  $t = t(s)$ , причем

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} > 0. \quad (8)$$

Из формулы (5) мы заключаем, что функция  $s(t)$  имеет в промежутке  $I_0$  непрерывные производные до порядка  $k$  включительно.

Из равенства (8) следует, что функция  $t(s)$  имеет в промежутке  $I_0^*$  непрерывные производные до порядка  $k$  включительно. Следовательно, функция  $s(t)$  устанавливает гомеоморфизм  $I_0 \rightarrow I_0^*$ , который является допустимым преобразованием параметра на гладкой линии  $\gamma$ .

Таким образом, в качестве параметра на линии можно принять длину дуги  $s$ , отсчитываемую от некоторой точки этой линии. Такая параметризация называется *естественной параметризацией* линии  $\gamma$ .

3. Пусть на гладкой линии выбрана естественная параметризация. Тогда уравнения (1) имеют вид:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

где  $s$  — длина дуги линии, отсчитанная от некоторой точки  $A$ . В этом случае из формулы (7), где надо положить  $t = s$ , находим:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1, \quad \text{т. е.} \quad \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1.$$

Отсюда следует, что  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  — единичный вектор. По предыдущей теореме этот вектор является направляющим вектором касательной к линии в соответствующей точке  $M$ . Мы будем называть его *единичным вектором касательной к линии* в точке  $M$  и обозначать через  $\vec{\tau}$ :

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}.$$

## § 52. Кривизна и кручение линии

1. Рассмотрим гладкую линию  $\gamma$  класса  $C^k$  (где  $k \geq 3$ ), определенную уравнением в естественной параметризации:

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \quad (1)$$

Если в пространстве выбрана система координат  $Oi\ j\ k$ , то уравнение (1) равносильно уравнениям

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (1')$$

Вектор  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  является единичным вектором касательной к линии  $\gamma$  в точке  $M$ , где  $\vec{OM} = \vec{r}$  (рис. 190).

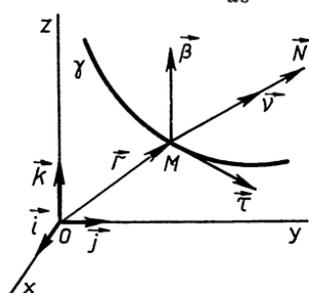


Рис. 190

Вектор  $\vec{N} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$  называется *вектором кривизны* линии  $\gamma$  в точке  $M$ , а его длина  $|\vec{N}| = k$  — *кривизной* линии  $\gamma$  в этой точке. На всей линии  $\gamma$  кривизна  $k$  является функцией параметра  $s$ .

Если в данной точке  $M$  имеем  $k \neq 0$ , то число  $\rho = \frac{1}{k}$  называется *радиусом*

кривизны линии в точке  $M$ . Таким образом, если линия задана в естественной параметризации (1), то ее кривизна вычисляется по формуле:

$$k = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|. \quad (2)$$

Если линия  $\gamma$  задана уравнениями (1'), то формула (2) принимает вид:

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \quad (2')$$

**Т е о р е м а 1.** *Для того чтобы связная линия  $\gamma$  была простейшей, необходимо и достаточно, чтобы кривизна была равна нулю в каждой точке этой линии.*

□ Пусть линия  $\gamma$  является простейшей (т. е. прямой, отрезком или лучом). Тогда она определяется следующим уравнением в естественной параметризации:

$$\vec{r} = \vec{p}s + \vec{r}_0,$$

где  $s$  принадлежит некоторому промежутку  $I$ , а  $\vec{p}$  и  $\vec{r}_0$  — постоянные векторы. Отсюда получаем  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{p}$ ,  $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{0}$ . По формуле (2)  $k = 0$  для всех  $s \in I$ .

Обратно: пусть для всех точек линии (1) кривизна равна нулю. Пользуясь равенством (2'), получаем  $\frac{d^2x}{ds^2} = 0$ ,  $\frac{d^2y}{ds^2} = 0$ ,  $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ .

Отсюда следует, что  $\frac{dx}{ds} = p_1$ ,  $\frac{dy}{ds} = p_2$ ,  $\frac{dz}{ds} = p_3$ , где  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  — постоянные числа. Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$x = p_1s + x_0, \quad y = p_2s + y_0, \quad z = p_3s + z_0, \quad (3)$$

где  $s \in I$ . Из параметрических уравнений (3) линии  $\gamma$  следует, что эта линия содержится в прямой, заданной параметрическими уравнениями (3), где  $s \in \mathbf{R}$  (т. е. прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и параллельной вектору  $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ ). Так как по условию линия связная, то она простейшая. ■

**2.** В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что во всех точках линии  $\gamma$  кривизна отлична от нуля. При этом предположении через каждую точку  $M$  линии проходит прямая<sup>1</sup>  $(M, \vec{N})$ ; она называется *главной нормалью* линии  $\gamma$  в точке  $M$ . По лемме § 48 имеем  $\vec{N} \perp \vec{\tau}$ . Следовательно, *главная нормаль*  $(M, \vec{N})$  перпендикулярна к касательной  $(M, \vec{\tau})$ .

<sup>1</sup>  $(M, \vec{N})$  — прямая, проходящая через точку  $M$  и параллельная вектору  $\vec{N}$ . Аналогично  $(M, \vec{p}, \vec{q})$  — плоскость, проходящая через точку  $M$  и параллельная векторам  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ .

Вектор  $\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \vec{v}$  называется *единичным вектором главной нормали*. Так как  $|\vec{N}| = k$ , то  $\vec{N} = k\vec{v}$ , т. е.

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{v}. \quad (4)$$

Определим еще вектор  $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{v}]$ . Прямая  $(M, \vec{\beta})$  называется *бинормалью* линии  $\gamma$  в точке  $M$ , а вектор  $\vec{\beta}$  — *единичным вектором бинормали*.

Точка  $M$  и тройка векторов  $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$  определяют ортонормированный репер  $R_M$ , который называют *каноническим репером* линии  $\gamma$  в точке  $M$  (см. рис. 190). Таким образом, в каждой точке гладкой линии, в которой кривизна этой линии отлична от нуля, можно построить канонический репер.

Координатные плоскости репера  $R_M$  носят следующие названия:

$(M, \vec{\tau}, \vec{v})$  — *соприкасающаяся плоскость*;

$(M, \vec{v}, \vec{\beta})$  — *нормальная плоскость*;

$(M, \vec{\tau}, \vec{\beta})$  — *спрямляющая плоскость*.

При перемещении точки  $M$  по линии  $\gamma$  перемещается и репер  $R_M$ . Учитывая это, репер  $R_M$  часто называют *подвижным репером* линии  $\gamma$ .

3. Так как вектор  $\vec{v}$  единичный, то  $\frac{d\vec{v}}{ds} \perp \vec{v}$ , и, значит, вектор  $\frac{d\vec{v}}{ds}$  параллелен спрямляющей плоскости. Поэтому его можно разложить по векторам  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\beta}$ :

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = \alpha\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}. \quad (5)$$

Тождество  $\vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0$  дифференцируем по параметру  $s$ :  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{v} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{v}}{ds} = 0$ .

Если в этом равенстве заменить  $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$  и  $\frac{d\vec{v}}{ds}$  по формулам (4) и (5), то получим  $\alpha = -k$ . Формула (5) принимает вид:

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}. \quad (6)$$

Тождество  $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{v}]$  дифференцируем по параметру  $s$ :

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \left[ \frac{d\vec{\tau}}{ds}, \vec{v} \right] + \left[ \vec{\tau}, \frac{d\vec{v}}{ds} \right].$$

Заменяя здесь векторы  $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$  и  $\frac{d\vec{v}}{ds}$  их выражениями по формулам

(4) и (6), находим:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{v}. \quad (7)$$

Число  $\kappa$  называется *кручением линии*  $\gamma$  в точке  $M$ . На всей линии  $\gamma$  переменная  $\kappa$  является функцией параметра  $s$ . Из формулы (7) следует, что  $|\kappa| = \left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right|$ . При этом  $\kappa > 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{v}$  и  $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$  противоположно направлены;  $\kappa < 0$  тогда и только тогда, когда эти векторы одинаково направлены. Так можно истолковать абсолютное значение кручения и его знак.

Мы нашли следующие *формулы Френе*:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \kappa\vec{v}, \\ \frac{d\vec{v}}{ds} &= -\kappa\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}, \\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} &= -\kappa\vec{v}. \end{aligned}$$

Вся теория гладких линий основана на применении этих формул.

Найдем формулу для вычисления кручения, если линия  $\gamma$  задана в естественной параметризации уравнением (1). Первую формулу Френе можно записать так:  $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \kappa\vec{\tau}$ . Дифференцируя это соотношение и используя вторую формулу Френе, получим:

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = -\kappa^2\vec{\tau} + \frac{d\kappa}{ds}\vec{v} + \kappa\kappa\vec{\beta}.$$

Таким образом,  $\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \vec{\tau}(\kappa\vec{v}) (-\kappa^2\vec{\tau} + \frac{d\kappa}{ds}\vec{v} + \kappa\kappa\vec{\beta}) = \kappa^2\kappa$ .

Отсюда получаем искомую формулу:

$$\kappa = \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right). \quad (8)$$

4. Линия  $\gamma$  называется *плоской*, если все ее точки лежат в некоторой плоскости  $\sigma$ . Выберем систему координат  $O \vec{i} \vec{j} \vec{k}$  так, чтобы плоскость  $O \vec{i} \vec{j}$  совпала с плоскостью  $\sigma$ . Тогда уравнение (1) можно записать так:  $\vec{r} = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ . Продифференцировав это соотношение трижды по  $s$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j}, \\ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} &= \frac{d^2x}{ds^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\vec{j}, \\ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} &= \frac{d^3x}{ds^3}\vec{i} + \frac{d^3y}{ds^3}\vec{j}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из первых двух равенств следует, что векторы  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\nu}$  параллельны плоскости  $\sigma$ . Отсюда вытекают утверждения.

1<sup>0</sup>. *Соприкасающаяся плоскость плоской линии совпадает с плоскостью линии.*

2<sup>0</sup>. *Главная нормаль плоской линии лежит в плоскости линии.* Главная нормаль плоской линии называется просто нормалью. Из формул (9), учитывая равенство (8), получаем утверждение.

3<sup>0</sup>. *Кручение плоской линии во всех точках равно нулю.* Докажем обратное утверждение.

**Т е о р е м а 2.** *Если во всех точках гладкой линии кручение равно нулю, то линия плоская.*

□ Пусть в каждой точке линии  $\gamma$ , заданной уравнениями (1'), ее кручение равно нулю. Из последней формулы Френе следует, что  $\vec{\beta} = \vec{b}$ , где единичный вектор  $\vec{b}$  не зависит от переменной  $s$ . Тогда из тождества  $\vec{b} \cdot \vec{\tau} = 0$  следует, что  $\frac{d(\vec{b} \cdot \vec{r})}{ds} = 0$ , откуда  $\vec{b} \vec{r} = c =$   
 $= \text{const}$  или в координатах:  $x(s)b_1 + y(s)b_2 + z(s)b_3 = c$ , где  $b_1, b_2, b_3$  — координаты вектора  $\vec{b}$ . Таким образом, все точки линии  $\gamma$  лежат в плоскости, заданной уравнением  $xb_1 + yb_2 + zb_3 - c = 0$ . Это и означает, что  $\gamma$  — плоская линия. ■

**З а м е ч а н и е.** Для плоской линии имеем  $\kappa = 0$ , поэтому формулы Френе принимают вид:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau}.$$

**5.** Воспользуемся теоремой 2 для решения следующей задачи:

**З а д а ч а.** Доказать, что гладкая линия в пространстве является окружностью или частью окружности тогда и только тогда, когда все ее главные нормали проходят через одну и ту же точку.

**Р е ш е н и е.** Пусть все главные нормали гладкой линии  $\gamma$  проходят через точку  $O$ . Зададим эту линию в естественной параметризации уравнением (1), где за начало выбрана точка  $O$ . Тогда для любой точки  $M \in \gamma$  векторы  $\vec{OM} = \vec{r}$  и  $\vec{\nu}$  коллинеарны, и, значит,

$$\vec{r} = \lambda \vec{\nu}. \quad (10)$$

Дифференцируя это тождество по длине дуги и пользуясь формулами Френе, находим:  $\vec{\tau} = \frac{d\lambda}{ds} \vec{\nu} + \lambda(-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta})$ , или  $(1 + \lambda k)\vec{\tau} - \frac{d\lambda}{ds} \vec{\nu} - \lambda \kappa \vec{\beta} = \vec{0}$ . Так как векторы  $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$  линейно независимы, то из последнего равенства следует:

$$1 + \lambda k = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0, \quad (12)$$

$$\lambda \kappa = 0. \quad (13)$$

Из формулы (11) мы заключаем, что  $\lambda \neq 0$ , поэтому согласно формуле (13) во всех точках линии  $\gamma$  будем иметь  $\kappa = 0$ . По теореме 2 линия  $\gamma$  плоская. Из равенства (12) следует, что  $\lambda = \text{const}$ , поэтому линия  $\gamma$  согласно формуле (11) имеет постоянную кривизну, отличную от нуля. Из равенства (10) находим  $\vec{r}^2 = \lambda^2 = \text{const}$ . Таким образом, линия  $\gamma$  плоская и обладает тем свойством, что ее точки равноудалены от точки  $O$ :  $\sqrt{\vec{r}^2} = |\vec{OM}| = OM = \text{const}$ . Следовательно,  $\gamma$  — окружность или часть окружности.

Обратное утверждение очевидно, так как если  $\gamma$  — окружность с центром  $O$  или часть этой окружности, то в каждой точке  $M$  этой окружности касательный вектор  $\vec{\tau}$  перпендикулярен к прямой  $MO$ , поэтому по свойству 2<sup>0</sup> прямая  $OM$  является главной нормалью. Таким образом, все главные нормали окружности проходят через точку  $O$ .

### § 53. Вычисление кривизны и кручения в произвольной параметризации. Винтовая линия

1. Пусть линия  $\gamma$  задана уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (1)$$

где  $t$  — произвольный параметр, меняющийся в промежутке  $I$ . Возникает вопрос: как найти канонический репер  $R_M$ , кривизну и кручение линии  $\gamma$  в произвольной точке  $M$ ? Введем на линии  $\gamma$  естественную параметризацию  $s$  и допустим, что функция  $s = h(t)$  определяет замену параметра.

Если  $\vec{r} = \vec{R}(s)$  — уравнение линии  $\gamma$  в естественной параметризации, то  $\vec{r} = \vec{R}(h(t))$  — то же уравнение, что и уравнение (1), поэтому

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \cdot |\dot{r}|, \quad (2)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = k \vec{\nu} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau} \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (3)$$

Мы замечаем, что вектор  $\ddot{\vec{r}}$  параллелен соприкасающейся плоскости. (По-прежнему предполагается, что  $k \neq 0$  в любой точке  $M \in \gamma$ .) Имеем:

$$[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] = k \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 [\vec{\tau}, \vec{\nu}] = k |\dot{r}|^3 \vec{\beta}. \quad (4)$$

Таким образом, мы пришли к формулам

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{r}|}, \quad \vec{\beta} = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}}| |\ddot{\vec{r}}|}, \quad \vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}], \quad (5)$$

$$k = \frac{|\dot{r}, \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}. \quad (6)$$

Осталось получить формулу для вычисления кручения  $\kappa$ . С этой целью найдем разложение вектора  $\ddot{r}$  по координатным векторам репера  $R_M$ , используя формулу (3) и формулы Френе. Нам будет интересно коэффициент при векторе  $\vec{\beta}$ :

$$\ddot{r} = \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3} = p\vec{\tau} + q\vec{\nu} + k \frac{dv}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 = p'\vec{\tau} + q'\vec{\nu} + \kappa k |\dot{r}|^3 \vec{\beta}.$$

Учитывая формулу (4), находим:

$$\ddot{r} = p'\vec{\tau} + q'\vec{\nu} + \kappa |\dot{r}, \ddot{r}|,$$

и потому  $(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{r}) = [\dot{r}, \ddot{r}] \cdot \ddot{r} = \kappa |\dot{r}, \ddot{r}|^2$ . Здесь мы учли, что вектор  $[\dot{r}, \ddot{r}]$  ортогонален векторам  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\nu}$ . Таким образом, мы получили формулу вычисления кручения  $\kappa$  линии  $\gamma$  класса  $C^k$  ( $k \geq 3$ ), заданной уравнением (1):

$$\kappa = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{r})}{|\dot{r}, \ddot{r}|^2}. \quad (7)$$

2. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат  $Oi \vec{j} \vec{k}$ . Пусть точка  $M(x, y, z)$  совершает сложное движение в пространстве: а) равномерно вращается около оси  $Oz$ ; б) равномерно перемещается параллельно оси  $Oz$  (рис. 191).

Найдем закон движения точки  $M$ . Пусть в момент времени  $t$  она занимает положение  $M(x, y, z)$ . Точка  $P$  — ортогональная проекция точки  $M$  на плоскость  $Oxy$  — имеет координаты  $P(x, y, 0)$ . Когда точка  $M$  равномерно вращается вокруг оси  $Oz$ , точка  $P$  равномерно вращается в плоскости  $Oxy$  вокруг точки  $O$ . Будем считать, что в начале движения точка  $M$  совпадает с точкой  $A(a, 0, 0)$  оси  $Ox$  ( $a > 0$ ). Так как вращение точки  $P$  (как и точки  $M$ ) равномерное, то угол

$\angle AOP$  поворота этой точки пропорционален времени  $t$  движения. Для простоты мы будем считать коэффициент пропорциональности равным единице, и, значит,  $\angle AOP = t$ . Тогда легко находим:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t.$$

Так как точка  $M$  равномерно перемещается вдоль оси  $Oz$ , то ее смещение  $z$  вдоль этой оси пропорционально времени движения:

$$z = bt, \quad b = \text{const.}$$

Итак, точка  $M$  движется по следующему закону:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad (8)$$

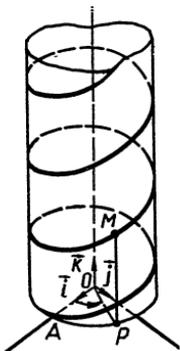


Рис. 191

где  $a = \text{const} > 0$ ,  $b = \text{const} \neq 0$  и  $t$  изменяется в некотором промежутке  $I$ .

Уравнения (8) определяют в  $E_3$  элементарную линию. Она называется *обыкновенной винтовой линией*. Как показывают уравнения (8), винтовая линия — гладкая линия класса  $C^\infty$ .

Из первых двух уравнений (8) находим:

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (9)$$

Следовательно, *винтовая линия лежит на прямом круговом цилиндре с осью  $Oz$* .

3. Уравнения (8) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\vec{r} = \vec{i}a \cos t + \vec{j}a \sin t + \vec{k}bt. \quad (10)$$

Используя далее первую из формул (5), находим:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-\vec{i}a \sin t + \vec{j}a \cos t + \vec{k}b). \quad (11)$$

Через точку  $M$  винтовой линии проходит прямолинейная образующая  $MP$  цилиндра (9), имеющая направляющий вектор  $\vec{k}$ . Обозначим через  $\varphi$  угол между векторами  $\vec{\tau}$  и  $\vec{k}$ . Так как эти векторы единичные, то  $\cos \varphi = \vec{\tau} \cdot \vec{k}$ , и, учитывая формулу (11), находим:

$$\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если две гладкие линии пересекаются в точке  $M_0$ , то *углом между этими линиями называется угол между их касательными в точке  $M_0$* . Из полученной формулы следует, что *винтовая линия пересекает все образующие цилиндра под постоянным углом*.

В случае винтовой линии, используя формулу (7) § 51, получаем:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Теперь вектор  $\vec{v}$  найти нетрудно. Имеем:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} : \frac{ds}{dt} = -\frac{a}{a^2 + b^2} (\vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t). \quad (12)$$

Но по формуле Френе  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{v}$ , где  $\vec{v}$  — единичный вектор и  $k \geq 0$ . Поэтому из формулы (12) следует:

$$\vec{v} = -\vec{i} \cos t - \vec{j} \sin t, \quad k = \frac{a}{a^2 + b^2} = \text{const}.$$

Так как  $\vec{OP} = \vec{i}a \cos t + \vec{j}a \sin t$ , где  $P$  — проекция точки  $M$  на плоскость  $Oxy$ , то  $\vec{OP} = -a\vec{v}$ . Отсюда мы заключаем, что *главной нормалью винтовой линии в точке  $M$  служит перпендикуляр к оси*

цилиндра, проведенный через точку  $M$ . Вектор  $\vec{v}$  направлен противоположно вектору  $\vec{OP}$ .

Пользуясь формулой (7), находим:

$$\kappa = \frac{b}{a^2 + b^2} = \text{const.}$$

Таким образом, кривизна и кручение обыкновенной винтовой линии постоянны. При этом знак кручения совпадает со знаком числа  $b$ .

**З а м е ч а н и е.** Винтовая линия является частным случаем достаточно широкого класса линий, называемых кривыми *Бертрана*<sup>1</sup>. Гладкая линия  $\gamma$  называется *кривой Бертрана*, если для нее существует другая гладкая линия  $\gamma_1$  и такое отображение  $f: \gamma \rightarrow \gamma_1$ , что в каждой паре соответствующих точек линии  $\gamma$  и  $\gamma_1$  имеют общую главную нормаль.

Если  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  — уравнение линии  $\gamma$ , то уравнение линии  $\gamma_1$  можно записать в виде:  $\vec{r}_1 = \vec{r} + a\vec{v}$ . Дифференцируя это тождество по длине  $s$  линии  $\gamma$  и используя формулы Френе, получаем:  $\frac{d\vec{r}_1}{ds} = (1 - ak)\vec{\tau} + \frac{da}{ds}\vec{v} + a\kappa\vec{\beta}$ . Векторы  $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$  и  $\vec{v}$  перпендикулярны, и поэтому вектор  $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$  компланарен с векторами  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\beta}$ . Следовательно,  $\frac{da}{ds} = 0$  и  $a = \text{const}$ , т. е. *расстояние между соответствующими точками пары кривых Бертрана постоянно*. Нетрудно доказать, что угол  $\alpha$  между касательными векторами  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\tau}_1$  в соответствующих точках этих линий также постоянен.

Так как векторы  $\frac{d\vec{r}_1}{ds}$  и  $\vec{\tau}_1$  коллинеарны и  $\vec{\tau}_1 = \cos \alpha \vec{\tau} + \sin \alpha \vec{\beta}$ , то  $\frac{1 - ak}{\cos \alpha} = \frac{a\kappa}{\sin \alpha}$  или  $ak + b\kappa = 1$ , где  $b = a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ . Таким образом, кривизна и кручение кривой Бертрана находятся в линейной зависимости. Имеет место также и обратное утверждение.

Для винтовой линии ( $k = \text{const}$ ,  $\kappa = \text{const}$ ) существует бесконечное множество чисел  $a$  и  $b$ , удовлетворяющих равенству  $ak + b\kappa = 1$ , поэтому винтовая линия является кривой Бертрана, причем для данной винтовой линии существует бесчисленное множество винтовых линий, образующих вместе с данной пару кривых Бертрана.

<sup>1</sup> Бертран Ж. Л. Ф. (1822—1900) — французский математик. Почетный член Петербургской АН.

## § 54. Понятие поверхности

1. Введем понятие векторной функции двух скалярных аргументов, необходимое для изучения поверхностей.

Пусть  $V$  — трехмерное векторное пространство над полем вещественных чисел  $\mathbf{R}$ , а  $G$  — *двумерный промежуток*, т. е. одно из следующих трех множеств: пространство  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , замкнутое числовое полупространство  $\mathbf{R}_+^2$ , состоящее из всех точек  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ , для которых  $v \geq 0$ , или числовой квадрат, состоящий из всех точек  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ , где  $0 \leq u \leq a$ ,  $0 \leq v \leq a$ ,  $a > 0$ . Если по некоторому закону каждой точке  $(u, v) \in G$  поставлен в соответствие определенный вектор  $\vec{r}(u, v)$  из пространства  $V$ , то говорят, что в двумерном промежутке  $G$  задана *векторная функция  $\vec{r}(u, v)$  двух скалярных аргументов  $u$  и  $v$* .

Мы скажем, что векторная функция  $\vec{r}(u, v)$  *бесконечно мала* вблизи точки  $(u_0, v_0) \in G$ , если числовая функция  $|\vec{r}(u, v)|$  бесконечно мала вблизи этой точки, т. е. если<sup>1</sup>  $\lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} |\vec{r}(u, v)| = 0$ .

*Пределом* векторной функции  $\vec{r}(u, v)$  при  $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$  называется такой постоянный вектор  $\vec{a}$ , что  $\vec{r}(u, v) - \vec{a}$  есть бесконечно малый вектор вблизи точки  $(u_0, v_0)$ . В этом случае пишут:  $\lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a}$ .

Векторная функция  $\vec{r}(u, v)$  называется *непрерывной* в точке  $(u_0, v_0) \in G$ , если  $\lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{r}(u_0, v_0)$ . Функция  $\vec{r}(u, v)$ , непрерывная в каждой точке промежутка  $G$ , называется *непрерывной в этом промежутке*.

Рассмотрим векторную функцию  $\vec{r}(u, v)$ , заданную в промежутке  $G$ . Возьмем какой-нибудь ортонормированный базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  векторного пространства  $V$  и в каждой точке  $(u, v) \in G$  разложим век-

<sup>1</sup> Вместо записи  $u \rightarrow u_0, v \rightarrow v_0$  мы употребляем запись:  $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$ .

тор  $\vec{r}(u, v)$  по векторам этого базиса:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}. \quad (1)$$

Когда точка  $(u, v)$  пробегает промежуток  $G$ , то коэффициенты  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  в правой части равенства (1) в общем случае меняются, т. е. они являются функциями аргументов  $u, v$ , определенными в промежутке  $G$ . Эти функции называются *координатами векторной функции*  $\vec{r}(u, v)$  в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

$$\text{Пусть } \lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} \vec{r}(u, v) = \vec{a} \text{ и } \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Тогда при  $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$  имеем:

$$\lim x(u, v) = a_1, \lim y(u, v) = a_2, \lim z(u, v) = a_3.$$

Если положить  $v = v_0 = \text{const}$ , то для различных  $u$ , таких, чтобы точка  $(u, v_0)$  оставалась в промежутке  $G$ , функция  $\vec{r}(u, v)$  станет функцией одной скалярной переменной:  $\vec{r}(u, v_0)$ . Она определена в некотором промежутке, соответствующем изменению точки  $(u, v)$  при  $v = v_0$ . Если в некоторой точке  $u$  этого промежутка векторная функция  $\vec{r}(u, v_0)$  от переменной  $u$  имеет производную  $\frac{d\vec{r}(u, v_0)}{du}$ , то она называется *частной производной* векторной функции  $\vec{r}(u, v)$  по переменной  $u$  в точке  $(u, v_0)$  и обозначается через  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$  или  $\vec{r}_u$ .

Аналогично определяется частная производная  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v$ .

Из формулы (1) следует, что координатами векторной функции  $\vec{r}(u, v_0)$  являются функции  $x(u, v_0)$ ,  $y(u, v_0)$ ,  $z(u, v_0)$ , поэтому из теоремы § 48 мы заключаем, что частные производные  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  существуют в точке  $(u, v) \in G$  тогда и только тогда, когда существуют в этой точке соответственно частные производные

$$x_u = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \quad y_u = \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \quad z_u = \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}$$

и

$$x_v = \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, \quad y_v = \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, \quad z_v = \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}.$$

Из этой же теоремы следует, что

$$\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k} \text{ и } \vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}. \quad (2)$$

Таким образом, отыскание частных производных векторной функции  $\vec{r}(u, v)$  сводится к отысканию частных производных координат этой функции. Если в равенстве (1) функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  дифференцируем в точке  $(u, v) \in G$ , то вектор

$$d\vec{r} = dx(u, v)\vec{i} + dy(u, v)\vec{j} + dz(u, v)\vec{k} \quad (3)$$

называется *дифференциалом* векторной функции  $\vec{r}(u, v)$  в точке  $(u, v)$ .

Учитывая формулы (2), можно записать, что

$$\vec{dr} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv. \quad (3')$$

Векторная функция  $\vec{r}(u, v)$  называется *дифференцируемой в точке*  $(u, v)$ , если функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  дифференцируемы в этой точке, т. е. существует дифференциал  $\vec{dr}$ . Функция  $\vec{r}(u, v)$  называется *дифференцируемой в промежутке*  $G$ , если она дифференцируема в каждой точке этого промежутка.

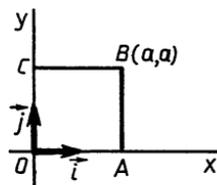


Рис. 192

2. Первоначальное представление о поверхности мы получаем, рассматривая поверхности твердых тел, наблюдая часть земной суши или мгновенное состояние поверхности моря и т. п. Понятие поверхности в математике является абстракцией наших первоначальных представлений. Его можно ввести по аналогии с тем, как было введено понятие линии в предыдущей главе.

На евклидовой плоскости  $E_2$  зададим прямоугольную систему координат  $O\vec{i}\vec{j}$  (рис. 192). Тогда устанавливается биективное отображение  $E_2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  по закону: точке  $M(x, y) \in E_2$  ставится в соответствие точка  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Нетрудно заметить, что это отображение является гомеоморфизмом. Учитывая существование этого гомеоморфизма, мы отождествим числовое пространство  $\mathbf{R}^2$  с плоскостью  $E_2$ , числовое полупространство  $\mathbf{R}_+^2$  с замкнутой полуплоскостью плоскости  $Oxy$  при  $y \geq 0$ , числовой квадрат с квадратом  $OABC$ , где точка  $B$  имеет координаты  $B(a, a)$  (рис. 192).

Будем называть *простейшей поверхностью* в пространстве  $E_3$  любую из следующих фигур: плоскость, замкнутую полуплоскость, квадрат.

*Элементарной поверхностью* называется фигура, гомеоморфная какой-либо из простейших поверхностей. Так, эллиптический и гиперболический параболоиды, параболический цилиндр — элементарные поверхности (каждая из них гомеоморфна плоскости). Полу-сфера вместе с границей также является примером элементарной поверхности (гомеоморфной кругу).

Можно сказать, что *фигура*  $F \subset E_3$  называется *элементарной поверхностью*, если она гомеоморфна некоторому двумерному числовому промежутку  $G \subset \mathbf{R}^2$ .

*Поверхностью* называется такая фигура в пространстве  $E_3$ , которую можно покрыть конечным или счетным множеством элементарных поверхностей. Из этого определения следует, что для точки  $M$  поверхности  $E$  существует элементарная поверхность  $F_0$ , такая, что  $M \in F_0 \subset F$ .

Примерами поверхностей, не являющихся элементарными, являются: а) сфера (ее можно покрыть двумя полусферами); эллипсоид (он гомеоморфен сфере); б) эллиптический цилиндр (его можно покрыть конечным числом «цилиндрических полос», каждая из которых гомеоморфна плоскости), однополостный гиперболоид (он гомеоморфен эллиптическому цилиндру); в) двуполостный гипер-

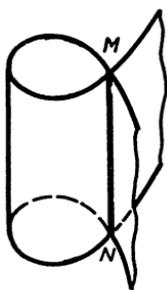


Рис. 193

болоид (он покрывается двумя своими полостями, каждая из которых гомеоморфна плоскости); г) гиперболический цилиндр.

3. Точка  $M$  поверхности  $F$  называется *обыкновенной*, если у этой точки как точки пространства существует  $\varepsilon$ -окрестность  $B(M, \varepsilon)$ , такая, что пересечение  $F \cap B(M, \varepsilon)$  является элементарной поверхностью. При этом если это пересечение гомеоморфно плоскости, то такая точка называется *внутренней*, а если оно гомеоморфно замкнутой полуплоскости — *граничной*.

Точка  $M \in F$  называется *особой* (точнее, топологически особой), если она не является обыкновенной. Изображенная на рисунке 193 цилиндрическая поверхность сама себя пересекает по прямой  $MN$ . Каждая точка этой прямой является особой точкой поверхности.

Поверхность, все точки которой обыкновенные, называется *простой*. Множество всех граничных точек простой поверхности называется ее *границей* или *краем*. Всякая элементарная поверхность является простой. Простыми поверхностями являются также сфера, эллипсоид, эллиптический цилиндр, гиперболоиды. Коническая поверхность не является простой, так как ее вершина — особая точка.

Любая поверхность, гомеоморфная квадрату, является поверхностью с краем, и ее край гомеоморфен окружности. Любая поверхность, гомеоморфная замкнутой полуплоскости, также является поверхностью с краем, но ее край гомеоморфен прямой линии.

Заметим, что всякая простая поверхность является двумерным многообразием (или двумерным многообразием с краем).

4. Мы будем изучать простую поверхность  $F$  в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности  $B(M, \varepsilon)$  ее внутренней точки  $M$ . Из п. 3 следует, что мы можем выбрать  $\varepsilon$  настолько малым, чтобы пересечение  $F \cap B(M, \varepsilon)$  было гомеоморфно плоскости (или открытому кругу). В дальнейшем мы будем обозначать через  $G$  плоскую область, гомеоморфную плоскости (т. е. гомеоморфную числовому пространству  $\mathbf{R}^2$ ), а через  $F_0$  элементарную поверхность  $F \cap B(M, \varepsilon)$ , гомеоморфную области  $G$ .

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат  $\vec{O}i\vec{j}\vec{k}$  и рассмотрим тот гомеоморфизм  $f: G \rightarrow F_0$ , который переводит область  $G$  в элементарную поверхность  $F_0$ . Если точка  $(u, v) \in G$  переходит в точку  $M(x, y, z) \in F_0$ , то ясно, что  $x, y, z$  являются функциями (и притом непрерывными) от переменных  $u, v$ :

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (4)$$

определенными в области  $G$ . Уравнения (4) называются *параметрическими уравнениями* поверхности  $F_0$ . Эти уравнения равносильны одному векторному уравнению

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (5)$$

где  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{OM}$  — радиус-вектор точки  $M$ , описывающей

поверхность. Обозначая правую часть уравнения (5) через  $\vec{r}(u, v)$ , мы запишем это уравнение в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (6)$$

Здесь  $\vec{r}(u, v)$  — векторная функция двух скалярных аргументов  $u$  и  $v$ , определенная в области  $G$ .

## § 55. Гладкие поверхности

1. Пусть  $F_0$  — элементарная поверхность, заданная параметрическими уравнениями:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (1)$$

где функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  определены в области  $G$ . Поверхность  $F_0$  называется *гладкой класса  $C^k$*  ( $k$  — натуральное число), если правые части уравнений (1) являются функциями, имеющими в области  $G$  непрерывные частные производные до порядка  $k$  включительно, причем в каждой точке  $(u, v) \in G$

$$\text{ранг} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2. \quad (2)$$

Простая поверхность  $F$  называется *гладкой класса  $C^k$* , если у каждой ее внутренней точки  $M$  существует  $\varepsilon$ -окрестность  $B(M, \varepsilon)$ , такая, что пересечение  $F \cap B(M, \varepsilon)$  — гладкая (элементарная) поверхность класса  $C^k$ .

В п. 4 § 54 было отмечено, что уравнения (1) равносильны векторному уравнению  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Из уравнения (5) § 54 находим:

$$\vec{r}_u = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}, \quad \vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}.$$

Таким образом, условие (2) геометрически означает, что векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  линейно независимы в области  $G$ , и, значит, вектор  $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$  отличен от нулевого вектора в любой точке  $(u, v) \in G$ .

2. Если в уравнениях (1) положить  $v = v_0 = \text{const}$  и менять только  $u$ , но так, что  $(u, v_0) \in G$ , то мы получим векторную функцию одного скалярного аргумента  $u: \vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ , и, значит, точка  $M$ , такая, что  $\vec{OM} = \vec{r}$ , опишет некоторую гладкую линию, лежащую на поверхности  $F_0$ . Эту линию называют *линией  $u$* . Вектор  $\vec{r}_u$  является вектором касательной к линии  $u$  в точке  $(u, v_0)$ . Аналогично через каждую точку  $M \in F_0$  проходит гладкая линия  $v = \text{const}$  или линия  $v$ . Вектор  $\vec{r}_v$  является вектором касательной к этой линии. Если известна точка  $(u, v) \in G$ , то по формулам (1) определяется и точка  $M(x, y, z) \in F_0$ . Следовательно, параметры  $u$  и  $v$  вполне определяют точку  $M$  на поверхности. Учитывая это, параметры  $u, v$  называют *криволинейными координатами точки  $M$  на поверхности  $F_0$* .

Таким образом, параметризация поверхности  $F_0$  при помощи уравнений (1) (т. е. гомеоморфизм  $f: G \rightarrow F_0$ ) всегда приводит к оп-

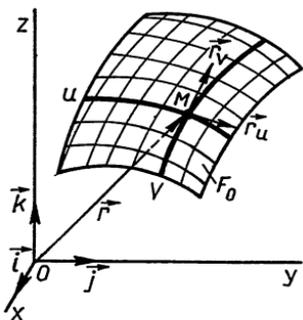


Рис. 194



Рис. 195

ределенной системе криволинейных координат  $u, v$  на этой поверхности. Причем семейство линий  $u$ , как и семейство линий  $v$ , покрывает поверхность  $F_0$  так, что через каждую точку  $M \in F_0$  проходят в точности одна линия  $u$  и одна линия  $v$  по различным направлениям (касательные векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  к этим линиям в точке  $M$  не коллинеарны). Говорят, что линии  $u$  и  $v$  образуют на поверхности координатную сеть (рис. 194).

**Пример 1.** Рассмотрим поверхность, заданную в прямоугольной системе координат  $Oi\vec{j}\vec{k}$  параметрическими уравнениями

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = bv, \quad \text{где } b > 0; \\ (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

Для этой поверхности матрица

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \text{ имеет вид } \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & b \end{pmatrix},$$

поэтому в каждой точке  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$  условие (2) выполнено. Рассматриваемая поверхность является гладкой поверхностью класса  $C^\infty$ . Она называется

*прямым геликоидом* (рис. 195). Линии  $u$  в системе  $Oi\vec{j}\vec{k}$  при  $v \neq \frac{\pi}{2}$  имеют уравнения  $y = x \operatorname{tg} v, z = bv$ , поэтому являются прямыми, параллельными плоскости  $Oxy$  и пересекающими ось  $Oz$ . Линии  $v$  при  $u \neq 0$  — винтовые линии, а при  $u = 0$  — ось  $Oz$ . Координатная сеть ортогональная, так как в любой точке  $(u, v)$  имеет  $x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0$ .

Можно показать, что прямой геликоид образован прямой, перпендикулярной к оси  $Oz$  и пересекающей ее, когда она совершает в пространстве сложное движение: а) равномерно вращается около оси  $Oz$ ; б) равномерно перемещается вдоль оси  $Oz$ , оставаясь параллельной плоскости  $Oxy$ .

**3.** Для поверхности (как и для линии) можно менять параметризацию по определенному правилу. Пусть гладкая поверхность  $F_0$  класса  $C^k$  задана параметрическими уравнениями (1), которые получились в результате гомеоморфизма  $f: G \rightarrow F_0$ . Рассмотрим гомеоморфизм  $h: G \rightarrow G'$ , который переводит область  $G$  в область  $G'$  так, что точка  $(u, v) \in G$  переходит в точку  $(\alpha, \beta) \in G'$ . Тогда  $\alpha$  и  $\beta$  должны быть непрерывными функциями переменных  $u$  и  $v$ :

$$\alpha = \alpha(u, v), \quad \beta = \beta(u, v), \quad (3)$$

определенными в области  $G$ .

Так как  $h$  — гомеоморфизм, то уравнения (3) однозначно разрешимы относительно переменных  $u$  и  $v$ :

$$u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta), \quad (4)$$

причем правые части равенств (4) — непрерывные функции в промежутке  $G'$ . Заменяя в уравнениях (1) переменные  $u$  и  $v$  их выражениями по формулам (4), получаем:

$$x = f_1(\alpha, \beta), \quad y = f_2(\alpha, \beta), \quad z = f_3(\alpha, \beta), \quad (5)$$

где  $f_1(\alpha, \beta) = x(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta))$  и аналогичные выражения для  $f_2$  и  $f_3$  являются сложными функциями переменных  $\alpha, \beta$ , определенными в области  $G'$ .

Обозначим отображение  $G' \rightarrow F_0$  по закону (5) через  $g$ . Как показывает сравнение формул (1) и (5),  $f = g \circ h$  и  $g = f \circ h^{-1}$ . Значит,  $g$  — гомеоморфизм. Он переводит область  $G'$  в поверхность  $F_0$ .

Говорят, что функции  $\alpha(u, v), \beta(u, v)$  в уравнениях (3) определяют замену параметризации  $(u, v)$  на параметризацию  $(\alpha, \beta)$ . Формулы (5) задают поверхность  $F_0$  в новой параметризации.

Так как в новой параметризации должны быть выполнены условия того, что  $F_0$  — гладкая поверхность класса  $C^k$  (см. п. 1), то на функции  $\alpha(u, v)$  и  $\beta(u, v)$ , определяющие замену параметризации, должны быть наложены определенные ограничения. Прежде всего следует потребовать, чтобы в области  $G$  эти функции имели непрерывные частные производные до порядка  $k$  включительно. Нам надо еще потребовать, чтобы условие (2) не зависело от выбора параметризации, т. е. чтобы в новой параметризации в каждой точке  $(\alpha, \beta) \in G'$  выполнялось равенство

$$\text{ранг} \begin{pmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta \end{pmatrix} = 2. \quad (6)$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы в области  $G$  выполнялось неравенство

$$I(h) = \begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7)$$

В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции находим:

$$\begin{aligned} x_u &= x_\alpha \alpha_u + x_\beta \beta_u, & y_u &= y_\alpha \alpha_u + y_\beta \beta_u, & z_u &= z_\alpha \alpha_u + z_\beta \beta_u, \\ x_v &= x_\alpha \alpha_v + x_\beta \beta_v, & y_v &= y_\alpha \alpha_v + y_\beta \beta_v, & z_v &= z_\alpha \alpha_v + z_\beta \beta_v. \end{aligned}$$

Отсюда следуют матричные равенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_u x_v \\ y_u y_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_\alpha x_\beta \\ y_\alpha y_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_u \alpha_v \\ \beta_u \beta_v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_u x_v \\ z_u z_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_\alpha x_\beta \\ z_\alpha z_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_u \alpha_v \\ \beta_u \beta_v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} y_u y_v \\ z_u z_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_\alpha y_\beta \\ z_\alpha z_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_u \alpha_v \\ \beta_u \beta_v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если условие (2) выполняется, то, как показывают формулы (8), условие (6) будет выполняться тогда и только тогда, когда в области  $G$  справедливо неравенство (7).

Определитель  $I(h)$  называется *якобианом* отображения  $h: G \rightarrow G'$ . Как известно из математического анализа, при условии (7) из урав-

нений (3) мы получим уравнения (4) с требуемым условием непрерывности правых частей.

Таким образом, *если гладкая поверхность  $F_0$  класса  $C^k$  задана уравнениями (1) в области  $G$ , то будем считать допустимой только такую замену параметризации  $h: G \rightarrow G'$ , которая является гомеоморфизмом и выражается формулами (3), где правые части имеют в области  $G$  непрерывные частные производные до порядка  $k$  включительно, и в этой области якобиан отображения  $h$  отличен от нуля:  $I(h) \neq 0$ .*

При замене параметризации поверхности по формулам (3) происходит замена координатной сети из линий  $u$  и  $v$  на поверхности на новую координатную сеть из линий  $\alpha$  и  $\beta$ .

4. Выясним условия, при которых уравнение

$$z = f(x, y), \text{ где } (x, y) \in G, \quad (9)$$

определяет в пространстве гладкую поверхность. Уравнение (9) равносильно параметрическим уравнениям

$$x = u, y = v, z = f(u, v). \quad (9')$$

По определению (см. п. 1) этими уравнениями задается гладкая поверхность класса  $C^k$  тогда и только тогда, когда  $f(u, v)$  является функцией, имеющей в области  $G$  непрерывные частные производные до  $k$ -го порядка включительно (для уравнений (9') условие (2) с очевидностью выполняется). Таким образом, *если функция  $f(x, y)$  в области  $G$  имеет непрерывные частные производные до  $k$ -го порядка включительно, то уравнение (9) определяет в пространстве гладкую поверхность класса  $C^k$ .*

**Пример 2.** Эллиптический параболоид, заданный уравнением  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ , является гладкой поверхностью класса  $C^\infty$ . В самом

деле, это уравнение имеет вид (9), причем функция  $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  в  $\mathbf{R}^2$  имеет непрерывные частные производные любого порядка.

Рассмотрим теперь множество  $\Omega$  точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0. \quad (10)$$

Возникает вопрос, в каком случае уравнение (10) определяет гладкую поверхность? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема о неявных функциях, доказательство которой содержится в руководствах по математическому анализу. Пусть в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  выполняются два условия: а) в некоторой окрестности  $V_0$  этой точки функция  $F(x, y, z)$  и ее частные производные  $F_x, F_y, F_z$  непрерывны; б) в самой точке  $M_0$  ранг  $\|F_x, F_y, F_z\| = 1$ .

Тогда существует окрестность  $V_0^* \subset V_0$  точки  $M_0$  такая, что пересечение  $\Omega \cap V_0^*$  есть гладкая элементарная поверхность некоторого класса  $C^k (k \geq 1)$ .

**Пример 3.** Рассмотрим сферу, заданную уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ , где  $a > 0$  — радиус сферы. Очевидно, в окре-

стности любой точки  $(x_0, y_0, z_0)$  этой сферы условия а) и б) выполнены, поэтому сфера — гладкая поверхность. Нетрудно видеть, что сфера — гладкая поверхность класса  $C^\infty$ . Аналогично можно убедиться в том, что эллипсоид и гиперboloиды также являются гладкими поверхностями.

## § 56. Касательная плоскость и нормаль

1. Пусть гладкая поверхность  $F$  класса  $C^k$  задана в области  $G \subset \mathbf{R}^2$  векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (1)$$

Положим:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad (2)$$

где  $t$  пробегает некоторый промежуток  $I \subset \mathbf{R}$ , такой, что  $(u(t), v(t)) \in G$  при любом  $t \in I$ .

Мы потребуем, чтобы в промежутке  $I$  функции  $u(t)$  и  $v(t)$  имели непрерывные производные до порядка  $k$  включительно и производные  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{dv}{dt}$  не обращались в нуль одновременно ни в одной точке из  $I$ .

Подставив выражения переменных  $u$  и  $v$  по формулам (2) в уравнение (1), получим:

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)). \quad (3)$$

Правая часть уравнения (3) есть векторная функция одного скалярного аргумента  $t$ , которую обозначим через  $\vec{r}^*(t)$ , и уравнение (3) запишем в виде

$$\vec{r} = \vec{r}^*(t). \quad (3')$$

Это уравнение определяет линию класса  $C^k$  (см. § 50), лежащую на поверхности  $F$ .

Обратно: любая гладкая линия класса  $C^k$ , лежащая на поверхности  $F$ , может быть определена уравнениями (2). Здесь функции  $u(t)$  и  $v(t)$ , заданные в некотором промежутке  $I$ , таком, что  $(u(t), v(t)) \in G$ , имеют непрерывные производные до порядка  $k$  включительно и  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{dv}{dt}$  не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке из  $I$ .

2. Мы знаем, что в каждой точке  $M_0$  гладкой поверхности  $F$  класса  $C^k$ , заданной уравнением (1), векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  линейно независимы. Обозначим через  $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$  плоскость, проходящую через точку  $M_0$  и параллельную векторам  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$ .

**Теорема.** Пусть  $M_0(u_0, v_0)$  — точка гладкой поверхности  $F$  класса  $C^k$ , заданной уравнением (1). Тогда множество касательных в точке  $M_0$  ко всем гладким линиям, которые лежат на поверхности  $F$

и проходят через эту точку, образует пучок прямых<sup>1</sup> плоскости  $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$  с центром  $M_0$ .

□ Рассмотрим произвольную гладкую линию  $\gamma$ , лежащую на поверхности  $F$  и проходящую через точку  $M_0$ , и допустим, что она определена уравнениями (2). Обозначим через  $t_0$  параметр точки  $M_0$ :

$$u_0 = u(t_0), \quad v_0 = v(t_0).$$

Найдем вектор касательной к линии  $\gamma$  в точке  $M_0$ . Из уравнения (3) находим  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}$ , где частные производные  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  вычислены в точке  $(u_0, v_0)$ , а производные  $\frac{du}{dt}$  и  $\frac{dv}{dt}$  вычислены в точке  $t_0$ . Отсюда следует, что вектор  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  параллелен плоскости  $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ , поэтому касательная к линии  $\gamma$  в точке  $M_0$  лежит в этой плоскости.

Обратно: пусть  $(M_0, \vec{a})$ —произвольная прямая плоскости  $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ , проходящая через точку  $M_0$ . Тогда, очевидно,  $\vec{a} = \alpha \vec{r}_u + \beta \vec{r}_v$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  не равны нулю одновременно. Рассмотрим линию  $\gamma_1$ , лежащую на поверхности  $F$  и заданную уравнениями  $u = u_0 + \alpha t$ ,  $v = v_0 + \beta t$ , где  $t$  пробегает некоторый промежуток так, что  $(u, v) \in G$ .

Уравнение  $\vec{r} = \vec{r}(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t)$  определяет линию  $\gamma_1$  в пространстве. Найдем вектор касательной к линии  $\gamma_1$  в точке  $M_0$ :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}.$$

Так как  $\frac{du}{dt} = \alpha$ ,  $\frac{dv}{dt} = \beta$ , то  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}$ . Следовательно, касательная к линии  $\gamma_1$  в точке  $M_0$  совпадает с прямой  $(M_0, \vec{a})$ . ■

Плоскость, в которой лежат касательные ко всем линиям, лежащим на поверхности  $F$  и проходящим через точку  $M_0$ , называется *касательной плоскостью* к поверхности  $F$  в точке  $M_0$ . По доказанной теореме эта плоскость определяется точкой  $M_0$  и неколлинеарными векторами  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$ . Двумерное векторное направляющее подпространство этой плоскости называют *касательным векторным подпространством* к поверхности  $F$  в точке  $M_0$  и обозначают через  $T_{M_0}$ . Очевидно, векторы  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  образуют базис этого подпространства. При переходе к новой параметризации  $\alpha, \beta$  по формулам (3) § 55 векторы  $\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$ ,  $\vec{r}_\beta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}$  линейно независимы, и по доказанной теореме плоскость  $(M_0, \vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta)$  является касательной плоскостью к поверх-

<sup>1</sup> Напомним, что пучком прямых плоскости  $\sigma_0$  с центром  $M_0$  называется множество всех прямых этой плоскости, проходящих через точку  $M_0$ .

ности  $F$  в точке  $M_0$ . Поэтому векторы  $\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta$  образуют новый базис того же векторного подпространства  $T_{M_0}$ .

3. Нормалью к гладкой поверхности  $F$  в точке  $M_0 \in F$  называется прямая, проходящая через точку  $M_0$  перпендикулярно к касательной плоскости. Вектор  $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ , который перпендикулярен к двум неколлинеарным векторам  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ , параллельным касательной плоскости в точке  $M_0$ , перпендикулярен к касательной плоскости. Следовательно, *прямая  $(M_0, \vec{N})$  является нормалью к поверхности  $F$  в точке  $M_0$ .*

**З а м е ч а н и е.** Семейство прямых пространства  $E_3$ , зависящее от двух параметров, называется конгруэнцией прямых или просто *конгруэнцией*. Семейство нормалей  $(M_0, \vec{N})$  гладкой поверхности  $F \subset E_3$  зависит от двух параметров — криволинейных координат  $u, v$  точки  $M$  поверхности. Следовательно, это семейство образует конгруэнцию. Можно показать, что свойства поверхности  $F$  тесно связаны со свойствами конгруэнции ее нормалей.

4. Пусть в прямоугольной системе координат  $Oi\ j\ k$  вектор  $\vec{N}$ , перпендикулярный к касательной плоскости поверхности  $F$ , имеет координаты  $(N_1, N_2, N_3)$ . Тогда касательная плоскость в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  этой поверхности определяется уравнением (см. ч. I, § 59, п. 4)

$$(x - x_0)N_1 + (y - y_0)N_2 + (z - z_0)N_3 = 0. \quad (4)$$

Нормаль к поверхности в точке  $M_0$  определяется каноническими уравнениями<sup>1</sup> (см. ч. I, § 63, п. 2)

$$\frac{x - x_0}{N_1} = \frac{y - y_0}{N_2} = \frac{z - z_0}{N_3}. \quad (5)$$

Если гладкая поверхность  $F$  задана параметрическими уравнениями, то вектор  $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$  перпендикулярен к касательной плоскости поверхности, поэтому сначала находим координаты вектора  $\vec{N}$ , а затем записываем уравнения (4) и (5). Если же поверхность  $F$  задана в неявном виде уравнением (10) § 55, то для написания уравнений касательной плоскости и нормали следует воспользоваться следующей леммой.

**Л е м м а.** *Если гладкая поверхность задана в неявном виде уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , то вектор  $\vec{N}(F_x, F_y, F_z)$  является ненулевым вектором, перпендикулярным к касательной плоскости данной поверхности в соответствующей точке.*

□ Так как данная поверхность гладкая, то  $\text{ранг } \|F_x, F_y, F_z\| = 1$  (см. § 55, п. 4), поэтому  $\vec{N}$  — ненулевой вектор.

Убедимся в том, что вектор  $\vec{N}$  перпендикулярен к касательной плоскости поверхности в точке  $M_0$ . Для этого достаточно доказать, что если  $\gamma$  — произвольная гладкая линия, лежащая на данной

<sup>1</sup> Здесь мы предположили, что  $N_1 \neq 0, N_2 \neq 0, N_3 \neq 0$ . В противном случае канонические уравнения нормали имеют вид (2) или (3) (ч. I, § 63), где следует положить  $p_1 = N_1, p_2 = N_2, p_3 = N_3$ .

поверхности и проходящая через точку  $M_0$ , то вектор  $\vec{N}$  перпендикулярен касательной к линии  $\gamma$  в точке  $M_0$ .

Пусть линия  $\gamma$  задана уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Ясно, что в любой точке линии  $\gamma$  с параметром  $t$  справедливо тождество  $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ . Дифференцируя это тождество по  $t$ , получаем:

$$F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = 0.$$

Это равенство верно и в точке  $M_0$ , поэтому вектор  $\vec{N}$  в этой точке перпендикулярен к касательному вектору  $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$  линии  $\gamma$  в точке  $M_0$ . ■

**Пример 1.** Написать уравнения касательной плоскости и нормали прямого геликоида, заданного уравнениями (см. § 55, пример 1)  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = bv$ , где  $b > 0$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , в точке  $M_0(u_0, v_0)$ .

Векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  в точке  $M_0$  имеют координаты  $\vec{r}_u(\cos v_0, \sin v_0, 0)$ ,  $\vec{r}_v(-u_0 \sin v_0, u_0 \cos v_0, b)$ , поэтому вектор  $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$  в этой точке имеет координаты (ч. I, § 56, теорема 2)  $\vec{N}(b \sin v_0, -b \cos v_0, u_0)$ .

По формуле (4) находим уравнение касательной плоскости:

$$(x - x_0) b \sin v_0 - (y - y_0) b \cos v_0 + (z - z_0) u_0 = 0.$$

Учитывая, что  $x_0 = u_0 \cos v_0$ ,  $y_0 = u_0 \sin v_0$ ,  $z_0 = bv_0$ , после элементарных преобразований окончательно получим:

$$xb \sin v_0 - yb \cos v_0 + zu_0 - bu_0 v_0 = 0.$$

По формулам (5) находим уравнение нормали в точке  $M_0$ :

$$\frac{x - u_0 \cos v_0}{b \sin v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{-b \cos v_0} = \frac{z - bv_0}{u_0}.$$

**Пример 2.** Написать уравнение касательной плоскости к эллипсоиду, заданному каноническим уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

По доказанной лемме вектор  $\vec{N}$ , перпендикулярный к касательной плоскости эллипсоида в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , имеет координаты  $\vec{N}\left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$ . Поэтому уравнение (4) имеет вид:

$$(x - x_0) \frac{2x_0}{a^2} + (y - y_0) \frac{2y_0}{b^2} + (z - z_0) \frac{2z_0}{c^2} = 0.$$

Так как точка  $M_0$  лежит на эллипсоиде, то  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ .

Таким образом, предыдущее уравнение принимает вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

В частности, уравнение касательной плоскости к сфере радиуса  $a$ , заданной уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , имеет вид  $xx_0 + yy_0 + zz_0 = a^2$ .

## § 57. Первая квадратичная форма поверхности

1. Рассмотрим гладкую поверхность  $F_0$ , заданную уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (1)$$

Дифференциал векторной функции  $\vec{r}(u, v)$  в произвольной точке  $M \in F_0$  имеет вид (см. § 54, формула (3'))  $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ .

Отсюда следует, что

$$(d\vec{r})^2 = \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{21}dvdu + \gamma_{22}(dv)^2, \quad (2)$$

где

$$\gamma_{11} = \vec{r}_u^2, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \vec{r}_u \vec{r}_v, \quad \gamma_{22} = \vec{r}_v^2. \quad (3)$$

Правая часть формулы (2) является квадратичной формой, заданной на векторном подпространстве  $T_M$ , касательном к поверхности  $F_0$  в точке  $M$ . Эта форма положительно определенная, так как если  $du$  и  $dv$  не обращаются в нуль одновременно (т. е. если  $d\vec{r} \neq \vec{0}$ ), то  $(d\vec{r})^2 > 0$ . Таким образом, касательное векторное подпространство  $T_M$  к поверхности  $F_0$  в ее точке  $M$  является двумерным евклидовым векторным пространством.

Квадратичная форма

$$\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2 \quad (4)$$

называется *первой квадратичной формой поверхности  $F_0$  или ее линейным элементом*.

Заметим, что  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  являются векторными функциями переменных  $u$  и  $v$  — криволинейных координат точки  $M$  на поверхности  $F_0$ , поэтому коэффициенты (3) первой квадратичной формы поверхности также являются функциями криволинейных координат  $u$  и  $v$ .

Рассмотрим на поверхности  $F_0$ , заданной уравнением (1), гладкую линию  $\gamma$  (см. § 56, п. 1):

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad (5)$$

где параметр  $t$  изменяется в некотором промежутке  $I$ . Линия  $\gamma$  в пространстве задается уравнением (3) § 56:  $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ . Дифференцируя это уравнение по  $t$ , получаем:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}.$$

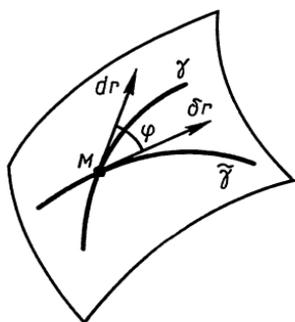


Рис. 196

Так как  $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$ , где  $s$  — длина

дуги линии  $\gamma$  (см. формулу (7) § 51), то из этой формулы, учитывая равенства (3), находим:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma_{11} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$(ds)^2 = \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2. \quad (7)$$

Таким образом, значение первой квадратичной формы поверхности представляет собой квадрат дифференциала длины дуги гладкой линии, лежащей на поверхности, при бесконечно малом смещении точки вдоль этой линии.

Из равенства (6) получаем формулу для вычисления длины дуги линии  $\gamma$  с концами в точках  $M_1(t_1)$  и  $M_2(t_2)$ , где  $t_1 < t_2$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\gamma_{11} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2\gamma_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \gamma_{22} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \quad (8)$$

2. Пусть  $\gamma, \tilde{\gamma}$  — две гладкие линии на поверхности  $F_0$ , проходящие через точку  $M$ . Углом между линиями  $\gamma, \tilde{\gamma}$  называется угол между касательными к этим линиям в их общей точке  $M$ .

Обозначим через  $d$  и  $\delta$  символы дифференцирования вдоль линий  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$ . Значит,  $\vec{dr}$  и  $\vec{\delta r}$  — векторы касательных к линиям  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  в точке  $M$  (рис. 196). Угол  $\varphi$  между линиями  $\gamma, \tilde{\gamma}$  можно вычислить как угол между векторами  $\vec{dr}$  и  $\vec{\delta r}$ :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{dr} \vec{\delta r}}{|\vec{dr}| |\vec{\delta r}|}.$$

По формуле (3') § 54 имеем:

$$\vec{dr} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv; \quad \vec{\delta r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v.$$

Подставив эти значения в предыдущую формулу и учитывая равенства (3), получаем:

$$\cos \varphi = \frac{\gamma_{11} du \delta u + \gamma_{12} (du \delta v + dv \delta u) + \gamma_{22} dv \delta v}{\sqrt{\gamma_{11} du^2 + 2\gamma_{12} dudv + \gamma_{22} dv^2} \sqrt{\gamma_{11} \delta u^2 + 2\gamma_{12} \delta u \delta v + \gamma_{22} \delta v^2}}. \quad (9)$$

Рассмотрим частный случай, когда  $\gamma$  — линия  $u$  (т. е.  $dv = 0$ ), а  $\tilde{\gamma}$  — линия  $v$  ( $\delta u = 0$ ):

$$\cos \varphi = \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22}}}. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует важный вывод: чтобы координатная сеть на поверхности была ортогональной ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой поверхности выполнялось равенство  $\gamma_{12} = 0$ .

3. Пусть  $F$  — поверхность с краем, удовлетворяющая следующим трем условиям:

- 1)  $F$  гомеоморфна замкнутому кругу;
- 2)  $F$  является частью некоторой гладкой поверхности  $\Phi$ ;
- 3) край поверхности  $F$  — кусочно-гладкая линия.

В курсе математического анализа устанавливают, что для такой поверхности можно ввести понятие площади<sup>1</sup>, и выводят формулы для ее вычисления. Поверхность, имеющая площадь, называется *квадрируемой*.

Простейшим случаем квадрируемой поверхности  $F$  в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  является поверхность, заданная явным уравнением:  $z = f(x, y)$ , где точка  $(x, y)$  описывает область  $D$  на плоскости  $Oxy$ , гомеоморфную замкнутому кругу. Площадь такой поверхности вычисляется по формуле

$$S(F) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (11)$$

Если поверхность  $F$  задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

то площадь этой поверхности вычисляется по формуле

$$S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} dudv, \quad (12)$$

где  $G$  — соответствующая поверхности  $F$  область изменения переменных  $u, v$ .

Заметим, что если  $\vec{r}(u, v)$  — векторная функция с координатами  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ , то в каждой точке  $(u, v)$  поверхности  $F$  имеем:

$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = |\vec{r}_u \vec{r}_v|. \quad (13)$$

В самом деле, если  $\varphi = \widehat{\vec{r}_u \vec{r}_v}$ , то  $|\vec{r}_u \vec{r}_v| = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \sin \varphi = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ . Отсюда, используя формулы (3) и (10), получаем (13).

Таким образом, если поверхность  $F$  задана векторным уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ , то площадь этой поверхности можно вычислить по формуле

$$S(F) = \iint_G |\vec{r}_u \vec{r}_v| dudv. \quad (12')$$

Поверхность  $\Phi$  называется *кусочно-гладкой*, если она является

<sup>1</sup> См., например: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1966, т. I, с. 257.

объединением конечного числа поверхностей, удовлетворяющих условиям 1, 2 и 3. В курсе математического анализа доказывается, что понятие площади можно распространить на кусочно-гладкие поверхности. Значит, любая кусочно-гладкая поверхность квадрируема. В частности, сфера, эллипсоид — квадрируемые поверхности.

**З а м е ч а н и е.** Мы видим, что, зная первую квадратичную форму поверхности, можно решить следующие метрические задачи (т. е. задачи на вычисление):

1) вычислить длину дуги гладкой линии, лежащей на поверхности;

2) вычислить угол между двумя гладкими линиями, лежащими на поверхности и имеющими общую точку;

3) вычислить площадь гладкой компактной поверхности.

Учитывая эти приложения первой квадратичной формы, ее часто называют *метрической формой данной поверхности*.

## § 58. Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма

1. Пусть  $F_0$  — гладкая элементарная поверхность класса  $C^k (k \geq 3)$ , заданная уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (1)$$

а  $\gamma$  — гладкая линия на этой поверхности (рис. 197). При смещении точки  $M$  по этой линии мы имеем  $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ . Отсюда находим:

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}(dv)^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v, \quad (2)$$

где  $\vec{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}$ ,  $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}$ ,  $\vec{r}_{vv} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}$ .

Из формулы (13) § 57 заключаем, что длина вектора нормали  $\vec{n}$   $\vec{N} = [\vec{r}_u \vec{r}_v]$  равна  $\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}$ , поэтому вектор  $\vec{n}$ , определяемый равенством

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u \vec{r}_v]}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}, \quad (3)$$

в каждой точке  $(u, v)$  является единичным вектором нормали к поверхности  $F_0$ .

Так как  $\vec{n} \vec{r}_u = \vec{n} \vec{r}_v = 0$ , то, умножая равенство (2) скалярно на  $\vec{n}$ , получаем:

$$\vec{n} d^2\vec{r} = \vec{n} \vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{n} \vec{r}_{uv}dudv + \vec{n} \vec{r}_{vv}(dv)^2. \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\vec{n} \vec{r}_{uu} = b_{11}, \quad \vec{n} \vec{r}_{uv} = b_{12} = b_{21}, \quad \vec{n} \vec{r}_{vv} = b_{22}. \quad (5)$$

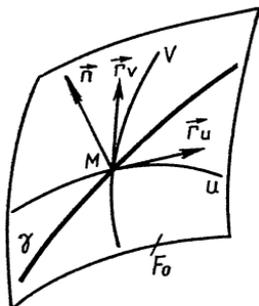


Рис. 197

Учитывая равенство (3), последние формулы можно записать в виде

$$b_{11} = \frac{\overrightarrow{r_u r_v r_{uu}}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{\overrightarrow{r_u r_v r_{uv}}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}, \quad b_{22} = \frac{\overrightarrow{r_u r_v r_{vv}}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}. \quad (5')$$

В числителях этих формул стоят смешанные произведения указанных векторов. Равенство (4) принимает вид:

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{r} = b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2. \quad (4')$$

Правая часть этого равенства является квадратичной формой, определенной на векторном пространстве  $T_M$ , касательном к поверхности  $F_0$  в точке  $M$ . Квадратичная форма

$$b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2$$

называется *второй квадратичной формой поверхности*. Только для поверхностей, лежащих на плоскости, эта форма тождественно равна нулю ( $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$  в каждой точке поверхности).

2. Пусть линия  $\gamma$  на поверхности (1) задана уравнениями  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$ , где  $s$  — естественный параметр. Найдем единичный вектор  $\vec{\tau}$ , касательный к линии  $\gamma$  в точке  $M$ :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}. \quad (6)$$

По формуле Френе  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{v}$ , где  $k$  — кривизна, а  $\vec{v}$  — единичный вектор главной нормали линии  $\gamma$  в точке  $M$ . Из формулы (6) находим:

$$k\vec{v} = \vec{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}. \quad (7)$$

Умножая это равенство скалярно на вектор  $\vec{n}$  и учитывая равенства (5), получаем:

$$\vec{n}(k\vec{v}) = \frac{b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2}{ds^2}. \quad (8)$$

Левую часть этого равенства, которую мы обозначим через  $k_n$ , называют *нормальной кривизной* линии  $\gamma \subset F_0$  в точке  $M$ . Таким образом,

$$k_n = \vec{n}(k\vec{v}), \quad \text{или} \quad k_n = k \cos \Theta, \quad \text{где} \quad \Theta = \widehat{(\vec{n}, \vec{v})}.$$

Если  $\gamma$  — *нормальное сечение* поверхности, т. е. сечение поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке  $M$ , то, очевидно, либо  $\vec{n} = \vec{v}$ , либо  $\vec{n} = -\vec{v}$ . В первом случае  $k_n = k$ , а во втором случае  $k_n = -k$ . Таким образом, абсолютная величина нормальной кривизны нормального сечения равна кривизне этого сечения в точке  $M$ .

Учитывая равенство (7) § 57, формулу (8) запишем в виде

$$k_n = \frac{b_{11}(du)^2 + 2b_{12}dudv + b_{22}(dv)^2}{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2}. \quad (9)$$

Так как  $du$  и  $dv$  не обращаются в нуль одновременно (иначе не было бы смещения точки  $M$  вдоль линии  $\gamma$ ), то для определенности будем считать, что  $dv \neq 0$ . Из равенства  $\vec{dr} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$  следует, что в касательной плоскости к поверхности в точке  $M$  направление касательной прямой к линии  $\gamma$  в этой точке определяется отношением  $\lambda = \frac{du}{dv}$ . Равенство (9) теперь можно записать так:

$$k_n = \frac{b_{11}\lambda^2 + 2b_{12}\lambda + b_{22}}{\gamma_{11}\lambda^2 + 2\gamma_{12}\lambda + \gamma_{22}}.$$

Из этой формулы следует, что *нормальная кривизна линии  $\gamma \subset F_0$  в точке  $M$  зависит только от направления касательной*. Следовательно, *все гладкие линии поверхности, проходящие через точку  $M$  и имеющие в этой точке общую касательную, имеют в точке  $M$  одну и ту же нормальную кривизну*.

Отсюда следует, что нормальная кривизна любой линии поверхности, проходящей через точку  $M$ , с точностью до знака равна кривизне нормального сечения, имеющего с данной линией общую касательную.

3. Рассмотрим точку  $M$  гладкой поверхности  $F_0$ , заданной уравнением (1). Если в этой точке  $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ , то из формулы (9) следует, что нормальная кривизна любой линии поверхности, проходящей через точку  $M$ , равна нулю. В дальнейшем мы исключаем этот случай и предполагаем, что в точке  $M$  хотя бы один из коэффициентов  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  отличен от нуля.

Установим связь между нормальными кривизнами линий на поверхности  $F_0$ , проходящих через точку  $M$  и имеющих разные касательные. В касательной плоскости поверхности  $F_0$  в точке  $M$  рассмотрим пучок прямых  $\Omega$  с центром  $M$ . На каждой из прямых этого пучка от точки  $M$  по обе стороны отложим отрезки длиной  $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$ .

Здесь  $k_n$  — отличная от нуля нормальная кривизна линий на поверхности, для которых данная прямая является касательной.

Линия, образованная концами отложенных таким образом отрезков, называется *индикатрисой кривизны* поверхности (или *индикатрисой Дюпена*<sup>1)</sup> в точке  $M$ . В касательной плоскости введем аффинную систему координат  $M\vec{r}_u\vec{r}_v$  и найдем уравнение индикатрисы кривизны в точке  $M$ . Пусть  $P(x, y)$  — текущая точка индикатрисы,  $\vec{\tau}$  — единичный направляющий вектор прямой  $MP$ , а  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$  — какая-нибудь гладкая линия на поверхности, для которой вектор  $\vec{\tau}$  является единичным касательным вектором в точке  $M$ . Тогда

<sup>1</sup> П. Ш. Ф. Д ю п е н (1784—1873) — французский математик, инженер и экономист, ученик Г. Монжа.

по построению  $\vec{MP} = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \vec{\tau}$ . Отсюда, учитывая формулу (6), получаем:

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \left( \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \right).$$

Так как векторы  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$  не коллинеарны, то

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{du}{ds}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_n|}} \frac{dv}{ds}.$$

Запишем формулу (8) в виде

$$k_n = b_{11} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + b_{22} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2. \quad (10)$$

Подставив сюда значения  $\frac{du}{ds}$  и  $\frac{dv}{ds}$  из предыдущих формул и сократив на  $k_n$ , получим уравнение индикатрисы Дюпена в точке  $M$ :

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = \pm 1. \quad (11)$$

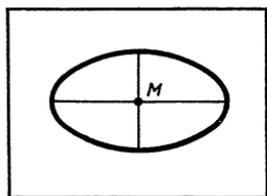
Здесь  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  — числа, не все равные нулю одновременно. Так как нас интересуют только вещественные линии, то возможны следующие три случая:

а)  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$ . Уравнениями (11) определяется эллипс (рис. 198, а). В этом случае точка  $M$  называется *эллиптической точкой* поверхности  $F_0$ . Частным случаем эллиптической точки является *омбилическая точка*, в которой индикатриса Дюпена есть окружность.

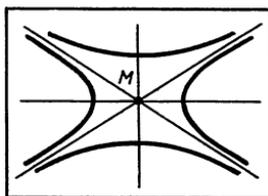
б)  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$ . Уравнениями (11) определяется пара сопряженных гипербол (рис. 198, б). В этом случае точка  $M$  называется *гиперболической точкой* поверхности.

в)  $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$ . Уравнениями (11) определяется пара параллельных прямых. В этом случае точка  $M$  называется *параболической точкой* поверхности.

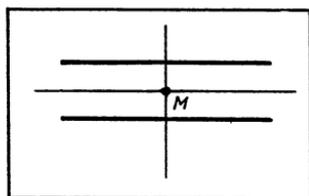
Предоставляем читателю проверить, что: 1) эллипсоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид состоят из эллиптических точек (все точки сферы омбилические); 2) однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид состоят из гиперболических точек; 3) все цилиндры и конусы второго порядка (без вершины) состоят из параболических точек. В вершине конуса не существует касательной плоскости к конусу, а значит, в этой точке нет и индикатрисы Дюпена.



а)



б)



в)

Рис. 198

## § 59. Главные кривизны. Полная и средняя кривизны поверхности

1. Пусть  $F_0$  — гладкая элементарная поверхность, которая задана векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v). \quad (1)$$

Главные направления индикатрисы Дюпена в точке  $M_0$  поверхности  $F_0$  называются *главными направлениями* поверхности в этой точке. Для точек простейшей поверхности главные направления не определяются, так как не существует индикатрисы Дюпена. В неомбилической точке поверхности  $F_0$  существует единственная пара главных направлений. В омбилической точке любое направление является главным.

Пусть в точке  $M \in F_0$  главные направления определяются векторами  $\vec{dr} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$  и  $\delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$ . Согласно определению векторы  $\vec{dr}$  и  $\delta\vec{r}$  ортогональны и сопряжены относительно индикатрисы Дюпена (см. ч. I, § 36), следовательно,  $\vec{dr}\delta\vec{r} = 0$  (условие ортогональности),  $b_{11}du\delta u + b_{12}du\delta v + b_{21}dv\delta u + b_{22}dv\delta v = 0$  (условие сопряженности).

Докажем, что условие сопряженности может быть записано в виде  $d\vec{n}\delta\vec{r} = 0$ , где  $d\vec{n}$  — дифференциал единичного вектора нормали, соответствующий смещению  $\vec{dr}$  точки  $M$  на поверхности. Для этого воспользуемся следующими формулами:

$$b_{11} = -\vec{n}_u \vec{r}_u, \quad b_{12} = b_{21} = -\vec{n}_v \vec{r}_u = -\vec{n}_u \vec{r}_v, \quad b_{22} = -\vec{n}_v \vec{r}_v. \quad (2)$$

Докажем, например, первое из этих равенств. Дифференцируя тождество  $\vec{n}\vec{r}_u = 0$  по  $u$ , получаем  $\vec{n}_u \vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0$ . Так как  $\vec{n}\vec{r}_{uu} = b_{11}$  (см. § 58, формулы (5)), то  $b_{11} = -\vec{n}_u \vec{r}_u$ . Предлагаем читателю аналогично вывести остальные два равенства.

Подставив значения коэффициентов (2) в условие сопряженности, после очевидных преобразований получаем:

$$(\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv)(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v) = 0, \text{ или } d\vec{n}\delta\vec{r} = 0.$$

Итак, для того чтобы векторы  $\vec{dr}$  и  $\delta\vec{r}$  определяли главные направления в точке  $M$  поверхности  $F_0$ , необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\vec{dr}\delta\vec{r} = 0 \text{ и } d\vec{n}\delta\vec{r} = 0. \quad (3)$$

2. Пользуясь равенствами (3), докажем следующую теорему (теорема Родрига<sup>1</sup>):

**Т е о р е м а 1.** Для того чтобы направление  $\vec{dr}$  в точке  $M$  поверхности (1) было главным, необходимо и достаточно, чтобы

<sup>1</sup> Б. О. Родригес (Родриг) (1794—1851) — французский математик и механик.

$$\vec{dn} = -k\vec{dr}. \quad (4)$$

Здесь  $\vec{dn}$  — дифференциал единичного вектора нормали, соответствующий смещению  $\vec{dr}$  точки  $M$ , а  $k$  — нормальная кривизна по направлению  $\vec{dr}$ .

□ Пусть  $\vec{dr}$  определяет главное направление в точке  $M$ . Тогда выполняются равенства (3), где  $\vec{\delta r}$  — другое главное направление в точке  $M$ , причем  $\vec{dr} \perp \vec{\delta r}$ . Так как  $\vec{dn} = \vec{n}_u du + \vec{n}_v dv$ ,  $\vec{n}_u$  и  $\vec{n}_v$  ортогональны вектору  $\vec{n}$  (см. § 48, лемма), то вектор  $\vec{dn}$  принадлежит касательному векторному подпространству  $T_M$ . Из равенств (3) следует, что векторы  $\vec{dn}$  и  $\vec{dr}$  коллинеарны, т. е. существует такое действительное число  $\lambda$ , что

$$\vec{dn} = \lambda\vec{dr}. \quad (5)$$

Докажем, что  $\lambda = -k$ . Запишем равенство (5) в виде  $\frac{d\vec{n}}{ds} = \lambda \frac{d\vec{r}}{ds}$ . Отсюда имеем  $\frac{d\vec{n}}{ds} \frac{d\vec{r}}{ds} = \lambda \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d\vec{r}}{ds} = \lambda$ , или  $\lambda = \left( \vec{n}_u \frac{du}{ds} + \vec{n}_v \frac{dv}{ds} \right) \left( \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds} \right)$ . Раскрыв скобки и учитывая формулы (2) и формулу (10) § 58, получаем  $\lambda = -k$ . Таким образом, равенство (5) принимает вид (4).

Обратно: пусть выполнено равенство (4). Докажем, что  $\vec{dr}$  определяет главное направление. Возьмем в подпространстве  $T_M$  направление  $\vec{\delta r}$ , ортогональное направлению  $\vec{dr}$ , тогда  $d\vec{r}\delta\vec{r} = 0$ . Так как  $\vec{dn} = -k\vec{dr}$ , то  $d\vec{n}\delta\vec{r} = (-k\vec{dr})\delta\vec{r} = 0$ . Мы видим, что выполнены равенства (3), следовательно, направление  $\vec{dr}$  главное. ■

Формула (4) называется *формулой Родрига*.

Нормальные кривизны по главным направлениям в точке  $M$  поверхности называются *главными кривизнами поверхности* в этой точке. Мы видим, что число  $k$  в формуле Родрига представляет собой главную кривизну поверхности в точке  $M$  по главному направлению  $\vec{dr}$ .

3. Запишем формулу Родрига подробнее:

$$\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv = -k(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv).$$

Умножим скалярно обе части этого равенства сначала на  $\vec{r}_u$ , а затем на  $\vec{r}_v$ . Учитывая формулы (2) и выражения для коэффициентов первой квадратичной формы (§ 57, формулы (3)), имеем:

$$\left. \begin{aligned} (b_{11} - k\gamma_{11})du + (b_{12} - k\gamma_{12})dv &= 0 \\ (b_{21} - k\gamma_{21})du + (b_{22} - k\gamma_{22})dv &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Исключив отсюда  $k$ , получим уравнение для определения главных направлений:

$$\begin{vmatrix} b_{11}du + b_{12}dv & \gamma_{11}du + \gamma_{12}dv \\ b_{21}du + b_{22}dv & \gamma_{21}du + \gamma_{22}dv \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Линия  $\gamma$  на поверхности называется *линией кривизны*, если направление ее касательной в каждой точке  $M \in \gamma$  является главным направлением в этой точке. Таким образом, если точка  $M$  неомбилическая, то через нее проходят две линии кривизны, направления которых в точке  $M$  ортогональны и сопряжены. Если координатная сеть линий  $u, v$  на поверхности  $F_0$  образована линиями кривизны, то в каждой точке  $M \in F_0$  имеем  $\gamma_{12} = 0$  (так как линии  $u$  и  $v$  ортогональны в каждой точке  $M \in F_0$ ) и  $b_{12} = 0$  (так как направления касательных к линиям  $u$  и  $v$  в точке  $M$  сопряжены относительно индикатрисы Дюпена).

4. Рассмотрим уравнения (6) как систему двух линейных однородных уравнений с неизвестными  $du, dv$ . Эта система имеет ненулевое решение (так как  $d\vec{r} \neq \vec{0}$ ), значит, определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k\gamma_{11} & b_{12} - k\gamma_{12} \\ b_{21} - k\gamma_{21} & b_{22} - k\gamma_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$k^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11}\gamma_{12} \\ \gamma_{21}\gamma_{22} \end{vmatrix} - \left( \begin{vmatrix} \gamma_{11}b_{12} \\ \gamma_{21}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}\gamma_{12} \\ b_{21}\gamma_{22} \end{vmatrix} \right) k + \begin{vmatrix} b_{11}b_{12} \\ b_{21}b_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, главные кривизны  $k_1, k_2$  в точке  $M \in F_0$  являются корнями уравнения (8).

Полусумма главных кривизн  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  называется *средней кривизной поверхности* в точке  $M$ . Произведение главных кривизн  $K = k_1k_2$  называется *полной* (или гауссовой) *кривизной поверхности* в точке  $M$ .

Из уравнения (8) по теореме Виета имеем:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11}b_{12} \\ \gamma_{21}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}\gamma_{12} \\ b_{21}\gamma_{22} \end{vmatrix}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \quad (9)$$

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}. \quad (10)$$

Так как  $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 > 0$ , то из формулы (10) следует, что в эллиптических точках поверхности  $K > 0$ , в гиперболических точках  $K < 0$ , в параболических точках  $K = 0$ .

При выводе формул (9) и (10) мы предполагали, что в данной точке  $M$  хотя бы один из коэффициентов второй квадратичной формы отличен от нуля. Мы распространяем эти формулы и на случай, когда в данной точке  $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ .

Если поверхность  $F_0$  простейшая, то она лежит в некоторой

плоскости  $\sigma$ , поэтому вектор  $\vec{n}$  перпендикулярен к этой плоскости и является постоянным вектором. Следовательно,  $\vec{n}_u = \vec{n}_v = \vec{0}$ , и по формулам (2) находим  $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ . Таким образом, в каждой точке простейшей поверхности  $H = K = 0$ .

Обратно: пусть в каждой точке  $M$  гладкой поверхности  $F_0$  имеем  $H = 0$  и  $K = 0$ . По формулам (9) и (10) получаем, что

$$\gamma_{11}b_{22} - 2\gamma_{12}b_{12} + \gamma_{22}b_{11} = 0, \quad b_{11}b_{12} - b_{22}^2 = 0. \quad (11)$$

Из курса алгебры известно, что если на векторном пространстве  $V$  заданы две квадратичные формы, одна из которых положительно определенная, то в этом пространстве существует такой базис, в котором каждая из этих форм имеет канонический вид. Именно такую ситуацию мы имеем в данном случае: первая и вторая квадратичные формы поверхности в данной точке  $M$  удовлетворяют этим условиям. В самом деле, они заданы в двумерном касательном векторном подпространстве  $T_M$  точки  $M$  и первая квадратичная форма является положительно определенной. Следовательно, в  $T_M$  найдется такой базис, что  $\gamma_{12} = b_{12} = 0$ . Тогда уравнения (11) примут вид:

$$\gamma_{11}b_{22} - \gamma_{22}b_{11} = 0, \quad b_{11}b_{22} = 0.$$

Из второго уравнения следует, что по крайней мере одно из чисел  $b_{11}$ ,  $b_{22}$  равно нулю. Тогда из первого уравнения найдем, что и другое из этих чисел равно нулю. Значит, в точке  $M \in F_0$  имеем  $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ . Из формул (2) следует, что  $\vec{n}_u = \vec{0}$  и  $\vec{n}_v = \vec{0}$ . Следовательно,  $d\vec{n} = \vec{0}$  и единичный вектор  $\vec{n}$  нормали к поверхности  $F_0$  во всех ее точках — один и тот же. Отсюда следует, что поверхность  $F_0$  содержится в некоторой плоскости. В самом деле, пусть поверхность  $F_0$  в прямоугольной системе координат  $Oijk$  задана уравнением  $\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ .

Из равенств  $\vec{r}_u \vec{n} = 0$ ,  $\vec{r}_v \vec{n} = 0$  следует  $\frac{\partial(\vec{r}\vec{n})}{\partial u} = 0$ ,  $\frac{\partial(\vec{r}\vec{n})}{\partial v} = 0$ , т. е.  $\vec{r}\vec{n} = \lambda$ , где  $\lambda = \text{const}$ . Это равенство можно записать так:  $x(u, v)n_1 + y(u, v)n_2 + z(u, v)n_3 = \lambda$ , где  $n_1, n_2, n_3$  — координаты вектора  $\vec{n}$  в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Из этого равенства мы заключаем, что поверхность  $F_0$  лежит в плоскости  $xn_1 + yn_2 + zn_3 = \lambda$ . Мы доказали следующую теорему.

**Теорема 2.** *Для того чтобы связная поверхность была простейшей, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее точке средняя и полная кривизны были равны нулю.*

## § 60. Примеры поверхностей постоянной кривизны

1. Поверхность  $F$  называется *поверхностью постоянной полной* (соответственно *средней*) *кривизны*, если во всех точках этой поверхности  $K = \text{const}$  ( $H = \text{const}$ ). Тривиальным примером поверхности постоянной полной и средней кривизн является любая простейшая поверхность, у которой в каждой точке  $K = 0$  и  $H = 0$ . Далее, примером поверхности постоянной полной кривизны является любая цилиндрическая или коническая поверхность, так как все точки этих поверхностей являются параболическими, т. е.  $K = 0$ . Рассмотрим более сложные примеры поверхностей постоянных полной и средней кривизн.

2. Приведем примеры поверхностей вращения постоянной полной кривизны. Сначала рассмотрим общий случай поверхности вращения, которая образована вращением плоской кривой около некоторой прямой (оси вращения), расположенной в плоскости этой кривой. Напомним, что меридианами называются сечения такой поверхности

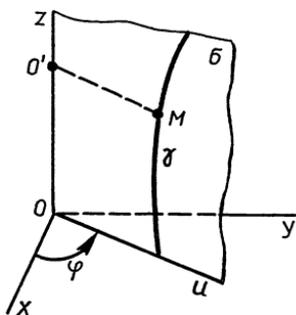


Рис. 199

плоскостями, проходящими через ось вращения, а параллелями — сечения поверхности плоскостями, перпендикулярными оси вращения (см. ч. I, § 75).

Зададим прямоугольную систему координат  $Oxyz$  так, чтобы ось  $Oz$  была осью вращения. Пусть  $\sigma$  — плоскость, в которой лежит кривая  $\gamma$ , образующая поверхность вращения  $F$ . В плоскости  $\sigma$  введем прямоугольную систему координат  $Ouz$  (рис. 199), где  $Ou = \sigma \cap (Oxy)$ .

Мы предполагаем, что кривая  $\gamma$  гладкая и определяется в системе координат  $Ouz$  уравнением  $z = f(u)$ .

Угол  $xOiu$  обозначим через  $\varphi$ , и пусть  $M \in \gamma$ . Когда угол  $\varphi$  изменяется в промежутке  $[0, 2\pi]$ , точка  $M$  описывает параллель — окружность с центром в точке  $O' \in Oz$ . Обозначим через  $x, y, z$  координаты точки  $M$  в системе координат  $Oxyz$ . Тогда находим:

$$x = u \cos \varphi, \quad y = u \sin \varphi, \quad z = f(u). \quad (1)$$

Это и есть параметрические уравнения поверхности вращения  $F$ . Правые части равенств (1) непрерывны и имеют непрерывные производные в некоторой области  $G$  изменения переменных  $u$  и  $\varphi$ .

При этом матрица  $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & f'(u) \\ -u \sin \varphi & u \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$  имеет ранг, равный двум, в любой точке  $(u, \varphi) \in G$ , если  $u \neq 0$ . Значит, для любой точки  $M \in F$ ,  $M \notin Oz$  существует гладкая элементарная поверхность  $F_0$ , такая, что  $M \in F_0 \subset F$ . Поэтому фигура  $F$ , за исключением, может быть, ее точек, лежащих на оси вращения, является гладкой поверхностью. Обозначив  $\vec{OM} = \vec{r}$ , получаем векторное задание поверхности  $F$ :

$$\vec{r} = \vec{i} u \cos \varphi + \vec{j} u \sin \varphi + \vec{k} f(u). \quad (2)$$

Здесь роль второго параметра на поверхности играет  $\varphi$ . Заметим, что координатные линии  $\varphi = \text{const}$  — меридианы, а  $u = \text{const}$  — параллели.

Найдем коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Используя формулу (2), находим координаты частных производных векторной функции  $\vec{r}(u, \varphi)$ :  $\vec{r}_u(\cos \varphi, \sin \varphi, f'(u))$ ,  $\vec{r}_\varphi(-u \sin \varphi, u \cos \varphi, 0)$ ,  $\vec{r}_{uu}(0, 0, f''(u))$ ,  $\vec{r}_{u\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ ,  $\vec{r}_{\varphi\varphi}(-u \cos \varphi, -u \sin \varphi, 0)$ .

По формулам (3) § 57 и (5') § 58 находим коэффициенты первой и второй квадратичных форм:

$$\gamma_{11} = 1 + f'^2(u), \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = u^2; \quad (3)$$

$$b_{11} = \frac{uf''(u)}{\sqrt{u^2(1 + f'^2(u))}}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \frac{u^2 f'(u)}{\sqrt{u^2(1 + f'^2(u))}}. \quad (4)$$

Так как  $\gamma_{12} = 0$  и  $b_{12} = 0$ , то координатная сеть образована

линиями кривизны (см. § 59, п. 3). Таким образом, линиями кривизны на поверхности вращения являются меридианы и параллели.

По формуле (10) § 59 найдем полную кривизну в точке  $M \in F$ ,  $M \notin Oz$ .

$$K = \frac{f'(u)f''(u)}{u(1 + f'^2(u))^2}. \quad (5)$$

Рассмотрим два частных случая поверхности вращения.

1<sup>0</sup>. Сфера. Уравнение меридиана в плоскости  $\sigma$ :  $z^2 + u^2 = a^2$

( $a$  — радиус сферы). Отсюда  $z = \pm \sqrt{a^2 - u^2}$ . Возьмем для определенности  $z = \sqrt{a^2 - u^2}$ . Следовательно,  $f(u) = \sqrt{a^2 - u^2}$ . Находим:

$$f'(u) = -\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}, \quad f''(u) = -\frac{a^2}{(a^2 - u^2)\sqrt{a^2 - u^2}}.$$

По формуле (5) находим  $K = \frac{1}{a^2}$ .

Мы получим тот же результат, если возьмем  $z = -\sqrt{a^2 - u^2}$ .

Итак, в любой точке сферы полная кривизна одна и та же:  $\frac{1}{a^2}$ .

Поэтому говорят, что сфера является поверхностью постоянной полной положительной кривизны.

2<sup>0</sup>. Псевдосфера. Псевдосферой называется поверхность, полученная вращением трактрисы вокруг своей оси  $Oz$  (рис. 200, а, б).

Параметрические уравнения трактрисы в плоскости  $\sigma$  имеют вид:

$z = a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right)$ ,  $u = a \sin t$  ( $a = \operatorname{const} > 0$ ). Имеем:

$$z'_t = \frac{a \cos^2 t}{\sin t}, \quad u'_t = a \cos t.$$

Следовательно,  $f'(u) = \frac{z'_t}{u'_t} = \operatorname{ctg} t$ , где  $t \neq 0$ .

$$f''(u) = \frac{df'(u)}{du} = \frac{\frac{d}{dt} f'(u)}{u'_t} = -\frac{1}{a \sin^2 t \cos t}.$$

По формуле (5) находим  $K = -\frac{1}{a^2}$ .

Следовательно, псевдосфера является поверхностью постоянной полной отрицательной кривизны.

3. Вычислим полную и среднюю кривизны прямого геликоида:

$$\vec{r} = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + bv \vec{k}, \quad \text{где } b > 0.$$

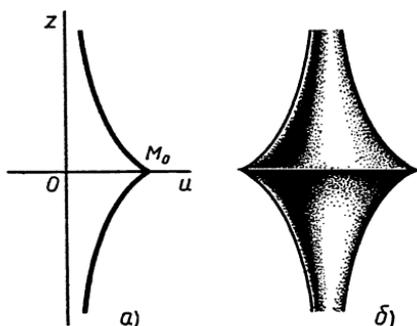


Рис. 200

Найдем координаты частных производных векторной функции  $\vec{r}(u, v)$ :

$$\begin{aligned} & \vec{r}_u(\cos v, \sin v, 0), \quad \vec{r}_v(-u \sin v, u \cos v, b), \\ & \vec{r}_{uu}(0, 0, 0), \quad \vec{r}_{uv}(-\sin v, \cos v, 0), \quad \vec{r}_{vv}(-u \cos v, -u \sin v, 0). \end{aligned}$$

По формулам (3) § 57 и (5') § 58 находим коэффициенты первой и второй квадратичных форм:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = u^2 + b^2; \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = -\frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}}, \\ b_{22} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, по формулам (10) и (9) § 59 находим:

$$K = \frac{-b^2}{(u^2 + b^2)^2}, \quad H = 0.$$

Поверхности, у которых средняя кривизна во всех точках равна нулю, называются *минимальными*. Можно доказать, что из всех гладких поверхностей, ограниченных данным замкнутым контуром, минимальная поверхность имеет наименьшую площадь. Таким образом, *прямой геликоид является минимальной поверхностью*.

## § 61. Внутренняя геометрия поверхности. Девивационные формулы

1. К внутренней геометрии гладкой поверхности относят такие свойства этой поверхности и фигур на ней, которые определяются только первой квадратичной формой. Можно сказать, что задачи о вычислении длины дуги на поверхности, угла между линиями, площади поверхности (см. § 57) относятся к внутренней геометрии поверхности.

В этой главе мы рассмотрим некоторые другие задачи из внутренней геометрии поверхности. Но сначала выведем так называемые девивационные формулы.

Пусть  $F$  — гладкая поверхность класса  $C^k (k \geq 3)$ , заданная векторным уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Векторы  $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ ,  $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ,

$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|}$  линейно независимы в каждой точке  $M \in F$ . Следова-

тельно, в точке  $M$  мы имеем репер (систему координат)  $M\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{n}$ , который обозначим через  $R_M$ . Координатные векторы этого репера выбраны следующим образом: векторы  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  являются касательными векторами в точке  $M$  к линиям  $u$  и  $v$  координатной сети на поверхности, а вектор  $\vec{n}$  — единичный, ортогональный к касательной плоскости поверхности в точке  $M$  и направленный так, что векторы  $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$  образуют базис положительной ориентации.

Частные производные от векторов этого базиса, т. е. векторы  $\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}, \vec{n}_u, \vec{n}_v$ , можно разложить по векторам этого же базиса. Мы получим формулы следующего вида:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_v + \lambda_{11} \vec{n}, \\ \vec{r}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_v + \lambda_{12} \vec{n}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_v + \lambda_{22} \vec{n}, \\ \vec{n}_u &= \alpha_1^1 \vec{r}_u + \alpha_1^2 \vec{r}_v, \quad \vec{n}_v = \alpha_2^1 \vec{r}_u + \alpha_2^2 \vec{r}_v. \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (2) мы учли, что  $|\vec{n}| = 1$ , поэтому  $\vec{n}\vec{n}_u = 0$  и  $\vec{n}\vec{n}_v = 0$ , и, следовательно, коэффициенты при базисном векторе  $\vec{n}$  равны нулю.

2. Нашей ближайшей задачей является выражение коэффициентов в правых частях равенств (1) и (2) через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности и их производные. Эту задачу мы решим в три этапа.

а) Отыскание коэффициентов в  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$  и  $\lambda_{22}$ .

Умножая обе части равенств (1) скалярно на  $\vec{n}$  и учитывая, что  $\vec{n}\vec{n} = 1$ ,  $\vec{n}\vec{r}_u = 0$ ,  $\vec{n}\vec{r}_v = 0$ , получаем  $\lambda_{11} = \vec{n}\vec{r}_{uu}$ ,  $\lambda_{12} = \vec{n}\vec{r}_{uv}$ ,  $\lambda_{22} = \vec{n}\vec{r}_{vv}$ . Сравнивая эти выражения с формулами (5) § 58, получаем:

$$\lambda_{11} = b_{11}, \lambda_{12} = b_{12}, \lambda_{22} = b_{22}. \quad (3)$$

б) Отыскание коэффициентов в  $\alpha_i^j$ , где  $i, j = 1, 2$ .

Умножим обе части каждого из равенств (2) скалярно один раз на вектор  $\vec{r}_u$  и второй раз на вектор  $\vec{r}_v$ . Учитывая формулы (3) § 57 и формулы (2) § 59, получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} \gamma_{11}\alpha_1^1 + \gamma_{12}\alpha_1^2 = -b_{11}, \\ \gamma_{21}\alpha_1^1 + \gamma_{22}\alpha_1^2 = -b_{12}; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}\alpha_2^1 + \gamma_{12}\alpha_2^2 = -b_{21}, \\ \gamma_{21}\alpha_2^1 + \gamma_{22}\alpha_2^2 = -b_{22}. \end{cases} \quad (5)$$

Система (4) есть система двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $\alpha_1^1$ ,  $\alpha_1^2$ . Ее определитель  $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$  отличен от нуля (как дискриминант положительно определенной первой квадратичной формы поверхности). Следовательно, система (4) имеет единственное решение, и, решая ее, мы найдем коэффициенты  $\alpha_1^1$ ,  $\alpha_1^2$ . Точно так же из системы (5) мы найдем коэффициенты  $\alpha_2^1$ ,  $\alpha_2^2$ . Таким образом, коэффициенты в уравнениях (2) выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичных форм данной поверхности.

в) Отыскание коэффициентов в  $\Gamma_{ij}^k$ , где  $i, j, k = 1, 2$ .

Умножим скалярно каждое из равенств (1) сначала на вектор  $\vec{r}_u$ , а затем на вектор  $\vec{r}_v$ . С учетом формул (3) § 57 получим три системы уравнений:

$$\begin{cases} \gamma_{11}\Gamma_{11}^1 + \gamma_{12}\Gamma_{11}^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu}, \\ \gamma_{21}\Gamma_{11}^1 + \gamma_{22}\Gamma_{11}^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uu}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}\Gamma_{12}^1 + \gamma_{12}\Gamma_{12}^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uv}, \\ \gamma_{21}\Gamma_{12}^1 + \gamma_{22}\Gamma_{12}^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{uv}; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}\Gamma_{22}^1 + \gamma_{12}\Gamma_{22}^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vv}, \\ \gamma_{21}\Gamma_{22}^1 + \gamma_{22}\Gamma_{22}^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_{vv}. \end{cases} \quad (8)$$

Система (6) есть система двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $\Gamma_{11}^1$  и  $\Gamma_{11}^2$ . Покажем, что правые части этих уравнений

нам известны. В самом деле, мы имеем  $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\partial r_u^2}{\partial u}$ , и, значит,

$$\vec{r}_u \vec{r}_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial u}. \quad (9)$$

Далее находим  $\vec{r}_v \vec{r}_{uu} = \frac{\partial(\vec{r}_v \vec{r}_u)}{\partial u} - \vec{r}_u \vec{r}_{uv}$ . Но  $\vec{r}_u \vec{r}_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v}(\vec{r}_u^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v}$ , и предыдущая формула принимает вид:

$$\vec{r}_v \vec{r}_{uu} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial v}. \quad (10)$$

Из равенств (9), (10) мы заключаем, что правые части уравнений (6) выражаются через производные от коэффициентов первой квадратичной формы. То же утверждение справедливо и для правых частей уравнений (7) и (8).

Так как поверхность  $F$  нам дана, то мы можем найти ее первую квадратичную форму и, следовательно, будем знать правые части в системах уравнений (6), (7), (8). Определитель каждой из этих систем есть  $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$  и, как уже отмечалось выше, отличен от нуля. Решая эти системы, найдем все коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k$ .

Когда точка  $M$  описывает поверхность  $F$ , репер  $R_M$  перемещается по этой поверхности. Учитывая это, его называют *подвижным репером* поверхности. Формулы (1), (2) называют *деривационными формулами подвижного репера  $R_M$  поверхности  $F$* . Коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k$  называются *символами Кристоффеля<sup>1</sup> второго рода* (символами Кристоффеля первого рода называют правые части уравнений в системах (6), (7), (8)).

Выше было показано, что символы Кристоффеля второго рода  $\Gamma_{ij}^k$  выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. Поэтому их можно использовать при изучении внутренней геометрии поверхности.

## § 62. Теорема Гаусса. Геодезическая кривизна линии на поверхности

1. Следующая теорема является одной из основных теорем внутренней геометрии поверхности. Она называется теоремой Гаусса<sup>2</sup>.

**Теорема.** *Полная кривизна гладкой поверхности класса  $C^k$  ( $k \geq 3$ ) выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.*

□ Пусть  $F$  — данная поверхность, определяемая уравнением  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Деривационные формулы (1), (2) § 61 для подвижного репера  $R_M$  выполняются в каждой точке этой поверхности. Значит, они являются тождествами на поверхности и их можно дифференцировать по переменным  $u$  и  $v$ . Дифференцируя первое из уравнений (1) § 61 по  $v$  и учитывая формулы (3), получим:

<sup>1</sup> Э. Б. Кристоффель (1829—1900) — немецкий математик, известен работами по дифференциальной геометрии и теории инвариантов.

<sup>2</sup> К. Ф. Гаусс (1777—1855) — немецкий математик, астроном, геодезист; один из создателей высшей геодезии и дифференциальной геометрии как самостоятельной научной дисциплины. Получил существенные результаты по теории чисел и алгебре.

$$\vec{r}_{uvv} = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \vec{r}_u + \Gamma_{11}^1 \vec{r}_{uv} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \vec{r}_v + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_{vv} + \frac{\partial b_{11}}{\partial v} \vec{n} + b_{11} \vec{n}_v.$$

Подставив сюда значения  $\vec{r}_{uv}$ ,  $\vec{r}_{vv}$ ,  $\vec{n}_v$  из дериационных формул, получаем разложение вектора  $\vec{r}_{uvv}$  по векторам подвижного репера  $R_M$ . Обозначим коэффициенты этого разложения коротко через  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  и  $\Lambda_3$ :

$$\vec{r}_{uvv} = \Lambda_1 \vec{r}_u + \Lambda_2 \vec{r}_v + \Lambda_3 \vec{n}.$$

Аналогично, дифференцируя вторую из формул (1) § 61 по  $u$ , получаем:

$$\vec{r}_{uvu} = \Lambda'_1 \vec{r}_u + \Lambda'_2 \vec{r}_v + \Lambda'_3 \vec{n}.$$

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что коэффициенты  $\Lambda_2$  и  $\Lambda'_2$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + b_{11} \alpha_2^2; \\ \Lambda'_2 &= \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + b_{12} \alpha_1^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Но  $\vec{r}_{uvv} = \vec{r}_{uvu}$  (независимость результата частного дифференцирования от порядка дифференцирования в случае непрерывности частных производных, что здесь имеет место). Поэтому  $\Lambda_1 = \Lambda'_1$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda'_2$  и  $\Lambda_3 = \Lambda'_3$ . Из формул (1) получаем:

$$\begin{aligned} b_{11} \alpha_2^2 - b_{12} \alpha_1^2 &= \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \\ &\quad - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая системы уравнений (4), (5) § 61, находим:

$$\alpha_2^2 = \frac{-\gamma_{11} b_{22} + \gamma_{12} b_{12}}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \quad \alpha_1^2 = \frac{-\gamma_{11} b_{12} + \gamma_{12} b_{11}}{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2}.$$

Подставив эти значения в левую часть равенства (2), мы приведем эту часть к виду  $-\gamma_{11} K$ , где  $K$  — полная кривизна поверхности  $F$  в точке  $M$ . Тогда формула (2) принимает вид:

$$K = \frac{1}{\gamma_{11}} \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^2 \right).$$

Мы доказали, что полная кривизна  $K$  поверхности  $F$  выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. ■

**З а м е ч а н и е.** Полученную формулу для вычисления полной кривизны поверхности с помощью только коэффициентов первой квадратичной формы можно записать короче. Вводя обозначения  $\frac{\partial}{\partial u} = \partial_1$ ,  $\frac{\partial}{\partial v} = \partial_2$  и применяя сокращенные обозначения суммирования, мы запишем формулу так:  $K = \frac{1}{\gamma_{11}} (\Gamma_{11}^k \Gamma_{2k}^2 - \Gamma_{12}^k \Gamma_{1k}^2 - \partial_1 \Gamma_{21}^2 + \partial_2 \Gamma_{11}^2)$ .

Здесь мы учли, что  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . Если мы введем принятые в современной геометрии

обозначения  $\frac{1}{2}(\Gamma_{11}^k \Gamma_{2k}^2 - \Gamma_{12}^k \Gamma_{1k}^2) = \Gamma_{11}^k \Gamma_{2jk}^2$ ,  $\frac{1}{2}(\partial_1 \Gamma_{21}^2 - \partial_2 \Gamma_{11}^2) = \partial_{11} \Gamma_{21}^2$ , то окончательно получим:

$$K = \frac{2}{\gamma_{11}} (\Gamma_{11}^k \Gamma_{2jk}^2 - \partial_{11} \Gamma_{21}^2).$$

2. Зададим на поверхности  $F$  гладкую линию  $\gamma$  уравнениями  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$ , где  $s$  — длина дуги. Вектор кривизны  $k\vec{v}$  линии  $\gamma$  в ее точке  $M$  выражается формулой (7) § 58. Если в эту формулу подставить значения  $\vec{r}_{uu}$ ,  $\vec{r}_{uv}$ ,  $\vec{r}_{vv}$  из формул (1) § 61, то ее можно записать в виде

$$k\vec{v} = \vec{k}_T + \vec{k}_N, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{k}_T = & \left( \Gamma_{11}^1 \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2u}{ds^2} \right) \vec{r}_u + \\ & + \left( \Gamma_{11}^2 \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2v}{ds^2} \right) \vec{r}_v, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\vec{k}_N = \left( b_{11} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + b_{22} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 \right) \vec{n}. \quad (5)$$

Таким образом, вектор  $k\vec{v}$  кривизны линии  $\gamma$  в точке  $M$  разложен на две составляющие: а) вектор  $\vec{k}_T$ , принадлежащий касательному векторному подпространству  $T_M$ ; б) вектор  $\vec{k}_N$ , параллельный нормали к поверхности в точке  $M$ .

Вектор  $\vec{k}_T$  называется *вектором геодезической кривизны* линии  $\gamma$  в точке  $M$ . Он ортогонален вектору касательной  $\vec{\tau}$  к линии  $\gamma$  в точке  $M$  (так как  $k\vec{v} \perp \vec{\tau}$  и  $\vec{k}_N \perp \vec{\tau}$ ). Следовательно, вектор  $\vec{k}_T$  коллинеарен вектору  $\vec{g} = [\vec{\tau}, \vec{n}]$ , и мы имеем:

$$\vec{k}_T = k_g \vec{g}. \quad (6)$$

Число  $k_g$  называется *геодезической кривизной* линии  $\gamma$  в точке  $M$ . Из формулы (6), учитывая, что  $\vec{g}$  — единичный вектор, находим  $|k_g| = |\vec{k}_T|$ . Так как символы Кристоффеля второго рода  $\Gamma_{ij}^k$  выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные, то из полученного равенства и равенства (4) следует важный вывод: *геодезическая кривизна  $k_g$  линии  $\gamma$  выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $F$  и их производные* (предполагается, конечно, что уравнения  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$  линии  $\gamma$  даны).

Мы замечаем, что в правой части формулы (5) коэффициентом при векторе  $\vec{n}$  служит нормальная кривизна  $k_n$  линии  $\gamma$  в точке  $M$  (см. § 58, формула (10)). Поэтому формулу (3) можно записать в виде

$$k\vec{v} = k_g \vec{g} + k_n \vec{n}. \quad (7)$$

## § 63. Изометрические поверхности.

### Изгибание поверхности

1. Пусть  $F$  и  $F'$  — гладкие поверхности класса  $C^k (k \geq 3)$  а  $f: F \rightarrow F'$  — биективное отображение. Если  $u, v$  — криволинейные координаты на поверхности  $F$ , а  $\alpha, \beta$  — криволинейные координаты на поверхности  $F'$ , то отображение  $f$  может быть задано уравнениями вида  $\alpha = \alpha(u, v)$ ,  $\beta = \beta(u, v)$ .

Рассмотрим на поверхности  $F$  координатную линию  $u$  (на которой  $v = v_0 = \text{const}$ ). В отображении  $f$  эта линия перейдет в определенную линию  $\gamma' \subset F'$ , которая определяется на этой поверхности уравнениями  $\alpha = \alpha(u, v_0)$ ,  $\beta = \beta(u, v_0)$ . Линию  $\gamma'$  мы назовем линией  $u$  на поверхности  $F'$ .

Таким образом, семейство линий  $u$  на поверхности  $F$  перейдет в отображении  $f$  в семейство линий  $u$  на поверхности  $F'$ . Аналогично семейство линий  $v$  на поверхности  $F$  перейдет в этом отображении в семейство линий  $v$  на поверхности  $F'$ .

Теперь на поверхности  $F'$  мы имеем две параметризации: старую параметризацию при помощи криволинейных координат  $\alpha, \beta$  и новую параметризацию при помощи криволинейных координат  $u, v$  (эта параметризация порождена отображением  $f$ ). Мы будем предполагать, что замена старой параметризации  $\alpha, \beta$  на новую  $u, v$  на поверхности  $F'$  является допустимой (см. § 55, п. 3).

Параметризацию поверхностей  $F$  и  $F'$  при помощи криволинейных координат  $u$  и  $v$  назовем *общей относительно отображения  $f$* . Заметим, что если точка  $M$  имеет координаты  $u, v$  на поверхности  $F$ , то точка  $M' = f(M) \in F'$  имеет те же координаты  $u, v$  в общей относительно  $f$  параметризации поверхности  $F'$ .

2. Гладкие поверхности  $F$  и  $F'$  называются *изометричными*, если существует биективное отображение  $f: F \rightarrow F'$ , сохраняющее длину любой гладкой дуги  $\gamma \subset F$ . При этом отображение  $f$  называется *изометрией*.

Следующая теорема является основной в геометрии изометричных поверхностей.

**Т е о р е м а.** *Две гладкие поверхности изометричны тогда и только тогда, когда они допускают такие параметризации, при которых в точках этих поверхностей с одинаковыми криволинейными координатами равны соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм.*

□ Пусть  $F$  и  $F'$  — изометричные поверхности и  $f: F \rightarrow F'$  — изометрия. Рассмотрим на поверхности  $F$  какую-либо параметризацию при помощи криволинейных координат  $u, v$ . Тогда на поверхности  $F'$  возникает общая относительно отображения  $f$  параметризация  $u, v$ .

Произвольную гладкую линию  $\gamma \subset F$  можно задать уравнениями  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ ,  $t \in I$ . При этом линия  $\gamma' = f(\gamma) \subset F'$  определяется теми же уравнениями. Возьмем число  $\alpha \in I$ , для которого существует  $t \in I$ ,  $t > \alpha$ . Так как отображение  $f$  — изометрия, то оно сохраняет длину любой гладкой дуги, и потому (см. § 57, формула (8))

$$\int_{\alpha}^t \sqrt{\gamma_{11}(\dot{u})^2 + 2\gamma_{12}\dot{u}\dot{v} + \gamma_{22}(\dot{v})^2} dt = \int_{\alpha}^t \sqrt{\gamma'_{11}(\dot{u})^2 + 2\gamma'_{12}u\ddot{v} + \gamma'_{22}(\dot{v})^2} dt, \quad (1)$$

где  $\gamma_{ij}$  — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $F$ , а  $\gamma'_{ij}$  — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $F'$ .

Так как равенство (1) справедливо при любом  $t$  (из некоторого промежутка  $I_0 \subset I$ ), то справедливо равенство

$$\gamma_{11}(\dot{u})^2 + 2\gamma_{12}\dot{u}\dot{v} + \gamma_{22}(\dot{v})^2 = \gamma'_{11}(\dot{u})^2 + 2\gamma'_{12}u\ddot{v} + \gamma'_{22}(\dot{v})^2.$$

Но линия  $\gamma$  произвольная, поэтому последнее равенство должно выполняться при любых  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$ . Следовательно,

$$\gamma_{11} = \gamma'_{11}, \quad \gamma_{12} = \gamma'_{12}, \quad \gamma_{22} = \gamma'_{22}. \quad (2)$$

Обратно: пусть гладкие поверхности  $F$  и  $F'$  допускают общую параметризацию  $u, v$ , такую, что в любой точке  $M(u, v) \in F$  с криволинейными координатами  $u, v$  и в точке  $M'(u, v) \in F'$  с теми же криволинейными координатами выполняются равенства (2).

Рассмотрим биективное отображение  $f: F \rightarrow F'$  по закону  $M(u, v) \mapsto M'(u, v)$ . Ясно, что для любой гладкой линии  $\gamma \subset F$  и ее образа  $f(\gamma) \subset F'$  будет иметь место формула (1). Следовательно, отображение  $f$  сохраняет длину любой гладкой дуги, лежащей на поверхности  $F$ , и потому является изометрией. ■

*С л е д с т в и е.* Если две гладкие поверхности  $F$  и  $F'$  изометричны, то соответствующие точки  $M$  и  $M'$  при изометрии  $f: F \rightarrow F'$  принадлежат одному и тому же типу, т. е. они обе являются либо эллиптическими, либо гиперболическими, либо параболическими.

В самом деле, в общей по отображению  $f$  системе криволинейных координат в соответствующих точках  $M$  и  $M'$  поверхностей  $F$  и  $F'$  выполняются равенства (2). Но тогда по теореме Гаусса в этих точках равны полные кривизны  $K$  и  $K'$ . Отсюда и вытекает сформулированное в следствии утверждение (см. § 59, п. 4).

Из этого следствия мы заключаем, что две произвольно взятые гладкие поверхности в общем случае не изометричны. Например, однополостный гиперboloид (все его точки гиперболические) и эллиптический цилиндр (все его точки параболические) не изометричны.

Доказанная теорема позволяет в ряде случаев легко установить изометричность поверхностей. Рассмотрим пример.

Пусть в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  даны две поверхности  $F$  и  $F'$  параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} F: x &= \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = v; \\ F': x &= u, \quad y = v, \quad z = 0, \end{aligned}$$

где  $(u, v)$  определены в области  $G$ , заданной неравенствами  $-\infty < u < \infty, 0 \leq v < 2\pi$ .

Поверхности  $F$  и  $F'$  являются гладкими поверхностями класса  $C^\infty$ , так как в области  $G$  правые части их уравнений имеют непрерывные частные производные любого порядка и в каждой точке этой области выполняется условие (2) § 55.

Исключив параметр  $u$  из первых двух уравнений поверхности  $F$ , получаем ее уравнение в системе  $Oxyz$ :  $x^2 + y^2 = 1$ . Таким образом,  $F$  — цилиндрическая поверхность вращения радиуса 1 с осью  $Oz$ . Так как для всех точек поверхности  $F'$  имеем  $z = 0$ , то эта поверхность является частью координатной плоскости  $Oxy$  (она не совпадает с координатной плоскостью  $Oxy$ , так как, например, точка  $(1, 3\pi, 0)$  этой плоскости не принадлежит поверхности  $F'$ ).

По формулам (3) § 57 найдем коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей  $F$  и  $F'$ :

$$\gamma_{11} = 1, \gamma_{12} = 0, \gamma_{22} = 1; \gamma'_{11} = 1, \gamma'_{12} = 0, \gamma'_{22} = 1.$$

Итак, выполняются равенства (2), поэтому по доказанной теореме поверхности  $F$  и  $F'$  изометричны.

Мы доказали, что *цилиндрическая поверхность вращения изометрична поверхности, которая является частью плоскости*.

Точно так же доказывается, что коническая поверхность вращения (без вершины), заданная параметрическими уравнениями  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u$ , изометрична поверхности, заданной уравнениями  $x = \sqrt{2} u \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2} u \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, z = 0$ , которая является частью координатной плоскости  $Oxy$ .

3. Введем понятие *изгибания* поверхностей. Пусть существует однопараметрическое семейство попарно изометричных поверхностей  $\Phi_i$ , непрерывно зависящих от параметра  $t$ . Если  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — две поверхности этого семейства, соответствующие параметрам  $t_1$  и  $t_2$ , то говорят, что каждая из поверхностей  $\Phi_1, \Phi_2$  получена *изгибанием* другой или *наложима* на другую. Поверхность  $\Phi$  называется *изгибаемой*, если она наложима на некоторую другую поверхность. Для того, чтобы получить наглядное представление об изгибании поверхностей, представим себе, что поверхность  $\Phi$  реализована в виде гибкой нерастяжимой пленки. Если ее деформировать, то получим новые поверхности  $\Phi_i$ , каждая из которых, очевидно, изометрична поверхности  $\Phi$ . Если, например,  $\Phi_1$  — одна из них, то она получена изгибанием поверхности  $\Phi$  или  $\Phi_1$  наложима на поверхность  $\Phi$ .

Можно показать, что гладкие поверхности изгибаемы «в малом» (т. е. изгибаемы содержащиеся в них гладкие элементарные поверхности достаточно малого размера). Однако существуют поверхности, неизгибаемые «в целом» (так, вся сфера неизгибаема). В дифференциальной геометрии обычно рассматривают изгибание (и наложимость) «в малом».

Если поверхность  $\Phi_1$  получена изгибанием поверхности  $\Phi_2$ , то эти поверхности изометричны. Поэтому по теореме п. 2 они допускают такие параметризации, при которых в точках с одинаковыми криволинейными координатами равны соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм. Отсюда мы заключаем, что при изгибании поверхности выполняются следующие свойства.

1°. Сохраняется длина любой гладкой дуги на поверхности.

2°. Сохраняются углы между линиями на поверхности и площадь поверхности.

3°. Сохраняется полная кривизна поверхности.

4°. Сохраняется геодезическая кривизна любой гладкой линии на поверхности.

4. В качестве примера изгибания поверхностей рассмотрим однопараметрическое семейство так называемых поверхностей касательных.

Возьмем в пространстве гладкую линию  $\gamma$ , кривизна которой ни в одной точке не равна нулю. Ее можно задать векторным уравнением

$$\vec{p} = \vec{p}(\sigma),$$

где  $\sigma$  — длина дуги линии  $\gamma$ . Пусть  $PT$  — касательная к линии  $\gamma$  в точке  $P$  (рис. 201) и  $F$  — объединение точек всех таких касательных, когда точка  $P$  описывает линию  $\gamma$ . Направляющим вектором касательной  $PT$  является вектор  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{p}}{d\sigma}$ . Точку  $M \in PT$  можно

задать ее радиус-вектором  $\vec{r} = \vec{p} + v\vec{\tau}$ , который, следовательно, является векторной функцией двух переменных  $\sigma$  и  $v$ . Находим:

$$\vec{r}_\sigma = \vec{\tau} + vk\vec{v}, \quad \vec{r}_v = \vec{\tau}. \quad (3)$$

Отсюда

$$[\vec{r}_\sigma, \vec{r}_v] = vk[\vec{v}, \vec{\tau}]. \quad (4)$$

По условию  $k \neq 0$ , поэтому из равенства (4) заключаем, что  $[\vec{r}_\sigma, \vec{r}_v] = \vec{0}$  тогда и только тогда, когда  $v = 0$ , т. е. когда точка  $M$  совпадает с точкой  $P$ . Если же точка  $M$  (лежащая на касательной  $PT$  к линии  $\gamma$  в точке  $P$ ) отлична от точки  $P$ , то  $[\vec{r}_\sigma, \vec{r}_v] \neq \vec{0}$ .

Таким образом, фигура  $F \setminus \gamma$  является гладкой поверхностью. Однако принято рассматривать всю фигуру  $F$  и называть ее *поверхностью касательных*, а линию  $\gamma$  — *ребром возврата* этой поверхности.

Используя равенства (3), находим:

$$\gamma_{11} = 1 + k^2v^2, \quad \gamma_{12} = 1, \quad \gamma_{22} = 1. \quad (5)$$

Мы видим, что в коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $F$  входит кривизна  $k$  ребра возврата, но не входит кручение  $\kappa$ . Значит, если взять две линии  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , у которых в соответствующих точках кривизны равны, а кручения разные, то касательные к этим линиям образуют две поверхности  $F_1$  и  $F_2$ , которые по доказанной теореме изометричны.

Это обстоятельство позволяет получить однопараметрическое семейство поверхностей касательных, каждые две из которых изометричны. Возьмем функции  $k = k(\sigma)$  и  $\kappa = \kappa(\sigma, t)$ , где  $t$  — параметр, изменяющийся в некотором промежутке  $I$ . Предполагается, что

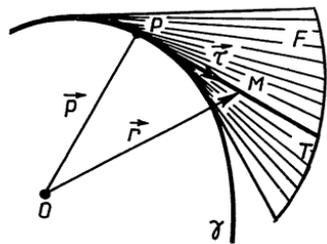


Рис. 201

$k(\sigma) > 0$ , а  $\kappa(\sigma, t)$  непрерывна по  $t$ . Для каждого значения  $t_1 \in I$  рассмотрим линию  $\gamma_1$  с кривизной  $k(\sigma)$  и кручением  $\kappa(\sigma, t_1)$  и поверхность касательных с ребром возврата  $\gamma_1$ . При непрерывном изменении параметра  $t$  мы получим однопараметрическое семейство  $F_t$  поверхностей, изометричных между собой.

Таким образом, поверхность касательных является изгибаемой поверхностью: каждые две поверхности семейства  $F_t$  наложимы друг на друга.

Зададим функцию  $\kappa(\sigma, t)$  так, чтобы при  $t \rightarrow t_0 \in I$  иметь  $\kappa(\sigma, t) \rightarrow 0$  (например,  $\kappa(\sigma, t) = t \cdot \kappa_1(\sigma) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ ). Тогда в пределе  $\kappa = 0$  мы получим плоскую линию. Ее касательные лежат в плоскости линии и образуют некоторую плоскую фигуру. Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности будут иметь тот же вид (5). Следовательно, *любая поверхность касательных изометрична некоторой фигуре на плоскости*. Другими словами, любая поверхность касательных наложима на некоторую часть плоскости. В п. 2 мы доказали, что таким же свойством обладают конические и цилиндрические поверхности<sup>1</sup>. Оказывается, что этими поверхностями и исчерпываются все поверхности, которые наложимы на некоторую часть плоскости. Учитывая это, поверхности касательных, конические и цилиндрические поверхности называют *развертывающимися поверхностями*: каждую из них можно наложить на некоторую часть плоскости или, как говорят, «развернуть на плоскость».

## § 64. Геодезические линии

1. Пусть  $F$  — гладкая поверхность класса  $C^k (k \geq 2)$ . Гладкая линия  $\gamma \subset F$  называется *геодезической*, если в каждой ее точке геодезическая кривизна равна нулю:  $k_g = 0$ .

Из формулы (7) § 62 следует, что  $k_g = 0$  тогда и только тогда, когда  $k\vec{v} \parallel \vec{n}$ . Но  $k\vec{v}$  — вектор кривизны линии  $\gamma$ , поэтому в точке  $M$  он параллелен соприкасающейся плоскости линии  $\gamma$  в этой точке, а  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $F$  в этой точке. Следовательно, геодезическая линия характеризуется тем свойством, что в каждой ее точке соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности в этой точке. Так, большие окружности на сфере являются геодезическими линиями.

Докажем следующую теорему о геодезических линиях поверхности.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $F$  — гладкая поверхность класса  $C^k (k \geq 2)$ . Через каждую точку  $M_0 \in F$  по каждому направлению на поверхности в достаточно малой окрестности точки  $M_0$  проходит геодезическая линия, и притом единственная.

<sup>1</sup> Напомним, что мы доказали это утверждение только для цилиндрических и конических поверхностей вращения, но оно верно и для любых цилиндрических и конических поверхностей.

□ Пусть  $\gamma$  — гладкая линия на данной поверхности  $F$ , заданная уравнениями

$$u = u(s), \quad v = v(s). \quad (1)$$

Как показывает формула (6) § 62, эта линия является геодезической тогда и только тогда, когда  $\vec{k}_\tau = \vec{0}$ , т. е. когда равны нулю координаты вектора  $\vec{k}_\tau$ . Из формулы (4) § 62 находим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, линия  $\gamma \subset F$ , задаваемая уравнениями (1), будет геодезической только в том случае, когда функции  $u(s)$  и  $v(s)$  являются решением системы (2) дифференциальных уравнений второго порядка. В этой системе неизвестными как раз и являются функции  $u(s)$  и  $v(s)$ .

Так как  $F$  — гладкая поверхность класса  $C^k (k \geq 2)$ , то функции  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v) (i, j, k = 1, 2)$  непрерывны в области  $G$  изменения переменных  $u$  и  $v$ . Следовательно, в системе (2) коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k$  непрерывны в некоторой области  $G$ . Как доказывают в теории дифференциальных уравнений, система (2) в некотором достаточно малом промежутке изменения переменной  $s$  имеет решение  $u(s)$ ,  $v(s)$ , и притом единственное, при заданных начальных условиях:

$$u \Big|_{s=s_0} = u_0, \quad v \Big|_{s=s_0} = v_0, \quad \frac{du}{ds} \Big|_{s=s_0} = a, \quad \frac{dv}{ds} \Big|_{s=s_0} = b, \quad (3)$$

где  $(u_0, v_0) \in G$  и хоть одно из чисел  $a, b$  отлично от нуля.

Геометрический смысл этих начальных условий состоит в следующем. Произвольно заданной точке  $(u_0, v_0) \in G$  соответствует точка  $M_0 \in F$ , числа  $a$  и  $b$  определяют вектор касательной к линии  $\gamma: u = u(s), v = v(s)$  в точке  $M_0$  (см. § 58, формула (6)). Отсюда и следует справедливость теоремы. ■

**З а м е ч а н и е.** Если на поверхности  $F$  лежит линия  $\gamma$ , содержащаяся в некоторой прямой, то в каждой точке  $M \in \gamma$  кривизна этой линии равна нулю:  $k = 0$ . Тогда из формулы (3) § 62 получим  $\vec{k}_\tau = \vec{0}$  в каждой точке  $M \in \gamma$ . Следовательно, линия  $\gamma$  геодезическая на поверхности. В частности, прямые линии на плоскости являются геодезическими линиями. Из доказанной теоремы следует, что других геодезических линий на плоскости не существует. Точно так же через каждую точку сферы по любому направлению на сфере проходит, и притом одна, геодезическая линия. Но через каждую точку сферы по любому направлению проходит единственная большая окружность, которая также является геодезической линией. Следовательно, геодезическими линиями на сфере являются только большие окружности.

2. Теперь мы покажем, что если  $F$  — гладкая поверхность класса  $C^k (k \geq 2)$ , то в достаточно малой окрестности каждой точки  $M \in F$  можно привести первую квадратичную форму поверхности к некоторому специальному виду. Пусть поверхность  $F_0 \subset F$  является элементарной. Сеть на поверхности  $F_0$  называется *полугеодезической*, если она ортогональна и одно семейство ее линий состоит из геодезических.

Пусть  $M$  — точка на поверхности  $F$ . На некоторой поверхности  $F_0$ , такой, что  $M \in F_0 \subset F$ , можно построить полугеодезическую сеть. Для этого через точку  $M$  проведем на поверхности  $F$  гладкую линию  $\gamma$ . В качестве одного семейства линий сети возьмем геодезические, ортогональные линии, а в качестве линий другого семейства примем ортогональные траектории этого семейства геодезических линий (т. е. такие линии, которые пересекают каждую из построенных геодезических под прямым углом). В частности, линия  $\gamma$  будет одной из линий этого семейства. Оба эти семейства и образуют полугеодезическую сеть.

Так как линии каждого из названных семейств получаются с помощью решения соответствующих систем дифференциальных уравнений, то построенная сеть будет определена лишь на некоторой элементарной поверхности  $F_0 \subset F$ , содержащей точку  $M$  (рис. 202).

Пусть на поверхности  $F_0$  координатная сеть  $u, v$  полугеодезическая, причем линии  $u$  геодезические. Уравнения (1) для этих линий имеют вид  $u = s, v = v_0$ , и так как  $\frac{dv}{ds} = 0, \frac{d^2v}{ds^2} = 0$ , но  $\frac{du}{ds} \neq 0$ , то из второго уравнения системы (2) находим  $\Gamma_{11}^2 = 0$ . Второе из уравнений (6) § 61 в силу формулы (10) того же параграфа имеет вид:

$$\gamma_{21}\Gamma_{11}^1 + \gamma_{22}\Gamma_{11}^2 = \frac{\partial\gamma_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial\gamma_{11}}{\partial v}. \quad (4)$$

В нашем случае  $\Gamma_{11}^2 = 0$  и к тому же  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$  (так как координатная сеть ортогональна). Поэтому из равенства (4) следует:  $\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial v} = 0$ . Значит,  $\gamma_{11}$  есть функция только переменной  $u$ :  $\gamma_{11} = \gamma_{11}(u)$ .

Первая квадратичная форма поверхности  $F_0$  имеет вид:

$$ds^2 = \gamma_{11}(u)du^2 + \gamma_{22}(u, v)dv^2.$$

Обозначим  $\sqrt{\gamma_{11}(u)} du = d\bar{u}$ , т. е.  $\bar{u} = \int \sqrt{\gamma_{11}(u)} du + c$ . Тогда  $ds^2 = d\bar{u}^2 + \gamma_{22}dv^2$ . Считая такую замену уже сделанной, мы заключаем, что если координатная сеть на поверхности  $F_0 \subset F$  полугеодезическая и линии  $u$  геодезические, то первая квадратичная форма поверхности имеет вид:

$$ds^2 = d\bar{u}^2 + \gamma_{22}dv^2. \quad (5)$$

3. Пусть  $F$  — гладкая поверхность и  $M_1, M_2$  — две различные

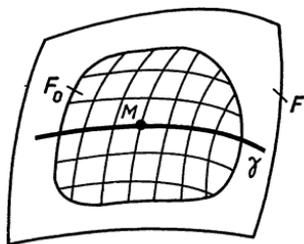


Рис. 202

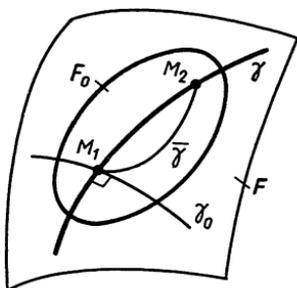


Рис. 203

точки поверхности (рис. 203). Обозначим через  $\alpha(M_1, M_2)$  множество длин гладких дуг, лежащих на поверхности и имеющих своими концами точки  $M_1, M_2$ . Это множество ограничено снизу (например, нулем). Значит, оно имеет точную нижнюю грань, которая называется *расстоянием между точками  $M_1$  и  $M_2$  на поверхности  $F$* . Это расстояние обозначается так:  $\rho_F(M_1, M_2)$ . Значит, по определению  $\rho_F(M_1, M_2) = \inf \alpha(M_1, M_2)$ .

Следующая теорема выражает важное свойство геодезической линии

**Теорема 2.** Если точки  $M_1, M_2$  лежат на геодезической линии  $\gamma$  поверхности  $F$  и расстояние  $\rho_F(M_1, M_2)$  достаточно мало, то это расстояние есть длина дуги  $M_1M_2$  геодезической линии  $\gamma$ .

□ На поверхности  $F$  проведем через точку  $M_1$  гладкую линию  $\gamma_0$ , ортогональную геодезической линии  $\gamma$  (рис. 203). С помощью линии  $\gamma_0$  построим на поверхности  $F$  в некоторой окрестности точки  $M_1$  полугеодезическую систему криволинейных координат так, как это описано выше. Обозначим через  $F_0$  элементарную поверхность, на которой эта сеть служит координатной сетью. Линия  $\gamma \cap F_0$  — одна из линий этой сети. Пусть  $\rho_F(M_1, M_2)$  настолько мало, что  $M_2 \in F_0$  и  $\rho_F(M_1, M_2) = \rho_{F_0}(M_1, M_2)$  (рис. 203). Рассмотрим произвольную гладкую дугу  $\bar{\gamma} \subset F_0$  с концами в точках  $M_1$  и  $M_2$ , заданную уравнениями  $u = u(t), v = v(t), a \leq t \leq b$ , так что при  $t = a$  получим точку  $M_1$ , а при  $t = b$  — точку  $M_2$ . Если  $\bar{s}$  — длина дуги  $\bar{\gamma}$ , то

$$\bar{s} = \int_a^b \sqrt{\dot{u}^2 + \gamma_{22}\dot{v}^2} dt \geq \int_a^b |\dot{u}| dt \geq \left| \int_a^b du \right| = |u(b) - u(a)|. \quad (6)$$

Пусть на линии  $\gamma$  (как одной из линий  $u$ ) точка  $M_1$  определяется значением координаты  $u = u_1$ , а точка  $M_2$  — значением  $u = u_2$ . Следовательно,  $u(a) = u_1, u(b) = u_2$  и формула (6) принимает вид:

$$\bar{s} \geq |u_2 - u_1|. \quad (7)$$

Так как система криволинейных координат  $u, v$  на поверхности  $F_0$  полугеодезическая, то первая квадратичная форма этой поверхности имеет вид (5). Для дифференциала  $ds_1$  длины дуги линии  $u$  получим  $ds_1^2 = du^2$ . Значит, длина дуги  $M_1M_2$  геодезической линии  $\gamma$ :

$s_1 = \left| \int_{u_1}^{u_2} du \right| = |u_2 - u_1|$ , и формулу (7) можно записать теперь так:  $\bar{s} \geq s_1$ . Так как  $\bar{\gamma}$  — произвольная гладкая дуга с концами в точках  $M_1$  и  $M_2$  на поверхности  $F_0$ , то из последнего равенства следует:  $\rho_{F_0}(M_1, M_2) = s_1$ , и, значит,  $\rho_F(M_1, M_2) = s_1$ . ■

Свойство геодезической линии, о котором говорится в этой теореме, и другое свойство, установленное в теореме 1 настоящего параграфа, позволяют заключить, что *геодезические линии на поверхности являются аналогом прямых линий на плоскости*.

## § 65. Дефект геодезического треугольника

1. Рассмотрим на гладкой поверхности  $F$  клетку  $F_0$ , граница которой состоит из  $n$  гладких дуг  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , образующих в общих концах внутренние углы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  (рис. 204).

Приведем без доказательства следующую замечательную теорему (теореме Гаусса — Бонне)<sup>1</sup>.

**Т е о р е м а 1.** Для клетки  $F_0 \subset F$  справедлива формула

$$\sum_{K=1}^n \int_{\gamma_K} K_g ds + \sum_{K=1}^n (\pi - \varphi_K) = 2\pi - \iint_{F_0} K d\sigma, \quad (1)$$

где  $K_g$  — геодезическая кривизна линии  $\gamma_K$ ,  $K$  — полная кривизна поверхности,  $d\sigma$  — элемент площади поверхности.

Рассмотрим случай, когда граница клетки  $F_0 \subset F$  состоит из трех геодезических дуг. Такая клетка называется *геодезическим треугольником* (рис. 205). Важное свойство этой фигуры выражает следующая теорема.

**Т е о р е м а 2.** Если во всех точках геодезического треугольника полная кривизна  $K$  имеет один и тот же знак или равна нулю, то сумма углов этого треугольника: а) больше  $\pi$  на поверхности, где  $K > 0$ ; б) меньше  $\pi$  на поверхности, где  $K < 0$ ; в) равна  $\pi$  на поверхности, где  $K = 0$ .

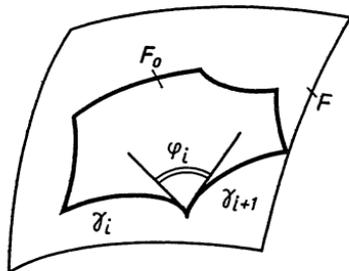


Рис. 204

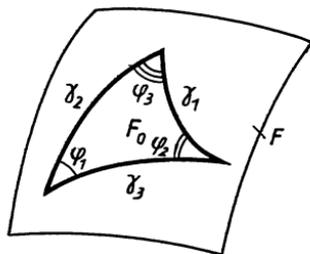


Рис. 205

<sup>1</sup> П. О. Бонне (1819—1892) — французский математик; основные его работы относятся к дифференциальной геометрии и механике.

□ Пусть  $F_0 \subset F$  — геодезический треугольник. Клетка  $F_0$  состоит из трех дуг  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , каждая из которых является геодезической линией (рис. 205). В этом случае в формуле (1) имеем  $n = 3, k_g = 0$ , поэтому формула принимает вид:

$$\sum_{k=1}^3 (\pi - \varphi_k) = 2\pi - \iint_{F_0} K d\sigma.$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi + \iint_{F_0} K d\sigma. \quad (2)$$

Если во всех точках геодезического треугольника имеем  $K > 0$ , то  $\iint_{F_0} K d\sigma > 0$ , и мы получим случай а) теоремы. Аналогично доказываются и случаи б) и в). ■

Число  $\delta(F_0) = \pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$  называется *дефектом* геодезического треугольника  $F_0$ . Формулу (2) можно записать так:

$$\delta(F_0) = - \iint_{F_0} K d\sigma. \quad (3)$$

2. Рассмотрим примеры геодезических треугольников на конкретных поверхностях.

**Пример 1.**  $F$  — сфера. Тогда  $K = \frac{1}{a^2}$ , где  $a$  — радиус сферы (см. § 60, п. 2). Следовательно, для *сферического треугольника*  $F_0$  (т. е. геодезического треугольника на сфере) формулу (3) запишем так:  $\delta(F_0) = - \frac{1}{a^2} \iint_{F_0} d\sigma = - \frac{1}{a^2} S(F_0)$ , где  $S(F_0)$  — площадь сферического треугольника.

Таким образом, формула (3) для сферического треугольника  $F_0$  принимает вид:

$$S(F_0) = -a^2 \delta(F_0), \text{ или } S(F_0) = a^2 \varepsilon(F_0), \quad (4)$$

где  $\varepsilon(F_0) = -\delta(F_0) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi$  — «избыток» сферического треугольника. Следовательно: а) дефект сферического треугольника отрицателен, т. е. сумма углов сферического треугольника больше  $\pi$ ; б) площадь сферического треугольника пропорциональна его «избытку».

**Пример 2.**  $F$  — псевдосфера. Здесь  $K = -\frac{1}{a^2}$ , где  $a = \text{const}$  (см. § 60, п. 2). Формулу (3) запишем так:  $\delta(F_0) = \frac{1}{a^2} \iint_{F_0} d\sigma = \frac{1}{a^2} S(F_0)$ , где  $S(F_0)$  — площадь геодезического треугольника на псевдосфере. Таким образом,

$$S(F_0) = a^2 \delta(F_0). \quad (5)$$

Следовательно: а) дефект геодезического треугольника на псевдосфере положителен, т. е. сумма углов такого треугольника меньше  $\pi$ ; б) площадь геодезического треугольника на псевдосфере пропорциональна его дефекту.

**Пример 3.**  $F$  — плоскость. Здесь  $F_0$  — обычный треугольник на плоскости. Так как  $K = 0$  (см. § 59, п. 4), то формула (3) принимает вид:  $\delta(F_0) = 0$ . Мы пришли к хорошо известной теореме: дефект треугольника на плоскости равен нулю, т. е. сумма углов треугольника равна  $\pi$ .

## § 66. Теорема об эйлеровой характеристике для гладкой поверхности, гомеоморфной сфере с $p$ ручками

1. Пусть  $F$  — гладкая поверхность, гомеоморфная сфере с  $p$  ручками ( $p \geq 0$ ). Следовательно,  $F$  является ориентируемым многообразием (см. § 41). Оказывается, эйлерову характеристику  $\chi(F)$  такой поверхности можно вычислить по ее полной кривизне.

**Теорема.** Если гладкая поверхность  $F$  гомеоморфна сфере с  $p$  ручками (где  $p \geq 0$ ), то ее эйлерова характеристика выражается формулой

$$\chi(F) = \frac{1}{2\pi} \iint_F K d\sigma, \quad (1)$$

где  $K$  — полная кривизна, а  $d\sigma$  — элемент площади поверхности.

□ Зададим какое-либо клеточное разложение поверхности  $F$ , в котором граница клетки является кусочно-гладкой кривой (все стороны клетки — гладкие дуги). Пусть клетка  $F_k$  содержит  $s_k$  вершин и, значит, столько же сторон, которые обозначим через  $\gamma_{k_1}, \gamma_{k_2}, \dots, \gamma_{k_{s_k}}$ . Через  $\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \dots, \varphi_{k_{s_k}}$  обозначим внутренние углы клетки  $F_k$  при соответствующих вершинах. Как обычно, через  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  мы будем обозначать соответственно число вершин, сторон и клеток в заданном клеточном разложении. По теореме Гаусса — Бонне для клетки  $F_k$  имеем:

$$\sum_{i=1}^{s_k} \int_{\gamma_{k_i}} k_g ds + \sum_{i=1}^{s_k} (\pi - \varphi_{k_i}) = 2\pi - \iint_{F_k} K d\sigma.$$

Напишем эти равенства для каждой клетки  $F_1, F_2, \dots, F_{\alpha_2}$  и просуммируем почленно. Учитывая, что  $\sum_{k=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{s_k} \int_{\gamma_{k_i}} k_g ds = 0$  (каждую дугу  $\gamma_{k_i}$

мы проходим дважды в противоположных направлениях, так как поверхность  $F$  ориентируема), мы получим:

$$\sum_{k=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{s_k} (\pi - \varphi_{k_i}) = 2\pi\alpha_2 - \iint_F K d\sigma. \quad (2)$$

Запишем левую часть этого равенства в виде  $\sum_{k=1}^{\alpha_2} \pi s_k - \sum_{k=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{s_k} \varphi_{k_i}$ .

Каждая сторона клеточного разложения поверхности  $F$  является стороной в точности двух клеток (многообразие  $F$  компактно и не имеет края), поэтому

$$\sum_{k=1}^{\alpha_2} \pi s_k = \pi \sum_{k=1}^{\alpha_2} s_k = 2\pi\alpha_1 \quad (\text{каждая сторона подсчитана дважды}).$$

Сумма  $\sum_{k=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{s_k} \varphi_{ki}$  есть сумма внутренних углов всех клеток. Так как

сумма внутренних углов при каждой вершине равна  $2\pi$ , то эта сумма равна  $2\pi\alpha_0$ . Таким образом, левая часть равенства (2) имеет вид:  $2\pi\alpha_1 + 2\pi\alpha_0$ .

Равенство (2) теперь запишется так:  $2\pi\alpha_1 - 2\pi\alpha_0 = 2\pi\alpha_2 - \iint_F K d\sigma$ , или  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2\pi} \iint_F K d\sigma$ . Это и есть формула (1). ■

2. Так как правая часть формулы (1) не зависит от клеточного разложения поверхности  $F$ , то из доказанной теоремы вытекает важный вывод (см. § 40, п. 2): *эйлерова характеристика гладкой поверхности, гомеоморфной сфере с  $r$  ручками, не зависит от выбора клеточного разложения поверхности.*

Применим доказанную теорему к сфере  $F$  радиуса  $a$ . В этом случае  $K = \frac{1}{a^2}$ , поэтому формула (1) принимает вид:

$$\chi(F) = \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{1}{a^2} d\sigma = \frac{1}{2\pi a^2} \iint_F d\sigma = \frac{S(F)}{2\pi a^2} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a^2} = 2.$$

Таким образом, независимо от выводов § 40 мы доказали, что эйлерова характеристика сферы равна 2.

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Глава IX

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ОБОСНОВАНИЯ  
ГЕОМЕТРИИ.  
ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ  
ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 67. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида

1. Первые сведения о геометрии были добыты цивилизациями Древнего Востока — в Египте, Вавилоне, Китае, Индии — в связи с развитием земледелия. Дошедшие до нас памятники древнейших культур Вавилона и Египта свидетельствуют, что в этих странах геометрия имела эмпирический характер и представляла собой собрание частных решений отдельных задач. Так, во II тысячелетии до н. э. египтяне умели точно вычислять площадь треугольника и объем четырехугольной усеченной пирамиды; площадь  $S$  круга радиуса  $R$  вычисляли по формуле  $S = \left(\frac{16}{9} R\right)^2$ , что дает для  $\pi$  достаточно точное значение:

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16\dots$$

В Вавилоне, как и в Египте, геометрия развивалась на основе практических задач измерений. Уже во II тысячелетии до н. э. вавилоняне знали так называемую теорему Пифагора. Отметим, что в математике Древнего Востока (Вавилон и Египет) мы не находим никаких доказательств, а только правила: «Делай так-то».

2. Геометрия в Древней Греции начала развиваться в VII—VI вв. до н. э. несомненно под сильным влиянием египтян. По преданию, отцом греческой математики является представитель так называемой милетской школы, знаменитый философ Фалес (640—548 гг. до н. э.) из греческого города-государства Милета. Согласно дошедшим до нас преданиям Фалесу принадлежат доказательства некоторых простейших предложений геометрии — свойств углов при основании равнобедренного треугольника, свойств вертикальных углов и некоторых других теорем. В дальнейшем геометрами Древней Греции были получены значительные результаты, охватывающие почти все содержание современных школьных курсов геометрии.

В философской школе Пифагора (около 570—471 гг. до н. э.) математика занимала господствующее положение. Считают, что последователи этой школы — пифагорейцы — открыли теорему о сумме углов треугольника, дали доказательство теоремы Пифагора, установили существование пяти типов правильных многогранников, существование несоизмеримых отрезков (их открыл ученик Пифагора — Гиппас).

Демокрит (около 470—370 гг. до н. э.) открыл теоремы об объемах пирамиды и конуса. Евдокс (около 410—356 гг. до н. э.) — создатель геометрической теории пропорций, заменявшей грекам теорию иррациональных чисел, которых греки не знали. Евдокс открыл также метод исчерпывания: «Если от величины  $A$  отнять  $\frac{1}{2} A$  или больше, с остатком проделать то же и т. д., то можно получить такую величину, которая меньше любой, наперед заданной». Этим методом Евдокс находит объемы пирамиды, конуса и шара. Ученик Евдокса — Менехм — открыл конические сечения, которые затем обстоятельно изучил Аполлоний (256—170 гг. до н. э.). Архимеду (287—212 гг. до н. э.) принадлежит открытие правил для вычисления площади поверхности шара и некоторых других фигур и объемов ряда тел. Он нашел приближение для числа  $\pi$  ( $\pi = \frac{22}{7} = 3,143\dots$ ).

Особой заслугой древнегреческих ученых является постановка задачи о построении системы геометрических знаний и решение ее в первом приближении. Задача эта была поставлена рядом древнегреческих философов, из которых в первую очередь следует указать Платона (около 429—348 гг. до н. э.) и особенно Аристотеля (384—322 гг. до н. э.). Аристотель — крупнейший философ древности, основатель формальной логики. Хотя он непосредственно и не занимался геометрией, но именно ему принадлежит четкое оформление идеи построения геометрии в виде цепи предложений, которые вытекают одно из другого на основе одних лишь правил логики.

К концу III в. до н. э. греки имели большой запас геометрических фактов и обладали методами их доказательств. В это время возникла задача собрать этот геометрический материал и расположить его в логическом порядке. Такую задачу пытались решать многие греческие авторы (Гиппократ, Федий и др.), но их сочинения не дошли до нашего времени и были забыты после появления «Начал» Евклида.

3. Евклид, один из крупнейших геометров древности, воспитанник школы Платона, жил в период приблизительно от 330 до 275 г. до н. э. в Египте, в Александрии. Подробные достоверные биографические сведения о Евклиде до нас не дошли. Известно, что расцвет его деятельности приходится на первые годы III в. до н. э. Составленные им «Начала» дают систематическое изложение начал геометрии, выполненное с таким большим мастерством, что многие века преподавание геометрии велось по этому сочинению.

«Начала» Евклида состоят из 13 книг (т. е. глав). Первые 6 книг содержат изложение планиметрии; в книгах I, III и IV даны известные нам из курса средней школы свойства треугольников, теория параллельных прямых, теорема Пифагора, свойства окружностей и вписанных и описанных многоугольников. В книге II даны в геометрической форме основные алгебраические тождества. В книге V изложена теория отношений по Евдоксу, а в книге VI — теория подобия фигур. Книги VII, VIII и IX посвящены арифметике в геометрическом изложении. В книге X дана теория несоизмеримых величин. Книги XI—XIII

посвящены основам стереометрии, причем вся XIII книга посвящена учению о правильных многогранниках.

Многое из того, что было известно по геометрии во времена Евклида (например, теория конических сечений, кривые высших порядков), не изложено в «Началах».

Каждая книга начинается с определения всех тех понятий, которые в ней встречаются. Так, в начале книги I даны 23 определения. Приведем первые семь из них.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Границы линии суть точки.
4. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы поверхности суть линии.
7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.

Затем Евклид приводит предложения, принимаемые без доказательства, которые он разделяет на постулаты и аксиомы.

### П о с т у л а т ы

I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.

II. И чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжать.

III. И чтобы от любого центра можно было описать окружность любого радиуса.

IV. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

### А к с и о м ы

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.

III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.

.....

VII. И совмещающиеся равны.

В чем заключается различие между постулатами и аксиомами, остается неясным; на этот счет существует много различных мнений, ни одно из которых не может быть признано окончательным.

Затем Евклид излагает теоремы геометрии, располагая их в такой последовательности, чтобы каждую теорему можно было доказать, используя только предыдущие предложения, постулаты и аксиомы.

## § 68. Критика системы Евклида

1. «Начала» Евклида сыграли огромную роль в истории математики и всей человеческой культуры. «Начала» переведены на все основные языки мира, после 1482 г. они выдержали около 500 изданий. На русском языке имеется несколько переводов «Начал» Евклида, последний из них выполнен проф. Мордухай-Болтовским<sup>1</sup>. «Начала» оказали исключительно большое влияние на дальнейшее развитие математики и на ее преподавание. Интересно отметить, что до начала XIX столетия (а в Англии до его середины) все учились математике по «Началам» Евклида.

2. Евклид первым поставил задачу обоснования геометрии, т. е. перечисления определений и аксиом, на основе которых можно развивать геометрию строго логическим путем. В этом историческая заслуга Евклида перед наукой. Логическое построение геометрии было проведено Евклидом для его времени чрезвычайно точно. В дальнейшем, на протяжении многих веков, строгость евклидовых доказательств признавалась образцом для подражания.

Однако если рассматривать изложение «Начал» с точки зрения современной математики, то надо признать его несовершенным. Прежде всего отметим, что основы, на которых строится все здание геометрии, не вполне удовлетворительны. Многие из определений неясны (например, определение прямой), в ряде случаев определения включают такие понятия, которые сами должны быть определены, например «длина», «ширина», «граница» и т. д. Не случайно, что ни одно из определений 1—7, приведенных выше, не используется в доказательствах теорем и все они без всякого ущерба могут быть опущены.

Что же касается постулатов и аксиом, то содержащиеся в них утверждения существенны и составляют основу при доказательстве геометрических предложений. Однако легко заметить, что список аксиом и постулатов является недостаточным, чтобы на его основе можно было построить геометрию строго логическим путем. Приведем несколько примеров.

а) В геометрии мы часто пользуемся такими понятиями, которые выражаются следующими словами: «точка прямой лежит между двумя другими ее точками», «две точки лежат по одну (по разные) стороны от прямой», «точка лежит внутри треугольника» и т. д. Постулаты Евклида не дают возможности обосновать эти понятия (на это обратил внимание Гаусс), поэтому при доказательстве той или иной теоремы, когда мы пользуемся этими понятиями, мы вынуждены ссылаться на наглядные соображения, опираясь на чертеж.

б) По смыслу аксиомы VII равенство фигур у Евклида определяется с помощью движения. Между тем понятие движения не определено и свойства движений в аксиомах не перечислены. Правда, если учесть аксиому VII, то постулат IV можно понимать так: любые

<sup>1</sup> Подробный обзор «Начал» Евклида дан в гл. I книги В. Ф. Кагана «Основания геометрии» (М., 1949, т. I).

два прямых угла могут быть совмещены, т. е. существует движение, которое переводит один из этих углов в другой. Но этого еще недостаточно для обоснования учения о движениях.

в) Если одна из двух окружностей проходит через внутреннюю и внешнюю точки относительно другой окружности, то Евклид молчаливо предполагает, что эти окружности пересекаются. Точно так же предполагается, что прямая, проходящая через внутреннюю точку окружности, пересекает эту окружность. Несмотря на наглядную очевидность этих фактов, они должны быть доказаны (на это впервые обратил внимание Лейбниц). Но постулаты и аксиомы Евклида не дают возможности обосновать эти доказательства.

Таким образом, «Начала» Евклида не содержат безусловно логического обоснования геометрии.

3. Некоторые недостатки «Начал» Евклида были замечены учеными древности. Так, Архимед (287—212 гг. до н. э.) добавил аксиому (которую мы называем аксиомой Архимеда, см. § 72), играющую существенную роль в теории измерения длин, площадей и объемов. И после Архимеда делались попытки уточнить основные положения геометрии, однако на протяжении многих веков никто не добавил чего-либо существенно нового по сравнению с тем, что было сделано Евклидом. Интересно отметить, что очень немногие ставили перед собой задачу пополнения списка евклидовых постулатов. Основная задача, по мнению ученых, заключалась в том, чтобы свести систему постулатов и аксиом Евклида к минимуму. Было замечено, например, что IV постулат является лишним, так как равенство прямых углов может быть доказано так же строго, как и многие другие теоремы.

В этой связи особое место занимают исследования, связанные с пятым постулатом Евклида. Этот постулат играет существенную роль в евклидовой геометрии. На нем основана теория параллельных прямых и все связанные с ней разделы геометрии — подобие фигур, теоремы о сумме углов треугольника и выпуклых многоугольников, тригонометрия, теория площадей и объемов и т. д.

Отметим, что из всех постулатов и аксиом Евклида V постулат резко выделяется своей сложностью. В книге I «Начал» первые 28 предложений доказываются без ссылок на пятый постулат; видимо, Евклид пытался доказать как можно больше утверждений без ссылок на этот постулат. Указанные обстоятельства породили в течение более 2000 лет, прошедших после Евклида, многочисленные попытки доказать V постулат на основе остальных постулатов и аксиом Евклида (Прокл — V в. н. э.; Омар Хайям — 1048—1123 гг.; Валлис — XVII в.; Саккери и Ламберт — XVIII в.; Лежандр — 1752—1833 гг.). Обычно автор того или иного доказательства незаметно для себя опирался на некоторое допущение, которое не содержится в остальных аксиомах и постулатах и не вытекает из них. Мы не будем рассматривать эти ошибочные «доказательства». Отметим лишь, что многочисленные доказательства V постулата, несмотря на их несостоятельность, привели к положительным результатам, некоторые из которых мы рассмотрим в следующем параграфе.

## § 69. Пятый постулат Евклида

В этом и в последующих параграфах данной главы без особых оговорок предполагается, что все точки, прямые и другие геометрические фигуры лежат в одной плоскости.

1. Евклид так определяет параллельные прямые: *две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки*. Отметим, что без помощи V постулата можно доказать целый ряд теорем, в том числе три признака равенства треугольников и ряд других свойств треугольников. Особо выделим теорему о внешнем угле треугольника: *внешний угол треугольника больше любого его угла, с ним несмежного*. Пользуясь этой теоремой, без помощи V постулата докажем лемму, которая используется в дальнейшем изложении.

**Л е м м а 1.** *Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы (или соответственные углы) равны, то прямые не пересекаются.*

□ Пусть при пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей  $AB$  накрест лежащие углы равны (например,  $\angle 1 = \angle 2$  на рис. 206). Если допустить, что прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в некоторой точке  $P$ , то получим треугольник  $ABP$ , у которого один из углов при вершине  $A$  или  $B$  равен внешнему углу при другой вершине (рис. 206). Но это противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Второе утверждение теоремы непосредственно следует из доказанного. ■

Пользуясь этой леммой, легко доказать (не пользуясь V постулатом), что через каждую точку  $M$ , не лежащую на прямой  $a$ , проходит прямая, параллельная прямой  $a$ .

В самом деле, пусть  $MN$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $M$  к прямой  $a$ , а  $b$  — прямая, проходящая через точку  $M$  перпендикулярно к прямой  $MN$ . По предыдущей лемме прямые  $a$  и  $b$  не пересекаются, т. е. параллельны.

Возникает вопрос: сколько же через точку  $M$ , не лежащую на прямой  $a$ , проходит прямых, параллельных прямой  $a$ ? Ответ на него дает следующая теорема.

**Т е о р е м а 1.** *Если имеет место V постулат, то через каждую точку  $M$ , не лежащую на прямой  $a$ , проходит только одна прямая, параллельная прямой  $a$ .*

□ Проведем прямую  $MN$ , перпендикулярную к прямой  $a$ ,  $N \in a$ , и прямую  $b$ , проходящую через точку  $M$  перпендикулярно к прямой  $MN$  (рис. 207). Тогда прямые  $a$  и  $b$  параллельны.

Проведем через точку  $M$  произвольную прямую  $b'$ , отличную от

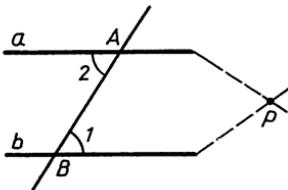


Рис. 206

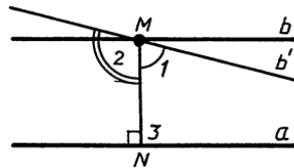


Рис. 207

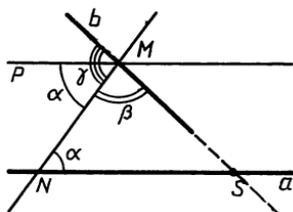


Рис. 208

прямой  $b$ . Один из смежных углов 1 либо 2, отмеченных на рисунке 207, острый; пусть  $\angle 1$  острый. При пересечении прямых  $a$  и  $b'$  с прямой  $MN$  получаем внутренние односторонние углы:  $\angle 1$  и  $\angle 3$ , сумма которых меньше двух прямых углов, значит, по V постулату прямые  $a$  и  $b'$  пересекаются. ■

Докажем обратную теорему.

**Теорема 2.** Если принять, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной, то справедлив V постулат.

□ Пусть при пересечении прямых  $a$  и  $b$  секущей  $MN$  образованы внутренние односторонние углы  $\alpha$  и  $\beta$  так, что

$$\alpha + \beta < 2d, \quad (1)$$

где  $d$  — мера прямого угла. Докажем, что прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в некоторой точке, лежащей в полуплоскости, в которой лежат углы  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 208).

Обозначим через  $\gamma$  угол, смежный с углом  $\beta$  и накрест лежащий с углом  $\alpha$  (рис. 208). Так как  $\beta + \gamma = 2d$ , то из (1) следует, что  $\gamma > \alpha$ .

Отложим от луча  $MN$  угол  $NMP$ , равный углу  $\alpha$ , так, чтобы  $\angle PMN$  и  $\alpha$  были накрест лежащими углами при пересечении прямых  $MP$  и  $a$  прямой  $MN$ . По лемме 1 прямые  $MP$  и  $a$  параллельны. В силу неравенства  $\alpha < \gamma$  прямые  $MP$  и  $b$  не совпадают. Так как через точку  $M$  проходит только одна прямая, параллельная прямой  $a$ , то прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в некоторой точке  $S$ .

Если предположить, что точка  $S$  лежит в той полуплоскости, в которой лежит угол  $\gamma$ , то в силу неравенства  $\alpha < \gamma$  придем к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника. Таким образом,  $S$  — точка той полуплоскости, в которой лежат углы  $\alpha$  и  $\beta$ . ■

Итак, V постулат эквивалентен (равносилен) так называемой аксиоме параллельных прямых: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более чем одна прямая, параллельная данной.*

2. Существует ряд других предложений, эквивалентных V постулату, одним из которых является утверждение: *сумма углов каждого треугольника равна двум прямым.* В самом деле, если имеет место V постулат, то из теоремы 1 следует, что справедлива аксиома параллельных прямых, а отсюда, как известно из школьного курса геометрии, вытекает, что сумма углов каждого треугольника равна двум прямым углам. Докажем обратное утверждение.

**Теорема 3.** Если принять, что сумма углов каждого треугольника равна  $2d$ , где  $d$  — мера прямого угла, то имеет место V постулат.

□ Учтывая теорему 2, достаточно доказать, что если сумма углов любого треугольника равна  $2d$ , то имеет место аксиома параллельных прямых.

Пусть  $a$  — прямая,  $M$  — точка, не лежащая на этой прямой,

а  $MN$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $M$  к прямой  $a$  (рис. 209). Рассмотрим прямую  $b$ , проходящую через точку  $M$  и перпендикулярную к прямой  $MN$ . По лемме 1 эта прямая параллельна прямой  $a$ .

Докажем, что любая другая прямая  $b'$ , проходящая через точку  $M$ , пересекает прямую  $a$ . Обозначим через  $\alpha$  острый угол, который составляет прямая  $b'$  с прямой  $MN$  (рис. 209). На прямой  $a$  от точки  $N$  со стороны угла  $\alpha$  отложим последовательно отрезки  $NN_1 = MN$ ,  $N_1N_2 = MN_1$ , ...,  $N_{n-1}N_n = MN_{n-1}$ . Так как по условию теоремы сумма углов каждого треугольника равна  $2d$ , то  $\widehat{NMN}_1 = \widehat{MN}_1N = \frac{d}{2}$ . Но  $\angle MN_1N$  — внешний угол равнобедренного треугольника  $MN_1N_2$ , поэтому  $\widehat{MN}_2N_1 = \frac{d}{4}$  или  $\widehat{MN}_2N = \frac{d}{4}$ . Продолжая далее, находим  $\widehat{MN}_nN = \frac{d}{2^n}$ . Отсюда следует, что  $\widehat{NMN}_n = d - \frac{d}{2^n}$ .

По условию  $\alpha < d$ , поэтому  $n$  можно выбрать так, чтобы  $\widehat{NMN}_n > \alpha$ . В этом случае прямая  $b'$  проходит внутри угла  $NMN_n$ , поэтому она пересекает отрезок  $NN_n$ . Таким образом, прямые  $b'$  и  $a$  пересекаются. ■

3. В заключение рассмотрим две теоремы о сумме углов треугольника, которые доказываются без помощи V постулата и предложений, эквивалентных этому постулату. Предварительно докажем лемму. Условимся сумму углов треугольника  $ABC$  обозначать через  $\sigma_{ABC}$ , а меру прямого угла — через  $d$ .

**Лемма 2.** Для произвольного треугольника  $ABC$  можно построить треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы  $\sigma_{ABC} = \sigma_{A_1B_1C_1}$  и  $A_1 \leq \frac{1}{2}\widehat{A}$ .

□ Пусть  $A'$  — точка, симметричная точке  $A$  относительно середины  $O$  стороны  $BC$ . Докажем, что  $AA'C$  — искомым треугольником (рис. 210). В самом деле, из равенств  $\triangle ABO = \triangle A'CO$  и  $\angle AOB = \angle A'OC$  следует, что  $\alpha_1 + \beta = \gamma_1 + \gamma_2$  (относительно обозначений см. рис. 210). Но  $\sigma_{ABC} = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma$ ,  $\sigma_{AA'C} = \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma$ , поэтому  $\sigma_{ABC} = \sigma_{AA'C}$ .

Так как  $\alpha_1 = \gamma_1$  и  $\angle A = \alpha_1 + \alpha_2$ , то по крайней мере один из углов  $\alpha_2$  или  $\gamma_1$  треугольника  $AA'C$  не больше  $\frac{1}{2}\widehat{A}$ . ■

Пользуясь этой леммой, докажем первую теорему Саккери — Лейбнера.

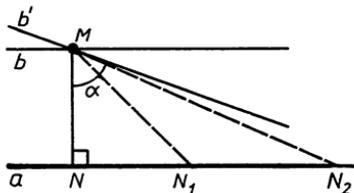


Рис. 209

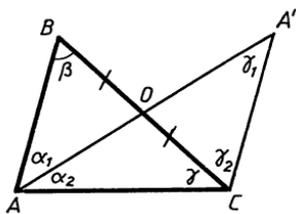


Рис. 210

**Теорема 4.** Сумма углов любого треугольника не больше  $2d$ .

□ Теорему докажем методом от противного. Пусть существует треугольник  $ABC$ , такой, что  $\sigma_{ABC} = 2d + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ . Применяя предыдущую лемму к треугольнику  $ABC$   $n$  раз, построим треугольник  $A_n B_n C_n$ , удовлетворяющий условиям  $\sigma_{A_n B_n C_n} = \sigma_{ABC}$  и  $\widehat{A}_n \leq \leq \frac{1}{2^n} \widehat{A}$ . Выберем  $n$  так, чтобы  $\frac{1}{2^n} \widehat{A} < \varepsilon$ . Тогда  $\widehat{A}_n < \varepsilon$ . Так как  $\widehat{A}_n + \widehat{B}_n + \widehat{C}_n = 2d + \varepsilon$ , то  $\widehat{B}_n + \widehat{C}_n > 2d$ .

С другой стороны, легко доказать, что  $\widehat{B}_n + \widehat{C}_n < 2d$ . В самом деле, если  $\beta$  — мера внешнего угла треугольника  $A_n B_n C_n$ , смежного с углом  $B_n$ , то  $\beta > \widehat{C}_n$ , а по теореме о смежных углах  $\beta + \widehat{B}_n = 2d$ , поэтому  $\widehat{B}_n + \widehat{C}_n < 2d$ . Мы пришли к противоречию, следовательно, не существует такого треугольника  $ABC$ , сумма углов которого больше чем  $2d$ . ■

Итак, сумма углов любого треугольника не больше  $2d$ . Но не может ли получиться так, что у одних треугольников эта сумма меньше  $2d$ , а у других равна  $2d$ ? Отрицательный ответ на этот вопрос дает вторая теорема Саккери — Лежандра, которую мы приводим без доказательства.

**Теорема 5.** Если в одном треугольнике сумма углов равна  $2d$ , то сумма углов любого треугольника равна  $2d$ .

Мы получили еще одно предположение, эквивалентное V постулату: существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого равна  $2d$ .

## § 70. Н. И. Лобачевский и его геометрия

1. До начала XIX столетия ни одна из попыток доказательства V постулата не увенчалась успехом. Таким образом, проблема V постулата оставалась неразрешимой. И только в начале XIX в. были получены результаты, которые привели к решению этой проблемы. Основная заслуга в этом принадлежит знаменитому русскому ученому Н. И. Лобачевскому.

Николай Иванович Лобачевский родился 2 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький). Он окончил гимназию при Казанском университете, а затем и Казанский университет, после чего был оставлен там преподавателем. С 1816 г. Н. И. Лобачевский — профессор того же университета, с 1827 по 1846 г. — ректор университета. С 1846 по 1855 г. — помощник попечителя Казанского учебного округа. Н. И. Лобачевский скончался 24 февраля 1856 г.

В течение первых лет преподавательской деятельности в Казанском университете Н. И. Лобачевский настойчиво пытался доказать V постулат. Неудачи этих попыток и попыток его предшественников привели его к выводу, что V постулат не может быть выведен из остальных постулатов геометрии. Чтобы это доказать, Н. И. Лобачевский построил логическую систему, в которой, сохраняя основные посыпки Евклида, он отвергает V постулат и заменяет его про-

тивоположным допущением. Он пришел к выводу, что эта логическая схема представляет собой новую геометрию, которая может быть развита так же успешно, как и геометрия Евклида.

7 февраля (по старому стилю) 1826 г. Н. И. Лобачевский представил физико-математическому факультету Казанского университета доклад по теории параллельных под названием «Рассуждения о принципах геометрии». В 1829 г. в «Ученых записках Казанского университета» он поместил статью «О началах геометрии». Это была первая опубликованная работа по новой геометрии. В последующие годы Лобачевский издал еще ряд сочинений по геометрии. В этих сочинениях он первым отчетливо сформулировал и обосновал утверждение о том, что V постулат Евклида нельзя вывести из остальных аксиом геометрии.

Лобачевский развивает свою геометрию на плоскости и в пространстве до тех же пределов, до каких была развита Евклидова геометрия, включая и формулы тригонометрии. Эту новую геометрию он назвал «воображаемой» (впоследствии ее стали называть геометрией Лобачевского или гиперболической геометрией).

Открывая все новые и новые факты, Лобачевский не встретил в своей геометрии каких-либо логических противоречий. Исследования, сделанные им, привели к убеждению, что его логическая схема свободна от логических противоречий. Желая показать, что его геометрия никогда не приведет к противоречию, Лобачевский дает ее аналитическое исследование и решает проблему непротиворечивости своей геометрии вполне удовлетворительно для того времени.

Лобачевский показал, что его геометрия может быть с пользой приложена в математическом анализе: он вычислил много интегралов, которые до него не поддавались вычислению.

2. Примерно в одно время с Н. И. Лобачевским теорией параллельных прямых занимались великий немецкий математик Гаусс (1777—1855) и выдающийся венгерский математик Я. Бояи (1802—1860). Но Гаусс не опубликовал ничего по теории параллельных, боясь, что его не поймут. После смерти Гаусса в его бумагах были найдены наброски отдельных наиболее простых теорем гиперболической геометрии. Я. Бояи опубликовал в 1832 г. (через три года после публикации Лобачевского и не зная о последней) на латинском языке произведение «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве, независимое от правильности или ложности XI аксиомы<sup>1</sup> Евклида...». В этой работе, составившей приложение к математическому трактату его отца Фаркаша Бояи, Янош Бояи изложил ту же теорию, что и Лобачевский, но в значительно менее развитой форме.

Результаты Лобачевского оказались настолько необычными для математиков, воспитанных на идеях геометрии Евклида, что не были поняты большинством из его современников (и даже академиком

---

<sup>1</sup> В некоторых изданиях «Начал» Евклида V постулат включен в число аксиом и называется XI аксиомой.

М. В. Остроградским — одним из крупнейших математиков XIX в.). Лишь после смерти Гаусса, когда была опубликована переписка Гаусса с некоторыми его друзьями-математиками, в которой содержались восторженные отзывы об исследованиях Лобачевского и Бояи, внимание математиков всего мира было привлечено к геометрии Лобачевского; появились многочисленные исследования, связанные с ней. Особое впечатление произвела работа Бельтрами «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии», опубликованная в 1868 г. В ней были указаны поверхности, на которых в малом осуществляется двумерная геометрия Лобачевского. Наконец, в 1871 г. знаменитый немецкий математик Ф. Клейн (1849—1925) в работе «О так называемой неевклидовой геометрии» доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского, чем устранил последние сомнения в ее правоте.

Исследования Лобачевского получили широкое признание после его смерти. Оказалось, что работы Лобачевского по геометрии представляют собой новый этап в развитии естествознания (недаром английский математик XIX в. Клиффорд называл Лобачевского Коперником геометрии). До Лобачевского евклидову геометрию считали единственно возможным учением о пространстве. Работы Лобачевского опровергли такой взгляд, привели к широким обобщениям в геометрии и их важнейшим приложениям в различных разделах математики, механики, физики и астрономии.

3. Выше было отмечено, что с научной точки зрения систему аксиом и постулатов Евклида нельзя признать вполне удовлетворительной, так как у Евклида при изложении геометрии приходится в ряде случаев использовать утверждения, которые явно не высказаны и не доказаны.

В конце 60-х годов прошлого столетия перед математиками возникла задача построить такую систему аксиом элементарной геометрии, на базе которой, опираясь лишь на законы логики, без ссылок на наглядность и очевидность можно было бы изложить всю геометрию. Эта задача стала особенно актуальной после того, как идеи Лобачевского получили всеобщее признание и появились работы Б. Римана по эллиптической геометрии.

В конце XIX и в начале XX в. появились многочисленные работы по обоснованию геометрии ряда таких крупнейших математиков, как Паш, Пеано, Пиери, Гильберт, Вейль и др. Наиболее исчерпывающими явились работы Гильберта и Вейля. Эти исследования оказали большое влияние на формирование аксиоматического метода, который применяется во всех разделах современной математики.

Книга Гильберта «Основания геометрии», вышедшая в 1899 г., сыграла существенную роль в этой серии исследований<sup>1</sup>. Она в 1903 г. была удостоена Международной премии имени Н. И. Лобачевского. В ней впервые дан список аксиом, достаточный для логического построения евклидовой геометрии. Можно сказать, что с

<sup>1</sup> См.: Гильберт Д. Основания геометрии.— М.: ГИТТЛ, 1948.

«Оснований геометрии» Гильберта начинается современный аксиоматический метод в математике. В следующих двух параграфах рассмотрим краткий обзор системы аксиом Гильберта.

## § 71. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом групп I—II

1. По Гильберту, предполагается, что даны три различных множества. Элементы первого множества называются точками, элементы второго множества — прямыми, а элементы третьего множества — плоскостями (основные объекты). Точки, прямые и плоскости обозначаются соответственно буквами  $A, B, C, \dots$ ;  $a, b, c, \dots$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Элементы этих множеств находятся в определенных отношениях, которые называются: «принадлежность», «лежать между» и «конгруэнтность» (основные отношения). Природа основных понятий, т. е. основных объектов и основных отношений, может быть какой угодно, но они должны удовлетворять определенным аксиомам, которые перечислены ниже.

Список Гильберта содержит 20 аксиом, которые разделяются на пять групп. Первые две группы аксиом рассмотрим в этом параграфе, а остальные три группы аксиом — в следующем.

### 2. Г р у п п а I. А к с и о м ы п р и н а д л е ж н о с т и.

Аксиомы этой группы определяют свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, выражаемые словом «принадлежит» (или «лежит на», «проходит через»). Группа I содержит следующие восемь аксиом.

1. Каковы бы ни были две точки<sup>1</sup>  $A, B$ , существует прямая  $a$ , проходящая через эти точки.

2. Каковы бы ни были две точки  $A$  и  $B$ , существует не более одной прямой, проходящей через эти точки.

3. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

4. Каковы бы ни были три точки  $A, B, C$ , не лежащие на одной прямой, существует плоскость  $\alpha$ , проходящая через эти точки. На каждой плоскости лежит хотя бы одна точка.

5. Каковы бы ни были три точки, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через эти точки.

6. Если две точки  $A$  и  $B$  прямой  $a$  лежат в плоскости  $\alpha$ , то каждая точка прямой  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ .

В этом случае говорят, что прямая  $a$  *лежит в плоскости  $\alpha$*  или плоскость  $\alpha$  *проходит через прямую  $a$* .

7. Если две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют общую точку  $A$ , то они имеют по крайней мере еще одну общую точку  $B$ .

8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Исходя из этих аксиом, можно доказать ряд теорем, большинство

---

<sup>1</sup> Напомним, что когда мы говорим «две точки», «три прямые», то предполагаем, что эти точки или прямые попарно различны.

из которых в школьном курсе геометрии не доказываются, так как они наглядно очевидны. Перечислим некоторые из этих теорем.

1<sup>0</sup>. Две прямые имеют не более одной общей точки.

2<sup>0</sup>. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих двух плоскостей.

3<sup>0</sup>. Через прямую и не лежащую на ней точку, так же как через две пересекающиеся прямые, проходит одна и только одна плоскость.

4<sup>0</sup>. На каждой плоскости существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

### 3. Г р у п п а II. А к с и о м ы п о р я д к а.

Предполагается, что точка на прямой может находиться в известном отношении к двум другим точкам той же прямой; это отношение выражается словами «лежать между». Если точка  $B$  лежит между точкой  $A$  и точкой  $C$ , то мы запишем так:  $A - B - C$ . При этом должны быть удовлетворены следующие четыре аксиомы.

II<sub>1</sub>. Если  $A - B - C$ , то  $A, B, C$  — различные точки одной прямой и  $C - B - A$ .

II<sub>2</sub>. Каковы бы ни были две точки  $A$  и  $B$ , существует по крайней мере одна точка  $C$  на прямой  $AB$ , такая, что  $A - B - C$ .

II<sub>3</sub>. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

По Гильберту, отрезком  $AB$  (или  $BA$ ) называется пара точек  $A$  и  $B$ . Точки  $A$  и  $B$  называются *концами отрезка*, а любая точка, лежащая между ними, — *внутренней точкой отрезка* или просто *точкой отрезка*.

II<sub>4</sub> (аксиома Паша). Пусть  $A, B, C$  — три точки, не лежащие на одной прямой, а  $a$  — прямая в плоскости  $ABC$ , не проходящая ни через одну из точек  $A, B, C$ . Тогда если прямая  $a$  проходит через точку отрезка  $AB$ , то она проходит также через точку отрезка  $AC$  или  $BC$ .

Можно доказать, что утверждение, сформулированное в аксиоме Паша, верно и в том случае, когда точки  $A, B$  и  $C$  лежат на одной прямой. Нетрудно также доказать, что если прямая  $a$  пересекает какие-либо два из трех отрезков  $AB, BC$  и  $AC$ , то она не пересекает третий из этих отрезков.

С помощью аксиом групп I и II доказываются многие факты геометрии и вводится ряд основных определений. Прежде всего можно доказать, что между любыми точками существует по крайней мере одна точка, а отсюда легко прийти к выводу, что любой отрезок (а следовательно, и любая прямая) содержит бесконечное множество точек. Заметим, однако, что с помощью аксиом I и II групп нельзя доказать, что это множество несчетное. В дополнение к аксиоме II<sub>3</sub> можно доказать, что из трех точек прямой всегда одна точка лежит между двумя другими.

Аксиомы групп I и II позволяют ввести такие важные понятия геометрии, как понятия полуплоскости, луча и полупространства. В качестве примера введем понятие полуплоскости. Предварительно докажем следующую теорему о полуплоскости.

**Т е о р е м а.** *Прямая  $a$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , разделяет мно-*

жество точек этой плоскости, не лежащих на прямой  $a$ , на два непустых подмножества так, что если точки  $A$  и  $B$  принадлежат одному подмножеству, то отрезок  $AB$  не имеет общих точек с прямой  $a$ ; если же эти точки принадлежат разным подмножествам, то отрезок  $AB$  имеет общую точку с прямой  $a$ .

□ Обозначим через  $\Omega$  множество всех точек плоскости  $\alpha$ , не лежащих на прямой  $a$ . На множестве  $\Omega$  введем бинарное отношение  $\Delta$  следующим образом. Будем говорить, что точки  $A$  и  $B \in \Omega$  находятся в отношении  $\Delta$ , если отрезок  $AB$  не имеет общих точек с прямой  $a$  или если точки  $A$  и  $B$  совпадают. Нетрудно видеть, что  $\Delta$  является отношением эквивалентности на множестве  $\Omega$ . Выполнение условий рефлексивности и симметричности непосредственно следует из определения отношения  $\Delta$ , а условие транзитивности — из аксиомы Паша и ее обобщения на случай, когда точки лежат на одной прямой.

Докажем, что фактор-множество  $\Omega/\Delta$  состоит лишь из двух элементов. Пусть  $A$  — точка, не лежащая на прямой  $a$ ,  $M$  — точка этой прямой, а  $B$  — такая точка, что  $A - M - B$ . Такие точки существуют согласно аксиомам  $I_3$  и  $II_2$ . Классы эквивалентности  $K_A$  и  $K_B$  не совпадают, так как отрезок  $AB$  имеет общую точку  $M$  с прямой  $a$ . Нетрудно видеть, что любая точка  $C \in \Omega$  принадлежит либо классу  $K_A$ , либо классу  $K_B$ . Если отрезок  $AC$  не имеет общих точек с прямой  $a$ , то  $C \in K_A$ , в обратном случае  $C \in K_B$ . В самом деле, отрезки  $AC$  и  $AB$  имеют общие точки с прямой  $a$ , поэтому отрезок  $BC$  не имеет общих точек с этой прямой.

Ясно, что два элемента фактор-множества  $\Omega/\Delta$  удовлетворяют всем условиям теоремы. ■

Каждое из подмножеств точек, определяемых предыдущей теоремой, называется *полуплоскостью* плоскости  $\alpha$  с границей  $a$ .

Аналогично вводятся понятия луча и полупространства. Лучи обозначаются через  $h, l, k, \dots$  или  $OA, OB, \dots$  ( $O$  — начало лучей, а  $A, B, \dots$  — точки лучей). Прямую, на которой лежит луч  $h$ , будем обозначать через  $\bar{h}$ . Можно ввести определение угла, обычное определение простого многоугольника и его внутренней области, выпуклого многоугольника и его углов. Остановимся более подробно на понятии угла, так как оно необходимо для дальнейшего изложения.

По Гильберту, угол — пара лучей  $h$  и  $k$ , исходящих из одной точки  $O$  и не лежащих на одной прямой. Точка  $O$  называется *вершиной* угла, а лучи  $h$  и  $k$  — *сторонами* угла. Для углов применяются обычные обозначения:  $\angle hk, \angle AOB, \angle O$ . Точка  $M$  называется *внутренней точкой* угла, если точка  $M$  и луч  $h$  лежат в одной полуплоскости с границей  $\bar{k}$  и точка  $M$  и луч  $k$  лежат в одной полуплоскости с границей  $\bar{h}$ . Множество всех внутренних точек называется *внутренней областью* угла. Отметим, что внутренняя область угла — бесконечное множество точек. В самом деле, легко доказать, что все точки любого отрезка с концами на разных сторонах угла являются внутренними точками этого угла. Отсюда, учитывая, что отрезок содержит бесчисленное множество точек, и следует сформулирован-

ное выше утверждение. Можно доказать теорему (теорема о внутреннем луче угла): если луч исходит из вершины угла и имеет хотя бы одну внутреннюю точку этого угла, то он пересекает любой отрезок с концами на разных сторонах угла.

## § 72. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом групп I—V

### 1. Группа III. Аксиомы конгруэнтности.

Предполагается, что отрезок (угол) находится в известном отношении к какому-то отрезку (углу). Это отношение выражается словом «конгруэнтен» или «равен» и обозначается символом « $\equiv$ ». Должны быть удовлетворены следующие пять аксиом.

III<sub>1</sub>. Если даны отрезок  $AB$  и луч, исходящий из точки  $A'$ , то существует точка  $B'$ , принадлежащая данному лучу, такая, что  $AB \equiv A'B'$ .

Можно доказать, что точка  $B'$  на данном луче единственная.

III<sub>2</sub>. Если  $A'B' \equiv AB$  и  $A''B'' \equiv AB$ , то  $A'B' \equiv A''B''$ .

III<sub>3</sub>. Пусть  $A - B - C$ ,  $A' - B' - C'$ ,  $AB \equiv A'B'$  и  $BC \equiv B'C'$ . Тогда  $AC \equiv A'C'$ .

III<sub>4</sub>. Пусть даны  $\angle hkk$  и флаг<sup>1</sup> ( $O'$ ,  $h'$ ,  $\lambda'$ ). Тогда в полуплоскости  $\lambda'$  существует один и только один луч  $k'$ , исходящий из точки  $O'$ , такой, что  $\angle hkk \equiv \angle h'k'$ .

Каждый угол конгруэнтен самому себе.

III<sub>5</sub>. Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — три точки, не лежащие на одной прямой, и  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ , то  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ .

Укажем некоторые теоремы, которые следуют из аксиом конгруэнтности.

1<sup>0</sup>. Отношение конгруэнтности отрезков является отношением эквивалентности на множестве отрезков.

2<sup>0</sup>. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

По Гильберту, треугольник  $ABC$  называется *конгруэнтным* (равным) треугольнику  $A'B'C'$  ( $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ), если  $AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C'$ ,  $CA \equiv C'A'$ ,  $\angle A \equiv \angle A'$ ,  $\angle B \equiv \angle B'$ ,  $\angle C \equiv \angle C'$ .

3<sup>0</sup>. Первый, второй и третий признаки равенства треугольников.

В качестве примера приведем доказательство первого признака равенства треугольников.

Если в треугольниках  $ABC$  и  $A'B'C'$   $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\angle A \equiv \angle A'$ , то  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

□ Так как  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ , то по аксиоме III<sub>5</sub>  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ , т. е.  $\angle B \equiv \angle B'$ . Далее  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ , то по той же аксиоме  $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ , т. е.  $\angle C \equiv \angle C'$ .

<sup>1</sup> Напомним, что если  $O'$  — некоторая точка,  $h'$  — луч, исходящий из этой точки, а  $\lambda'$  — полуплоскость с границей  $h'$ , то тройка  $O'$ ,  $h'$ ,  $\lambda'$  называется *флагом* ( $O'$ ,  $h'$ ,  $\lambda'$ ).

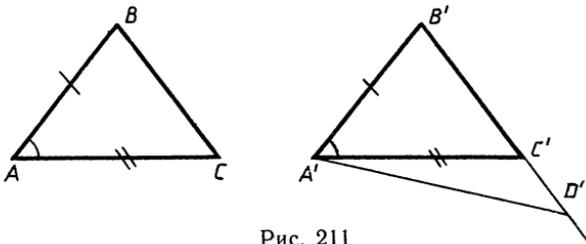


Рис. 211

Докажем теперь, что  $BC = B'C'$ . Доказательство проведем методом от противного. Пусть  $BC \neq B'C'$ . По аксиоме III<sub>1</sub> на луче  $B'C'$  существует точка  $D'$ , для которой  $BC = B'D'$ . Так как точки  $C'$  и  $D'$  не совпадают, то лучи  $A'C'$  и  $A'D'$  также не совпадают (рис. 211). Из равенств  $BA = B'A'$ ,  $BC = B'D'$ ,  $\angle ABC = \angle A'B'D'$ , применяя аксиому III<sub>5</sub>, получим  $\angle BAC = \angle B'A'D'$ . Но по условию  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ . Последние два равенства противоречат условию единственности в аксиоме III<sub>4</sub>. Следовательно,  $BC = B'C'$ . ■

Пользуясь признаками равенства треугольников, легко доказать утверждение.

4<sup>б</sup>. Отношение конгруэнтности углов является отношением эквивалентности на множестве углов.

Далее даются обычные определения понятий «больше» и «меньше» для отрезков и углов и устанавливаются свойства сравнения отрезков и углов. Вводится понятие смежных углов и дается определение прямого угла: угол называется прямым, если он равен углу, смежному с ним. Доказывается, что все прямые углы равны друг другу.

Затем можно доказать известные теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

5<sup>0</sup>. Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, несмежного с ним.

6<sup>0</sup>. В каждом треугольнике против большей стороны лежит больший угол и обратно: против большего угла лежит большая сторона.

В заключение этого пункта отметим, что аксиомы групп I—III позволяют дать обычные определения середины отрезка и биссектрисы угла и доказать следующие теоремы.

7<sup>0</sup>. Любой отрезок имеет одну и только одну середину.

8<sup>0</sup>. Любой угол имеет одну и только одну биссектрису.

2. В этом пункте мы несколько отклоняемся от схемы Гильберта и последние три аксиомы и следствия из них изложим так, как это принято в учебной литературе.

#### Группа IV. Аксиомы непрерывности.

IV<sub>1</sub> (аксиома Архимеда). Пусть  $AB$  и  $CD$  — какие-нибудь отрезки. Тогда на прямой  $AB$  существует конечное множество точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , таких, что выполняются условия: а)  $A - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \dots, A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$ ; б)  $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = CD$ ; в)  $A - B - A_n$ .

$IV_2$  (аксиома Кантора). Пусть на произвольной прямой  $a$  дана бесконечная последовательность отрезков  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ , из которых каждый последующий лежит внутри предыдущего и, кроме того, для любого отрезка  $CD$  найдется натуральное число  $n$ , такое, что  $A_nB_n < CD$ . Тогда на прямой  $a$  существует точка  $M$ , принадлежащая каждому из отрезков данной последовательности.

Ясно, что такая точка  $M$  единственная. В самом деле, если предположить, что точка  $N$ , отличная от точки  $M$ , также принадлежит каждому из отрезков данной последовательности, то получим  $A_nB_n \geq MN$  при любом  $n$ , что противоречит аксиоме.

Можно доказать, что аксиомы  $IV_1$ — $IV_2$  при сохранении аксиом групп I—III эквивалентны следующему предложению Дедекинда.

Пусть дано разбиение точек отрезка  $[AB]$  на два класса  $K_1$  и  $K_2$  (т. е.  $K_1 \cup K_2 = [AB]$ ,  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ), удовлетворяющее двум условиям:

а)  $A \in K_1$ ,  $B \in K_2$  и классы  $K_1$  и  $K_2$  содержат точки, отличные от точек  $A$  и  $B$ ;

б) любая точка класса  $K_1$ , отличная от  $A$ , лежит между точкой  $A$  и любой точкой класса  $K_2$ .

Тогда существует точка  $M_0$  отрезка  $[AB]$ , такая, что любая точка, лежащая между  $A$  и  $M_0$ , принадлежит классу  $K_1$ , а любая точка между  $M_0$  и  $B$  — классу  $K_2$ .

Разбиение отрезка  $[AB]$  на классы  $K_1, K_2$ , удовлетворяющее условиям а) — б), называют *дедекиндовым сечением*. О точке  $M_0$  говорят, что она производит это сечение. Можно доказать, что такая точка единственная. Эта точка может принадлежать как первому, так и второму классу.

К важнейшим следствиям из аксиом групп I—IV относится теория измерения отрезков и углов, которой посвящена глава XI настоящего курса<sup>2</sup>. Построив теорию измерения отрезков, легко доказать, что существует биекция множества точек прямой на множество  $\mathbf{R}$  вещественных чисел, сохраняющая порядок. Таким образом, точки на прямой расположены непрерывно одна за другой, как и числа во множестве  $\mathbf{R}$ . Следствиями аксиом групп I—IV являются также известные теоремы о пересечении прямой и окружности и двух окружностей.

3. Для обоснования евклидовой теории параллельных Гильберт к аксиомам групп I—IV добавляет еще одну аксиому параллельных прямых.

Группа V. Аксиома параллельности.

Пусть  $a$  — произвольная прямая, а  $A$  — точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой точкой  $A$  и прямой  $a$ , существует не более одной прямой, проходящей через  $A$  и не пересекающей  $a$ .

<sup>1</sup> Через  $[A, B]$  обозначено множество, состоящее из точек  $A, B$  и всех точек, лежащих между ними.

<sup>2</sup> Интересно отметить, что для введения понятия площади или объема необходимо к аксиомам групп I—IV добавить еще аксиому параллельности, т. е. рассматривать все аксиомы евклидовой геометрии.

В § 69 мы доказали, что эта аксиома эквивалентна V постулату Евклида.

На основе всех аксиом групп I—V можно построить теорию параллельных прямых по Евклиду, доказать теоремы о сумме углов треугольника и выпуклого многоугольника, изучить свойства параллелограммов и трапеций, построить теорию подобия и т. д. Заметим еще, что аксиомы групп I—V позволяют обосновать обычную тригонометрию, изучаемую в средней школе, а также декартову аналитическую геометрию. В частности, пользуясь теоремой Пифагора, для доказательства которой необходимо использовать аксиому V, выводится известная формула для вычисления расстояния между двумя точками по координатам этих точек. Кроме того, доказываемся, что плоскость в пространстве определяется уравнением первой степени, а прямая — системой двух уравнений с тремя переменными. Таким образом, мы получаем возможность приложить алгебру к доказательству теорем геометрии.

Отметим, наконец, что, пользуясь аксиомами групп I—V, можно ввести понятия площади многоугольника и объема многогранника.

**З а м е ч а н и я.** 1. В «Основаниях геометрии» Гильберта группу IV аксиом составляет аксиома параллельности, а группу V — аксиомы непрерывности, причем вместо аксиомы Кантора Гильберт берет другую аксиому, которую он назвал аксиомой линейной полноты. Формулировка этой аксиомы довольно громоздкая, и мы ее не приводим.

2. Геометрию, построенную на аксиомах групп I—IV, называют *абсолютной геометрией*. Все теоремы и определения, сформулированные нами в § 71 и п. 1, 2 § 72, являются теоремами абсолютной геометрии. К ним еще следует присоединить лемму 1 § 69 и теорему 4 того же параграфа, которые доказываются без помощи аксиомы параллельности.

## § 73. Аксиома Лобачевского.

### Параллельные прямые по Лобачевскому

1. Геометрия Лобачевского (или гиперболическая геометрия) основана на аксиомах групп I—IV абсолютной геометрии и на следующей аксиоме Лобачевского.

V\*. Пусть  $a$  — произвольная прямая, а  $A$  — точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой точкой  $A$  и прямой  $a$ , существует не менее двух прямых, проходящих через точку  $A$  и не пересекающих прямую  $a$ .

Ясно, что все определения и теоремы абсолютной геометрии имеют место и в геометрии Лобачевского. В этом и в трех следующих параграфах мы познакомим читателя только с теми фактами геометрии Лобачевского, которые непосредственно следуют из аксиомы V\*, т. е. специфичны для этой геометрии. Для простоты изложения ограничимся только случаем планиметрии Лобачевского.

Из аксиомы V\* непосредственно следует, что если даны произволь-

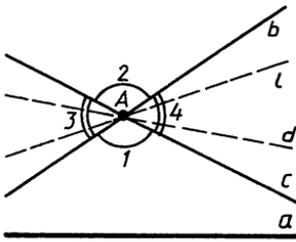


Рис. 212

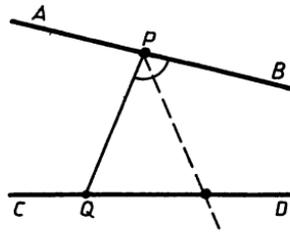


Рис. 213

ная прямая  $a$  и точка  $A$ , не лежащая на ней, то существует бесконечное множество прямых, проходящих через точку  $A$  и не пересекающих прямую  $a$ . В самом деле, по аксиоме  $V^*$  существуют две прямые, которые обозначим через  $b$  и  $c$ , проходящие через точку  $A$  и не пересекающие прямую  $a$  (рис. 212). Прямые  $b$  и  $c$  образуют две пары вертикальных углов, которые на рисунке 212 обозначены цифрами 1, 2 и 3, 4. Прямая  $a$  не пересекает прямые  $b$  и  $c$ , поэтому все ее точки принадлежат внутренней области одного из четырех углов 1, 2, 3, 4, например внутренней области угла 1. Тогда, очевидно, любая прямая, проходящая через точку  $A$  и лежащая внутри вертикальных углов 3 и 4, не пересекает прямую  $a$  (например, прямые  $l$  и  $d$  на рис. 212).

В отличие от определения параллельных прямых по Евклиду в геометрии Лобачевского параллельными к данной прямой называются только некоторые прямые из тех, которые не пересекают данную прямую. Чтобы ввести это понятие, условимся считать, что все прямые, рассматриваемые нами, являются *направленными* прямыми. Поэтому мы их будем обозначать двумя буквами, например  $UV$ , считая, что точка  $U$  предшествует точке  $V$ . Предполагается также, что точки  $U$  и  $V$  выбраны так, что рассматриваемые нами точки на этой прямой лежат между точками  $U$  и  $V$ .

2. Введем следующее определение. Прямая  $AB$  называется *параллельной* прямой  $CD$ , если эти прямые не имеют общих точек и, каковы бы ни были точки  $P$  и  $Q$ , лежащие соответственно на прямых  $AB$  и  $CD$ , любой внутренний луч<sup>1</sup> угла  $QPB$  пересекает луч  $QD$  (рис. 213). Если прямая  $AB$  параллельна прямой  $CD$ , то пишут так:  $AB \parallel CD$ .

Имеет место следующий признак параллельности прямых.

**Теорема 1.** Если прямые  $AB$  и  $CD$  не имеют общих точек и существуют точки  $P$  и  $Q$ , такие, что  $P \in AB$  и  $Q \in CD$ , и любой внутренний луч угла  $QPB$  пересекает луч  $QD$ , то  $AB \parallel CD$ .

□ Для доказательства теоремы достаточно установить, что, каковы бы ни были точки  $P'$  и  $Q'$ , лежащие соответственно на пря-

<sup>1</sup> *Внутренним лучом данного угла* называется луч, исходящий из вершины угла и целиком принадлежащий внутренней области угла.

мых  $AB$  и  $CD$ , любой внутренний луч  $h$  угла  $Q'P'B$  пересекает луч  $Q'D$ . Возможны три случая: точка  $P'$  совпадает с точкой  $P$ ; б) точка  $P'$  принадлежит лучу  $PA$ ; в) точка  $P'$  принадлежит лучу  $PB$ . Мы рассмотрим здесь первые два случая, предоставив читателю по аналогии самостоятельно рассмотреть случай в).

а) Точка  $P'$  совпадает с точкой  $P$ . Если  $Q'$  — точка луча  $QC$ , то  $\angle Q'P'B$  является объединением углов  $Q'PQ$  и  $QPB$ , поэтому луч  $h$  либо лежит внутри угла  $Q'P'Q$ , либо совпадает с лучом  $PQ$ , либо лежит внутри угла  $QPB$  (рис. 214, а). В первом и во втором случаях луч  $h$  пересекает отрезок  $Q'Q$ , поэтому пересекает и луч  $Q'Q$ . В третьем случае луч  $h$  по условию теоремы пересекает луч  $QD$  и, следовательно, луч  $Q'D$ .

Если  $Q'$  — точка луча  $QD$ , то угол  $Q'P'B$  является частью угла  $QPB$  (рис. 214, б). Поэтому луч  $h$  является внутренним лучом угла  $QPB$  и по условию теоремы пересекает луч  $QD$ . Точка пересечения является точкой луча  $Q'D$ , так как  $h$  не проходит внутри угла  $QPQ'$  и поэтому не пересекает отрезок  $QQ'$ .

б) Точка  $P'$  принадлежит лучу  $PA$ . Луч  $h$  лежит внутри угла  $Q'P'P$ , поэтому  $h$  пересекает отрезок  $PQ'$  в некоторой точке  $M$  (рис. 215). Отложим от луча  $PB$  в полуплоскость, содержащую прямую  $CD$ , угол  $BPM'$ , равный углу  $PP'M$ . Так как  $\angle BPQ' -$  внешний угол треугольника  $PP'Q'$ , то  $\angle PP'Q' < \angle BPQ'$ , поэтому  $\angle PP'M < \angle BPQ'$ . Отсюда следует, что  $PM'$  — внутренний луч угла  $BPQ'$ . Следовательно, по доказанному (см. случай а) ) этот луч пересекает луч  $Q'D$  в некоторой точке  $M_1$  (рис. 215). Прямая  $P'M$  пересекает сторону  $PQ'$  треугольника  $PQ'M_1$  и не пересекает сторону  $PM_1$  (так как  $\angle BPM_1 = \angle BP'M$ ), поэтому по аксиоме Паша прямая  $P'M$  пересекает отрезок  $Q'M_1$ . Таким образом, луч  $h$  пересекает луч  $Q'D$ . ■

Из предыдущего изложения еще не следует, что существуют параллельные прямые по Лобачевскому. Докажем теорему о существовании параллельных прямых.

**Теорема 2.** Пусть  $AB$  — произвольная направленная прямая, а  $M$  — точка, не лежащая на ней. Тогда в плоскости  $MAB$  существует одна и только одна прямая  $CD$ , проходящая через точку  $M$  и параллельная прямой  $AB$ , т. е.  $CD \parallel AB$ .

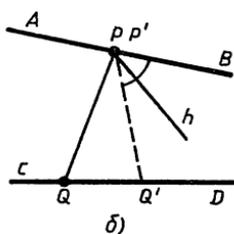
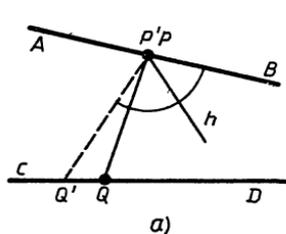


Рис. 214

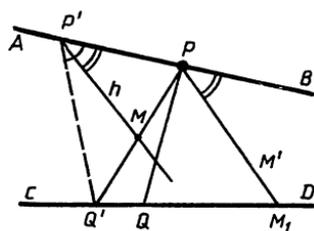


Рис. 215

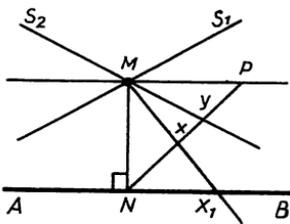


Рис. 216

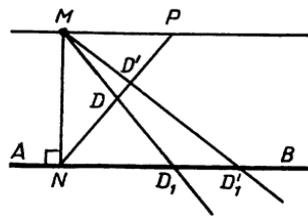


Рис. 217

□ Рассмотрим перпендикуляр  $MN$ , проведенный из точки  $M$  к прямой  $AB$ , и прямую  $MP$ , перпендикулярную к прямой  $MN$  (рис. 216). Мы предполагаем, что точки  $P$  и  $B$  лежат по одну сторону от прямой  $MN$ . По лемме 1 § 69 прямые  $MP$  и  $NB$  не пересекаются.

Точки отрезка  $NP$  разобьем на два класса  $K_1$  и  $K_2$  по следующему закону. К первому классу отнесем те точки  $X$  этого отрезка, которые удовлетворяют условию: луч  $MX$  пересекает луч  $NB$ , а ко второму классу — все остальные точки отрезка  $NP$ . Докажем, что указанное разбиение удовлетворяет условиям а) и б) предложения Дедекинда (§ 72, п. 2).

а) Очевидно,  $N \in K_1$  и  $P \in K_2$ . Класс  $K_1$  содержит точки, отличные от  $N$ , например, точки  $X$  пересечения луча  $MX_1$  с отрезком  $NP$ , где  $X_1$  — произвольная точка луча  $NB$  (рис. 216). Класс  $K_2$  содержит точки, отличные от  $P$ . В самом деле, по аксиоме  $V^*$  существует прямая  $MS_1$ , отличная от прямой  $MP$  и не пересекающая прямую  $AB$ . Прямая  $MS_2$ , симметричная прямой  $MS_1$  относительно прямой  $MN$ , также не пересекает прямую  $AB$  (рис. 216). Одна из прямых  $MS_1$  или  $MS_2$  проходит внутри угла  $NMP$ , поэтому пересекает отрезок  $NP$  в некоторой точке  $Y$ , принадлежащей классу  $K_2$ .

б) Пусть  $X$  — произвольная точка класса  $K_1$ , отличная от  $N$ , а  $Y$  — точка второго класса. Тогда  $N - X - Y$ , так как в противном случае имеем  $N - Y - X$ , что означает, что луч  $MY$  — внутренний луч угла  $NMX$ . Отсюда следует, что луч  $MY$  пересекает отрезок  $NX_1$ , т. е.  $Y \in K_1$ .

Итак, на множестве точек отрезка  $NP$  имеем дедекиндово сечение. Пусть точка  $D$  производит это сечение. Докажем, что  $D \in K_2$ . Предположим противное:  $D \in K_1$ . Тогда луч  $MD$  пересекает луч  $NB$  в некоторой точке  $D_1$  (рис. 217). Возьмем на луче  $NB$  точку  $D'_1$  так, чтобы  $N - D_1 - D'_1$ . Луч  $MD'_1$  пересекает отрезок  $DP$  в некоторой точке  $D'$  (рис. 217), которая принадлежит классу  $K_1$ . Полученный вывод противоречит предложению Дедекинда. Таким образом,  $D \in K_2$ . На прямой  $MD$  возьмем точку  $C$  так, чтобы  $C - M - D$ . По теореме 1  $CD \parallel AB$ .

Остается доказать, что  $CD$  — единственная прямая, проходящая через точку  $M$  и параллельная прямой  $AB$ . Пусть, напротив,  $C'D'$  — другая прямая, проходящая через точку  $M$  и параллельная прямой  $AB$ . По определению параллельных прямых внутренние лучи

углов  $NMD$  и  $NMD'$  пересекают луч  $NB$ , поэтому лучи  $MD, MD'$  лежат в той же полуплоскости с границей  $MN$ , что и луч  $NB$ . Отсюда мы приходим к выводу, что либо  $MD$  — внутренний луч угла  $NMD'$ , либо  $MD'$  — внутренний луч угла  $NMD$ .

Но тогда одна из прямых  $CD$  или  $C'D'$  пересекает прямую  $AB$ , что противоречит определению параллельности прямых. ■

3. Пусть  $M$  — точка, не лежащая на прямой  $a$ , а  $MN$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $M$  на прямую  $a$ . Выберем на прямой  $a$  две точки  $A$  и  $B$  так, чтобы  $A - N - B$ . Из теоремы 2 следует, что через точку  $M$  проходит единственная прямая  $CD$ , параллельная направленной прямой  $AB$ , и единственная прямая  $EF$ , параллельная направленной прямой  $BA$  (рис. 218).

В ходе доказательства теоремы 2 мы установили, что углы  $DMN$  и  $FMN$  острые, поэтому  $CD$  и  $EF$  — различные прямые. Докажем, что  $\angle DMN = \angle FMN$ . Пусть, напротив,  $\angle DMN \neq \angle FMN$ , например  $\angle DMN > \angle FMN$ . Рассмотрим луч  $MF'$ , симметричный лучу  $MF$  относительно прямой  $MN$  (луч  $MF'$  не изображен на рис. 218). Этот луч является внутренним лучом угла  $DMN$ . Так как  $MF$  не пересекает прямую  $AB$ , то и  $MF'$  не пересекает эту прямую. Но это противоречит определению параллельности прямых  $CD$  и  $AB$ .

Таким образом, через каждую точку  $M$ , не лежащую на данной прямой  $a$ , проходят две прямые, параллельные прямой  $a$ , в двух разных направлениях. Эти прямые образуют равные острые углы с перпендикуляром  $MN$ , проведенным из точки  $M$  к прямой  $a$ . Каждый из этих углов называется *углом параллельности* в точке  $M$  относительно прямой  $a$ .

Докажем, что величина угла параллельности вполне определяется расстоянием от точки  $M$  до прямой  $a$ . Для этого обратимся к рисунку 219. На этом рисунке  $NMD$  — угол параллельности в точке  $M$  относительно прямой  $a$ , а  $N'M'D'$  — угол параллельности в точке  $M'$  относительно прямой  $a'$ ,  $\alpha = \widehat{NMD}$ ,  $x = MN$ ,  $\alpha' = \widehat{N'M'D'}$ ,  $x' = M'N'$ . Докажем, что если  $x = x'$ , то  $\alpha = \alpha'$ . Пусть, напротив,  $\alpha' \neq \alpha$ , например  $\alpha' > \alpha$ . Тогда существует внутренний луч  $h'$  угла  $N'M'D'$ , такой, что угол между лучами  $M'N'$  и  $h'$  равен  $\alpha$ . Луч  $h'$  пересекает прямую  $a'$  в некоторой точке  $F'$ . На прямой  $a$  от точки  $N$  отложим отрезок  $NF = N'F'$  так, чтобы точки  $F$  и  $D$  лежали в одной полуплоскости с границей  $MN$ . Получим треугольник  $MNF$ , равный треугольнику  $M'N'F'$  (треугольник  $MNF$  на рис. 219 не изображен). Так

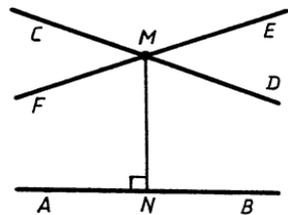


Рис. 218

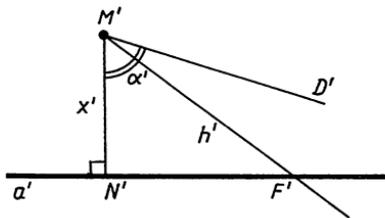
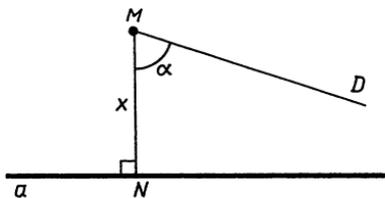


Рис. 219

как  $\widehat{NMF} = \alpha$ , то лучи  $MD$  и  $MF$  совпадают. Мы пришли к выводу, что прямые  $MD$  и  $a$  пересекаются. Это противоречит определению параллельных прямых. Таким образом,  $\alpha = \alpha'$ .

Итак,  $\alpha$  — функция от  $x$ :  $\alpha = \Pi(x)$ . Она называется *функцией Лобачевского* и играет существенную роль в гиперболической геометрии. Из предыдущего изложения ясно, что функция  $\Pi(x)$  определена

для каждого положительного  $x$  и что  $0 < \Pi(x) < \frac{\pi}{2}$ .

Н. И. Лобачевский получил аналитическое выражение этой функции:

$$\operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}},$$

где  $k$  — некоторое положительное число.

Из этой формулы следует, что  $\Pi(x)$  — монотонно убывающая непрерывная функция. Из этой формулы следует также, что  $\Pi(x)$  принимает все значения, лежащие между  $0$  и  $\frac{\pi}{2}$ . Другими словами, *любой*

*острый угол является углом параллельности в некоторой точке относительно данной прямой.*

Таким образом, в геометрии Лобачевского существует зависимость между угловыми и линейными величинами; в этом существенное отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида. Так, в геометрии Лобачевского нет подобия фигур; в частности, треугольники с соответственно равными углами равны (см. § 74, теорема 3). Еще одна особенность геометрии Лобачевского связана с единицей измерения длин. В геометрии Евклида существуют абсолютные константы угловых величин, например прямой угол или радиан, в то время как линейных абсолютных констант не существует. Для того чтобы длины отрезков выразить числами, необходимо выбрать единицу измерения длин. В качестве такой единицы может быть выбран произвольный отрезок. В противоположность этому в геометрии Лобачевского нет в этом необходимости, так как, имея естественную единицу измерения углов, можно условиться о выборе естественной единицы длин. Например, за единицу длины можно выбрать отрезок, которому соответствует угол параллельности, равный  $\frac{\pi}{4}$ .

## § 74. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского

1. Все теоремы о треугольниках, которые в евклидовой геометрии доказывают без помощи аксиомы параллельности, имеют место также в геометрии Лобачевского. Подавляющее большинство теорем, известных читателю из курса средней школы, относится именно к этому типу. Теоремы о равнобедренных треугольниках, три признака равенства треугольников, теорема о внешнем угле треугольника, теоремы о соотношениях между сторонами и углами, теоремы о пересечении биссектрис внутренних углов треугольника и о пересечении

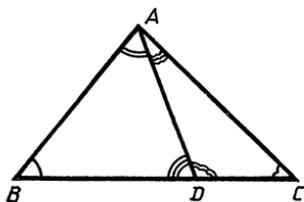


Рис. 220

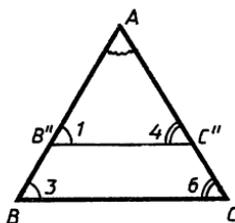


Рис. 221

медиан треугольника в одной точке<sup>1</sup> — вот далеко неполный перечень теорем, которые имеют место как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского.

Но треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского обладают рядом специфических свойств. Рассмотрим некоторые из них.

**Теорема 1.** Сумма углов любого треугольника меньше  $2d$ .

□ Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник. По первой теореме Саккери — Лежандра (§ 69, теорема 4)  $\sigma_{ABC} \leq 2d$ . Если предположить, что  $\sigma_{ABC} = 2d$ , то по теоремам 5 и 3 § 69 окажется справедливым V постулат, что противоречит аксиоме  $V^*$ . Следовательно,  $\sigma_{ABC} < 2d$ . ■

**Следствие.** Сумма углов треугольника непостоянна, т. е. не одна и та же для всех треугольников.

□ Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник, а  $D$  — точка на стороне  $BC$ . Простой подсчет показывает, что  $\sigma_{ABC} = \sigma_{ABD} + \sigma_{ACD} - 2d$  (рис. 220). Так как  $\sigma_{ACD} - 2d < 0$ , то  $\sigma_{ABC} < \sigma_{ABD}$ . ■

**Теорема 2.** Сумма углов выпуклого четырехугольника меньше  $4d$ .

□ Пусть  $ABCD$  — данный выпуклый четырехугольник. Проведем диагональ  $AC$  и разложим этот четырехугольник на два треугольника  $ABC$  и  $ADC$ . Тогда  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \sigma_{ABC} + \sigma_{ADC}$ . Но  $\sigma_{ABC} < 2d$  и  $\sigma_{ADC} < 2d$ , поэтому  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} < 4d$ . ■

**Теорема 3.** Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

□ Пусть в треугольниках  $ABC$  и  $A'B'C'$  имеем  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  $\angle C = \angle C'$ . Докажем сначала, что  $AB = A'B'$ . Предположим, что  $AB \neq A'B'$ ; для определенности допустим, что  $AB > A'B'$ . На лучах  $AB$  и  $AC$  возьмем точки  $B''$  и  $C''$  так, чтобы  $AB'' = A'B'$  и  $AC'' = A'C'$  (рис. 221). По первому признаку равенства треугольников имеем  $\triangle AB''C'' = \triangle A'B'C'$ , поэтому  $\angle 1 = \angle 2$ . По условию  $\angle 2 = \angle 3$ , следовательно,  $\angle 1 = \angle 3$ . Аналогично устанавливаем, что  $\angle 4 = \angle 6$ .

По предположению  $AB > A'B'$ , поэтому  $A - B'' - B$ , т. е. прямая  $B''C''$  пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$ . В силу равенства

<sup>1</sup> Интересно отметить, что прямые, содержащие высоты треугольника на плоскости Лобачевского, не всегда пересекаются в одной точке.

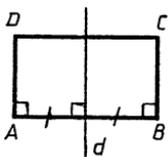


Рис. 222

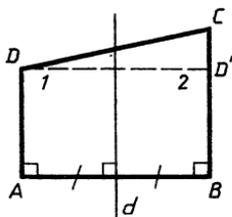


Рис. 223

$\angle 1 = \angle 3$  прямые  $B''C''$  и  $BC$  не пересекаются (см. § 69, лемма 1), следовательно, по аксиоме Паша прямая  $B''C''$  пересекает сторону  $AC$  треугольника  $ABC$ , и значит,  $A - C'' - C$ . Отсюда следует, что четырехугольник  $BB''C''C$  выпуклый. Из равенств  $\angle 1 = \angle 3$  и  $\angle 4 = \angle 6$  следует, что сумма углов этого четырехугольника равна  $4d$ . Мы пришли в противоречие с теоремой 2. Значит,  $AB = A'B'$ . По второму признаку равенства треугольников  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ . ■

2. Выпуклый четырехугольник называется *двупрямоугольником*, если два угла, прилежащие к одной стороне, прямые. Если  $ABCD$  — двупрямоугольник с прямыми углами  $A$  и  $B$ , то сторона  $AB$  называется *основанием*, а стороны  $AD$  и  $BC$  — *боковыми сторонами*. Двупрямоугольник с равными боковыми сторонами называется *четыреугольником Саккери*.

Рассмотрим некоторые свойства двупрямоугольников.

1<sup>0</sup>. Если  $ABCD$  — четырехугольник Саккери с основанием  $AB$ , то  $\angle C = \angle D$  и каждый из углов  $C$  и  $D$  острый.

Рассмотрим симметрию относительно серединного перпендикуляра  $d$  к отрезку  $AB$  (рис. 222). При этом, очевидно, точка  $A$  перейдет в точку  $B$ , а луч  $AD$  — в луч  $BC$  (так как  $\angle A = \angle B = d$ ). В силу равенства  $AD = BC$  точка  $D$  перейдет в точку  $C$  и, следовательно, угол  $ADC$  — в угол  $BCD$ . Таким образом,  $\angle C = \angle D$ .

По теореме 2  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} < 4d$ , поэтому  $\hat{C} + \hat{D} < 2d$ . Но так как  $\angle C = \angle D$ , то каждый из этих углов острый.

2<sup>0</sup>. Если в двупрямоугольнике  $ABCD$  с основанием  $AB$   $AD < BC$ , то  $\angle C < \angle D$ .

Рассмотрим симметрию относительно серединного перпендикуляра  $d$  к отрезку  $AB$ . При этом, очевидно, точка  $A$  перейдет в точку  $B$ , а точка  $D$  — в точку  $D'$  луча  $BC$  (рис. 223). Так как  $AD < BC$  и  $AD = BD'$ , то  $BD' < BC$ , поэтому  $D'$  — точка отрезка  $BC$ . Четырехугольник  $ADD'B$  является четырехугольником Саккери, поэтому по свойству 1<sup>0</sup>  $\angle 1 = \angle 2$ . Но  $\angle 1 < \angle ADC$ , а  $\angle 2 > \angle DCB$  ( $\angle 2$  — внешний угол треугольника  $CDD'$ ). Таким образом,  $\angle DCB < \angle ADC$ .

Предлагаем учащимся, используя свойства 1<sup>0</sup> и 2<sup>0</sup>, самостоятельно доказать следующее обратное утверждение:

3<sup>0</sup>. Если в двупрямоугольнике  $ABCD$  с основанием  $AB$   $\angle C < \angle D$ , то  $AD < BC$ .

## § 75. Взаимное расположение двух прямых на плоскости Лобачевского

1. Докажем следующую лемму.

*Лемма 1.* Если  $AB \parallel CD$ , то существует ось симметрии прямых  $AB$  и  $CD$ .

□ Пусть  $P$  и  $Q$  — точки, лежащие соответственно на прямых  $AB$

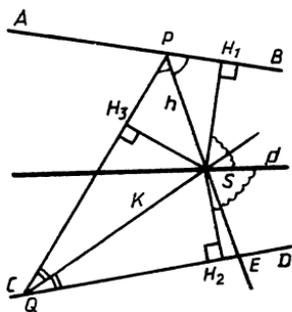


Рис. 224

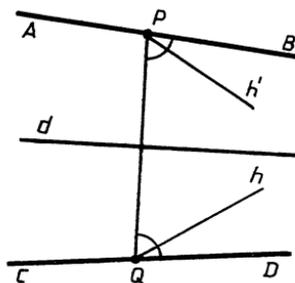


Рис. 225

и  $CD$ , а  $h$  и  $k$  — биссектрисы углов  $QPB$  и  $PQD$  (рис. 224). Так как  $AB \parallel CD$ , то луч  $h$  пересекает луч  $QD$  в некоторой точке  $E$ . Тогда луч  $k$  пересекает отрезок  $PE$  в некоторой точке  $S$ .

Докажем, что точка  $S$  равноудалена от прямых  $AB$  и  $CD$ . Обозначим через  $SH_1$ ,  $SH_2$  и  $SH_3$  — перпендикуляры, проведенные из точки  $S$  к прямым  $AB$ ,  $CD$  и  $PQ$  (рис. 224). Так как  $SH_1 = SH_3$  и  $SH_2 = SH_3$ , то  $SH_1 = SH_2$ . Теперь ясно, что прямая  $d$ , содержащая биссектрису угла  $H_1SH_2$ , является осью симметрии прямых  $AB$  и  $CD$ . ■

Пользуясь этой леммой, легко доказать, что отношение параллельности направленных прямых удовлетворяет условию симметричности, т. е. справедлива теорема.

**Т е о р е м а 1.** Если  $AB \parallel CD$ , то  $CD \parallel AB$ .

□ Пусть  $P$  — произвольная точка прямой  $AB$ , а  $d$  — ось симметричных прямых  $AB$  и  $CD$  (см. лемму 1). Тогда точка  $Q$ , симметричная точке  $P$  относительно прямой  $d$ , лежит на прямой  $CD$  (рис. 225). Для доказательства теоремы воспользуемся признаком параллельности прямых (§ 73, теорема 1). Прямые  $AB$  и  $CD$  не пересекаются, поэтому достаточно доказать, что любой внутренний луч угла  $PQD$  пересекает луч  $PB$ .

Пусть  $h$  — произвольный внутренний луч угла  $PQD$ , а  $h'$  — луч, симметричный лучу  $h$  относительно прямой  $d$ . Так как угол  $PQD$  симметричен углу  $QPB$  и  $h$  — внутренний луч угла  $PQD$ , то  $h'$  — внутренний луч угла  $QPB$ . Но  $AB \parallel CD$ , поэтому луч  $h'$  пересекает луч  $QD$ . Отсюда следует, что и луч  $h$  пересекает луч  $PB$ . ■

В § 93 мы докажем, что отношение параллельности направленных прямых удовлетворяет также условию транзитивности, т. е. справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а 2.** Если  $AB \parallel EF$ ,  $EF \parallel CD$  и прямые  $AB$  и  $CD$  не совпадают, то  $AB \parallel CD$ .

2. Условимся называть две (ненаправленные) прямые  $a$  и  $b$  *параллельными*, если на этих прямых можно выбрать направления так, чтобы они были параллельны.

Две прямые на плоскости Лобачевского называются *расходящимися* (или *сверхпараллельными*), если они не пересекаются и не параллельны. Легко видеть, что через каждую точку  $M$ , не лежащую

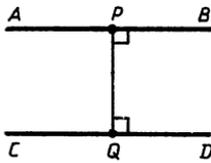


Рис. 226

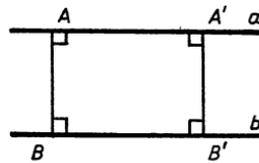


Рис. 227

на прямой  $a$ , проходит бесконечное множество прямых, каждая из которых расходуется с прямой  $a$ . В самом деле, пусть прямые  $CD$  и  $EF$  параллельны прямой  $a$  в разных направлениях (см. рис. 218). Тогда любая прямая, проходящая через точку  $M$  внутри вертикальных углов  $SMF$  и  $EMD$ , расходится с прямой  $a$ .

Таким образом, на плоскости Лобачевского в отличие от плоскости Евклида имеются три случая взаимного расположения двух прямых: прямые пересекаются, параллельны или расходятся.

**Т е о р е м а 3.** *Две прямые, имеющие общий перпендикуляр, расходятся.*

□ Пусть  $AB$  и  $CD$  — данные прямые, а  $PQ$  — их общий перпендикуляр (рис. 226). По лемме 1 § 69 прямые  $AB$  и  $CD$  не пересекаются. Они не могут быть параллельными, так как если допустить, что они параллельны, то прямые углы  $APQ$  и  $BPQ$  должны быть углами параллельности в точке  $P$  относительно прямой  $CD$ . Но угол параллельности всегда острый, поэтому наше допущение неверно; значит,  $AB$  и  $CD$  — расходящиеся прямые. ■

**С л е д с т в и е.** *На плоскости Лобачевского не существует общего перпендикуляра двух параллельных прямых.*

Заметим, что две прямые не могут иметь более чем один общий перпендикуляр. Действительно, если, например, прямые  $a$  и  $b$  имеют два общих перпендикуляра  $AB$  и  $A'B'$  (рис. 227), то выпуклый четырехугольник  $ABB'A'$  имеет четыре прямых угла. Но это противоречит теореме 2 § 74. Таким образом, если две прямые имеют общий перпендикуляр, то он единственный и по теореме 3 эти прямые расходятся. Ниже, в § 93, будет доказана обратная теорема: любые две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр.

3. В заключение докажем, что на плоскости Лобачевского расстояние от переменной точки одной из двух параллельных или расходящихся прямых до другой прямой есть переменная величина. Для этого предварительно докажем следующую лемму.

**Л е м м а 2.** *Пусть лучи  $PP'$  и  $QQ'$  лежат в одной полуплоскости с границей  $PQ$ ,  $\angle PQQ'$  прямой, а  $\angle QPP'$  прямой или тупой*

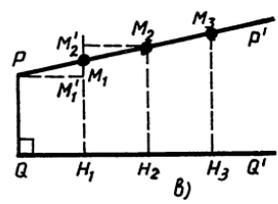
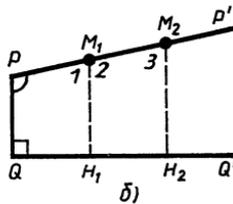
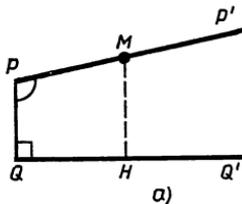


Рис. 228

(рис. 228, а). Тогда если  $M$  — переменная точка луча  $PP'$ , а  $H$  — проекция этой точки на прямую  $QQ'$ , то функция  $MH = f(MP)$  является монотонной, неограниченно возрастающей функцией.

□ Докажем сначала, что  $f$  — монотонно возрастающая функция. Для этого возьмем на луче  $PP'$  две точки  $M_1$  и  $M_2$  так, чтобы  $PM_1 < PM_2$ , и докажем, что  $M_1H_1 < M_2H_2$ , где  $H_1$  и  $H_2$  — проекции точек  $M_1$  и  $M_2$  на прямую  $QQ'$ . Рассмотрим три двупрямоугольника с основаниями  $QH_1$ ,  $QH_2$ ,  $H_1H_2$ , изображенные на рисунке 228, б. Так как  $PM_1 < PM_2$ , то  $P - M_1 - M_2$ . Применив теорему 2 § 74 к двупрямоугольникам с основаниями  $QH_1$  и  $QH_2$  и учитывая, что  $\angle P$  прямой или тупой, мы приходим к выводу, что углы 1 и 3 острые. Так как  $\angle 1$  и  $\angle 2$  — смежные углы, то  $\angle 2$  тупой. Тогда по свойству 3<sup>0</sup> § 74 в двупрямоугольнике с основанием  $H_1H_2$  имеем  $H_1M_1 < H_2M_2$ . Таким образом,  $f$  — монотонно возрастающая функция.

Докажем теперь, что  $f$  — неограниченно возрастающая функция. Для этого возьмем на луче  $PP'$  точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , следующие друг за другом так, чтобы  $PM_1 = M_1M_2 = \dots = M_{n-1}M_n$ , где  $n > 2$ , и рассмотрим проекции  $H_1, H_2, \dots, H_n$  этих точек на прямую  $QQ'$  (рис. 228, в). По доказанному  $PQ < M_1H_1 < M_2H_2$ . Отложим на луче  $H_1M_1$  отрезки  $H_1M'_1$  и  $H_1M'_2$ , равные соответственно отрезкам  $PQ$  и  $M_2H_2$ . Тогда, очевидно,  $M'_1 - M_1 - M'_2$ .

В треугольниках  $PM_1M'_1$  и  $M_2M_1M'_2$  имеем  $PM_1 = M_2M_1$  и  $\angle PM_1M'_1 = \angle M_2M_1M'_2$ , но  $\angle PM'_1M_1$  первого треугольника тупой (как угол, смежный с углом  $M'_1$  четырехугольника Саккери с основанием  $QH_1$ ), а  $\angle M_2M'_2M_1$  второго треугольника острый (как угол четырехугольника Саккери с основанием  $H_1H_2$ ). Отсюда следует, что  $M'_1M_1 < M'_2M_1$ . Если обозначить  $M_1M'_1$  через  $\delta$ , то  $M_1H_1 = PQ + \delta$ ,  $M_2H_2 = M_1H_1 + M'_2M_1 > PQ + 2\delta$ . Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что  $M_3H_3 > PQ + 3\delta$ , ...,  $M_nH_n > PQ + n\delta$ . Отсюда следует, что  $f$  — неограниченно возрастающая функция. ■

Пусть  $AB$  и  $CD$  — расходящиеся прямые, а  $PQ$  — общий перпендикуляр этих прямых (рис. 229). Фигуры  $BPQD$  и  $APQC$  удовлетворяют условиям леммы 2, поэтому согласно этой лемме расстояние от переменной точки  $M$  прямой  $AB$  до прямой  $CD$  неограниченно возрастает, когда точка  $M$  удаляется от точки  $P$  как в одном, так и в другом направлении. Образно говоря, расходящиеся прямые неограниченно «расходятся» друг от друга по мере удаления от общего перпендикуляра.

Пусть теперь  $AB \parallel CD$ , а  $PQ$  — перпендикуляр, проведенный из точки  $P$  прямой  $AB$  на прямую  $CD$  (рис. 230). Так как  $\angle QPB$  острый, то смежный с ним  $\angle QPA$  тупой. Фигура  $APQC$  удовлетворяет усло-

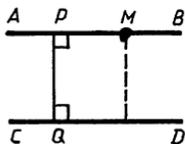


Рис. 229

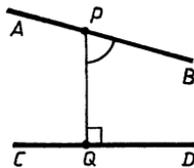


Рис. 230

виям леммы 2, поэтому согласно этой лемме расстояние от переменной точки  $M$  прямой  $AB$  до прямой  $CD$  неограниченно возрастает, когда точка  $M$  удаляется от точки  $P$  в сторону, противоположную направлению параллельности. Можно доказать, что если точка  $M$  удаляется от точки  $P$  в сторону параллельности, то это расстояние стремится к нулю. Образно говоря, параллельные прямые, неограниченно удаляясь друг от друга в одном направлении, асимптотически приближаются в другом.

## § 76. Окружность, эквидистанта и орицикл

1. На плоскости Лобачевского существуют три различных типа пучков, а именно: а) *пучок пересекающихся прямых*, т. е. множество всех прямых плоскости, проходящих через одну точку — центр пучка (рис. 231, а); б) *пучок расходящихся прямых*, т. е. множество всех прямых плоскости, перпендикулярных к данной прямой (рис. 231, б); в) *пучок параллельных прямых* — множество прямых, состоящее из некоторой направленной прямой и всех направленных прямых, параллельных ей (рис. 231, в).

Ясно, что если задан пучок, то через любую точку плоскости (отличную от центра пучка пересекающихся прямых) проходит одна и только одна прямая пучка.

С каждым пучком прямых связаны определенные линии, которые мы рассмотрим в следующих пунктах этого параграфа.

2. **О к р у ж н о с т ь.** Как известно из школьного курса геометрии, окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра окружности). Это определение относится к абсолютной геометрии, поэтому окружность — линия как евклидовой плоскости, так и плоскости Лобачевского. Многие теоремы об окружности, известные учащемуся из курса геометрии средней школы, доказываются без помощи аксиомы параллельных, поэтому они справедливы и на плоскости Лобачевского. Прежде всего отметим теорему о том, что любая прямая, лежащая в плоскости окружности, пересекается с ней не более чем в двух точках. Перечислим другие свойства окружности, которые

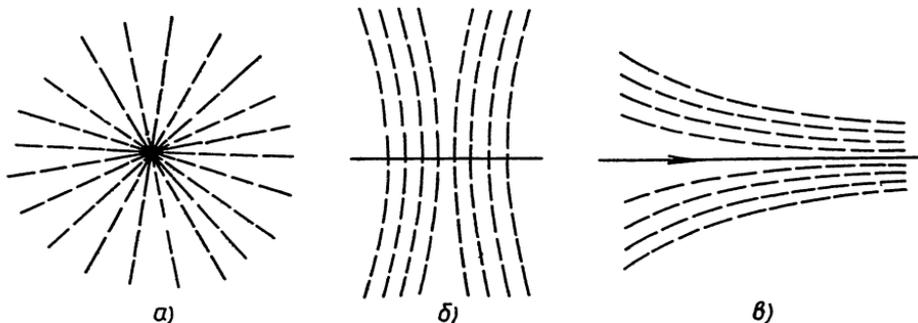


Рис. 231

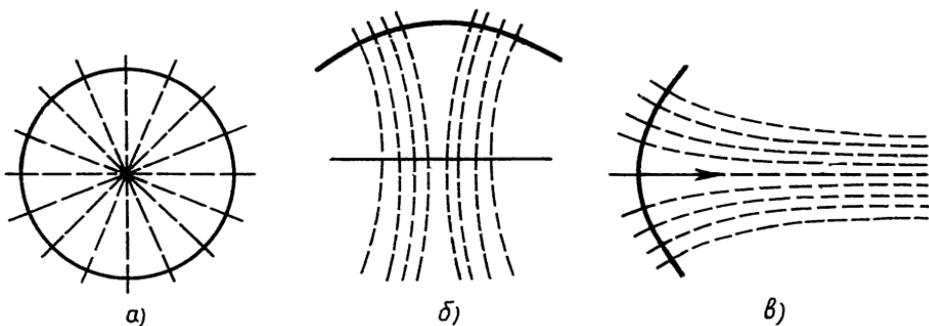


Рис. 232

относятся к абсолютной геометрии. При этом рассмотрим только те свойства, которые относятся к расположению точек окружности по отношению к пучку пересекающихся прямых с центром в центре окружности. Прямые этого пучка называются *осями окружности*.

1°. Окружность симметрична относительно любой своей оси.

2°. В каждой точке окружности существует касательная, которая перпендикулярна к оси, проходящей через точку касания.

Учитывая это свойство, мы можем говорить, что окружность пересекает свои оси под прямым углом или что окружность есть *ортогональная траектория* пучка прямых с центром в центре окружности (рис. 232, а).

Прямая  $AB$ , где  $A \in a$  и  $B \in b$ , называется *секущей равного наклона* к прямым  $a$  и  $b$ , если отрезок  $AB$  составляет с этими прямыми равные внутренние односторонние углы.

3°. Прямая, содержащая хорду окружности, отличную от диаметра, является секущей равного наклона к осям, проходящим через концы хорды.

4°. Серединный перпендикуляр к любой хорде окружности является ее осью.

Не все свойства окружности, известные нам из школьного курса геометрии, имеют место на плоскости Лобачевского. Например, теорема о том, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, является прямым углом, неверна на плоскости Лобачевского. В самом деле, пусть угол  $ACB$ , вписанный в окружность с центром  $O$ , опирается на диаметр  $AB$  (рис. 233). Проведем радиус  $OC$  и рассмотрим два равнобедренных треугольника  $OAC$  и  $OBC$ . Так как

$\angle A = \angle ACO$  и  $\angle B = \angle BCO$ , то  $\hat{A} + \hat{B} = \hat{ACO} + \hat{BCO} = \hat{ACB}$ . Следовательно,  $\sigma_{ABC} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{ACB} = 2\hat{ACB}$ . Значит,  $\hat{ACB} = \frac{1}{2}\sigma_{ABC}$ . Так как  $\sigma_{ABC} < 2d$ , то  $\hat{ACB} < d$ , т. е.  $\angle ACB$  — острый угол

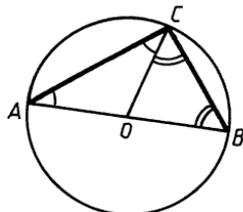


Рис. 233

3. *Эквидистанта*. *Эквидистантой* называется фигура, которая состоит из всех точек полу-

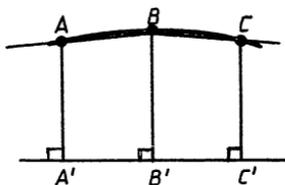


Рис. 234

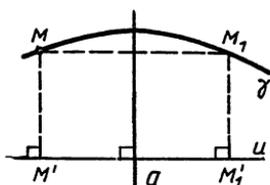


Рис. 235

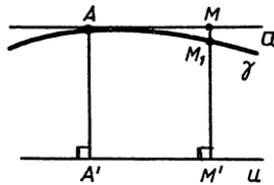


Рис. 236

плоскости с границей  $u$ , равноудаленных от этой прямой. Прямая  $u$  называется *базой* эквидистанты, а перпендикуляр, проведенный из любой точки эквидистанты на базу, — *высотой*. Высотой называется также длина  $h$  этого перпендикуляра.

С эквидистантой связан пучок расходящихся прямых — множество всех прямых, перпендикулярных к базе эквидистанты. Прямые этого пучка называются *осями эквидистанты*. Многие свойства эквидистанты аналогичны свойствам окружности.

Прежде всего убедимся в том, что эквидистанта — кривая линия.

**Т е о р е м а 1.** *Любая прямая, лежащая в плоскости эквидистанты, пересекается с эквидистантой не более, чем в двух точках.*

□ Допустим, что некоторая прямая имеет с эквидистантой три общие точки  $A, B$  и  $C$ , которые обозначены так, что  $A - B - C$ . Если  $A', B'$  и  $C'$  — проекции этих точек на базу эквидистанты, то по определению эквидистанты  $ABB'A'$  и  $BCC'B'$  — четырехугольники Саккери (рис. 234). По свойству 1<sup>0</sup> § 74 углы  $ABB'$  и  $B'BC$  острые. Но так как эти углы смежные, то мы пришли в противоречие с теоремой о смежных углах. ■

Рассмотрим другие свойства эквидистанты.

1<sup>0</sup>. *Эквидистанта симметрична относительно любой своей оси.*

□ Пусть  $\gamma$  — данная эквидистанта с базой  $u$ , а  $a$  — одна из ее осей (рис. 235). Возьмем произвольную точку  $M \in \gamma$ , рассмотрим точку  $M_1$ , симметричную точке  $M$  относительно прямой  $a$ , и докажем, что  $M_1 \in \gamma$ . Если  $M'$  и  $M_1'$  — проекции точек  $M$  и  $M_1$  на прямую  $u$ , то, очевидно,  $M'$  и  $M_1'$  симметричны относительно прямой  $a$ , поэтому  $MM' = M_1M_1'$ . Отсюда и следует, что  $M_1 \in \gamma$ . ■

2<sup>0</sup>. *В каждой точке эквидистанты существует касательная, которая перпендикулярна к оси, проведенной через точку касания.*

□ Пусть  $A$  — произвольная точка эквидистанты  $\gamma$ , а  $A'$  — проекция этой точки на базу  $u$  (рис. 236). Проведем через точку  $A$  прямую  $a$ , перпендикулярную к прямой  $AA'$ . Прямые  $a$  и  $u$  имеют общий перпендикуляр, поэтому они являются расходящимися прямыми. Так как расстояние от любой точки  $M$  прямой  $a$ , отличной от  $A$ , до прямой  $b$  больше чем  $AA'$ , то  $A$  — единственная общая точка прямой  $a$  и эквидистанты  $\gamma$ .

Пусть  $M$  — переменная точка прямой  $a$ ,  $M'$  — проекция этой точки на прямую  $u$ , а  $M_1$  — точка пересечения отрезка  $MM'$  с эквидистантой (рис. 236). Если точка  $M$  приближается к точке  $A$ , то  $MM_1$  стремится к нулю, а секущая  $AM_1$  имеет предельное положение —

прямую  $a$ . Отсюда мы и заключаем, что  $a$  — касательная к эквидистанте  $\gamma$  в точке  $A$ . ■

Учитывая это свойство, мы можем говорить, что эквидистанта является ортогональной траекторией пучка расходящихся прямых, перпендикулярных к базе эквидистанты (см. рис. 232, б).

Хордой эквидистанты назовем любой отрезок, соединяющий две точки эквидистанты.

3<sup>0</sup>. Любая прямая, содержащая хорду эквидистанты, является секущей равного наклона к осям, проходящим через концы хорды.

□ Пусть  $AB$  — хорда данной эквидистанты, а  $AA'$  и  $BB'$  — ее оси, где  $A'$  и  $B'$  — проекции точек  $A$  и  $B$  на базу эквидистанты. По определению эквидистанты отрезки  $AA'$  и  $BB'$  равны, поэтому  $ABB'A'$  — четырехугольник Саккери. По свойству 1<sup>0</sup> § 74:  $\angle A'AB = \angle B'BA$ . ■

Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующее свойство, аналогичное свойству 4<sup>0</sup> окружности.

4<sup>0</sup>. Серединный перпендикуляр к любой хорде эквидистанты является ее осью.

4. О р и ц и к л. Прежде чем ввести понятие орицикла, докажем следующую лемму.

Л е м м а. Через каждую точку одной из двух параллельных прямых проходит одна и только одна секущая равного наклона к этим прямым.

□ Пусть  $AA' \parallel BB'$  и  $M \in AA'$ . Рассмотрим ось симметрии  $d$  прямых  $AA'$  и  $BB'$  (§ 75, лемма 1). Если  $M_1$  — точка прямой  $BB'$ , симметричная точке  $M$  относительно прямой  $d$ , то, очевидно,  $MM_1$  — секущая равного наклона к прямым  $AA'$  и  $BB'$  (рис. 237).

Для любой точки  $M_2$  прямой  $BB'$ , отличной от точки  $M_1$ , имеем  $\angle A'MM_2 \neq \angle B'M_2M$  (см. рис. 237, на этом рисунке  $\angle A'MM_2 < \angle A'MM_1$ ,  $\angle A'MM_1 = \angle B'M_1M$ , а  $\angle B'M_2M > \angle B'M_1M$ , так как  $\angle B'M_2M$  — внешний угол треугольника  $M_1MM_2$ ). Поэтому  $MM_1$  — единственная секущая равного наклона к прямым  $AA'$  и  $BB'$ . ■

Пусть на плоскости задан пучок параллельных прямых. На множестве  $\Omega$  всех точек плоскости введем бинарное отношение  $\Delta$  следующим образом. Будем говорить, что точки  $A$  и  $B$  находятся в отношении  $\Delta$ , если они совпадают или прямая  $AB$  является секущей равного наклона к прямым данного пучка, проходящим соответственно через точки  $A$  и  $B$ . Из этого определения непосредственно следует, что отношение  $\Delta$  удовлетворяет условиям рефлексивности и симметричности. Можно также доказать, что оно удовлетворяет условию транзитивности. Каждый элемент фактор-множества  $\Omega/\Delta$  называется орициклом (или предельной линией). Прямые данного пучка называются осями орицикла. Если задан пучок параллельных прямых, то через каждую точку  $A$  плоскости пройдет один и только один орицикл, который представляет собой класс эквивалентности  $K_A$  по отноше-

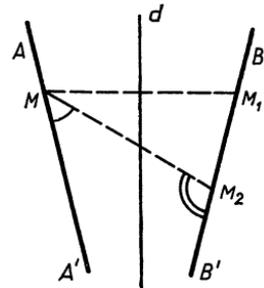


Рис. 237

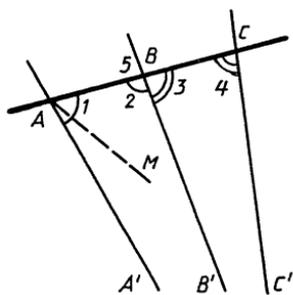


Рис. 238

нию  $\Delta$ . Это множество состоит из точки  $A$  и всех таких точек  $X$  плоскости, что  $AX$  — секущая равного наклона к прямым данного пучка, проходящим через точки  $A$  и  $X$ .

Из предыдущего изложения ясно, что если даны направленная прямая  $UV$  и на ней некоторая точка  $A$ , то тем самым однозначно определяется орицикл, проходящий через точку  $A$  с осью  $UV$ .

Свойства орицикла аналогичны свойствам окружности и эквидистанты.

**Теорема 2.** *Любая прямая, лежащая в плоскости орицикла, пересекается с орициклом не более чем в двух точках.*

□ Допустим, что некоторая прямая имеет с орициклом три общие точки  $A, B$  и  $C$ , которые обозначены так, что  $A - B - C$ . Обозначим через  $AA', BB'$  и  $CC'$  оси орицикла, проходящие через эти точки. По определению  $AA' \parallel BB'$  и  $BB' \parallel CC'$ . Отсюда следует, что точки  $A', B'$  и  $C'$  лежат в одной полуплоскости с границей  $AB$  (рис. 238).

По определению орицикла  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 3 = \angle 4$  (рис. 238). Так как параллельные прямые не имеют общего перпендикуляра, то углы 1, 2, 3 и 4 не являются прямыми углами. Ни один из этих углов не может быть также и тупым углом. В самом деле, если, например,  $\angle 1$  и  $\angle 2$  тупые, то  $\angle 3$ , смежный с  $\angle 2$ , острый (рис. 238). Отложив от луча  $AB$  угол  $MAB$ , равный  $\angle 3$ , как показано на рисунке 238, мы получаем луч  $AM$ , лежащий внутри угла  $A'AB$  и не пересекающий луч  $BB'$  (§ 69, лемма 1). Это противоречит определению параллельности прямых  $AA'$  и  $BB'$ .

Таким образом,  $\angle 2$  и  $\angle 3$  — острые углы. Но эти углы смежные, поэтому мы пришли в противоречие с теоремой о смежных углах. ■

Предлагаем учащемуся самостоятельно убедиться в том, что свойства  $1^0 - 4^0$ , сформулированные для окружности и эквидистанты, имеют место и для орицикла. В частности, орицикл симметричен относительно любой своей оси и является ортогональной траекторией пучка его параллельных осей (см. рис 232, в).

Можно доказать, что любые два орицикла на плоскости Лобачевского равны.

Как было отмечено в предыдущей главе, основным методом современной математики является аксиоматический метод, который берет свое начало от «Оснований геометрии» Д. Гильберта. Этот метод тесно связан с понятием математической структуры, с которым читатель познакомится в следующем параграфе.

### § 77. Понятие о математической структуре

1. Напомним понятие отношения. Пусть даны непустые множества  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Всякое подмножество  $\Delta \subset M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  называется  $n$ -арным (или  $n$ -местным) *отношением*, определенным во множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Говорят, что элементы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ( $m_i \in M_i$ ) находятся в отношении  $\Delta$ , если  $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \Delta$ .

Если  $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$  и, следовательно,  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = M^n$  ( $n$ -я декартова степень множества  $M$ ), то говорят, что  $n$ -арное отношение  $\Delta \subset M^n$  определено во множестве  $M$ .

В случае бинарного отношения ( $n = 2$ )  $\Delta \subset M_1 \times M_2$  вместо  $(m_1, m_2) \in \Delta$  пишут:  $m_1 \Delta m_2$ .

Заметим, что всякое отображение порождено некоторым отношением. В самом деле, пусть  $X$  и  $Y$  — непустые множества и дано отображение  $f: X \rightarrow Y$ , которое каждому элементу  $x \in X$  ставит в соответствие по некоторому закону определенный элемент  $f(x) \in Y$ . Тогда определено подмножество  $f(X) \subset Y$ , состоящее из образов  $f(x)$  всех элементов  $x$  из  $X$  ( $f(X)$  — образ множества  $X$  в данном отображении). Обозначим  $X \times f(X)$  через  $\Delta$ . Очевидно,  $\Delta \subset X \times Y$ , т. е.  $\Delta$  — бинарное отношение, определенное во множествах  $X$  и  $Y$ . При этом элементы  $x \in X$  и  $y \in Y$  находятся в отношении  $\Delta$ , если  $y = f(x)$ . Говорят, что отображение  $f$  порождено отношением  $\Delta$ .

Пусть на множестве  $E \neq \emptyset$  определена алгебраическая операция (внутренний закон композиции):

$$\varphi: E \times E \rightarrow E.$$

Здесь определено подмножество  $\Delta \subset E^3$ , образованное такими элементами  $(a, b, c)$  из  $E^3$ , для которых  $\varphi(a, b) = c$ . Мы видим, что тернарное ( $n = 3$ ) отношение  $\Delta$  порождает внутренний закон композиции  $\varphi$ .

Рассмотрим на множестве  $E$  внешний закон композиции со множеством операторов  $\Lambda$ :

$$g: \Lambda \times E \rightarrow E$$

(при этом мы будем применять мультипликативную запись  $f(\lambda, a) = \lambda a$ , где  $\lambda \in \Lambda$ ,  $a \in E$ ). В этом случае определено подмножество  $\Delta \subset \Lambda \times E \times E$ , образованное теми элементами  $(\lambda, a, b)$  из  $\Lambda \times E \times E$ , для которых  $\lambda a = b$ . Очевидно, тернарное отношение  $\Delta$  порождает внешний закон композиции  $g$ .

Таким образом, при помощи отношений, заданных во множествах, можно определять как отображения одних множеств в другие, так и законы композиции на множествах.

2. Если в декартовом произведении  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  мы выделим два различных подмножества  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , то получим два различных отношения, определенных на системе множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Свойства отношения  $\Delta_1$  будут в чем-то отличаться от свойств отношения  $\Delta_2$  (так как  $\Delta_1 \neq \Delta_2$ ).

Таким образом, на системе множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  существует столько различных отношений, сколько различных элементов содержит множество  $P(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n)$  всех подмножеств множества  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ . Этих отношений будет бесконечное множество, если хоть одно из множеств  $M_i$  бесконечно. Поэтому было бы безнадежным делом ставить такую задачу: изучить свойства всевозможных отношений, которые существуют на данной системе множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .

Математика (развитие которой, как известно, определяется потребностями практики) и не ставит такой задачи. Можно сказать, что математики поступают в известном смысле наоборот: ищут и изучают множества, на которых существуют отношения с наперед указанными (нужными нам) свойствами.

3. Возьмем конечную систему различных непустых множеств. Для простоты ограничимся тройкой множеств  $E, F, G$ . Обозначим через  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$  некоторые отношения на системе множеств  $E, F, G$ . Эти отношения мы не будем фиксировать как определенные подмножества декартовых произведений взятых множеств, а лишь потребуем, чтобы они обладали заданными свойствами:

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \tag{1}$$

которые мы явно формулируем.

Может случиться, что с заданными свойствами существует не одна система отношений  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\} = \sigma$  (т. е. не одна система подмножеств  $\Delta_j$  декартовых произведений множеств  $E, F, G$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ )), а несколько. Вот простой пример.

Пусть  $\Delta$  — алгебраическая операция на множестве  $\mathbf{R}$  вещественных чисел (выше отмечалось, что можно рассматривать операцию  $\Delta$  как отношение  $\Delta \subset \mathbf{R}^3$ ), и мы требуем, чтобы это отношение обладало только одним свойством  $A_1$  — свойством коммутативности: для любых двух чисел  $a, b \in \mathbf{R}$   $\Delta(a, b) = \Delta(b, a)$ . Можно указать две коммутативные операции на множестве  $\mathbf{R}$  (два значения отноше-

ния  $\Delta$ , обладающего свойством  $A_1$ ):  $\Delta'$  — сложение и  $\Delta''$  — умножение вещественных чисел.

Обозначим через  $T$  множество всех систем  $\sigma = \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$  отношений  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ , каждая из которых обладает заданными свойствами (1). Если  $T \neq \emptyset$ , то говорят, что элемент  $\sigma \in T$  определяет на множествах  $E, F, G$  структуру рода  $T$  (точнее, математическую структуру рода  $T$ ).

Явно сформулированные свойства (1), определяющие множество  $T$ , называются аксиомами структур рода  $T$ , а множества  $E, F, G$  — базой структур рода  $T$ . Всем структурам одного и того же рода дают специальное название: структура группы, структура  $n$ -мерного евклидова пространства и т. д.

**Пример 1** (структура группы). В геометрии этот род структур принято определять следующим образом.

База состоит из одного непустого множества  $E$ , система отношений состоит из одного отношения  $\Delta$ , которое должно удовлетворять четырем аксиомам:

$A_1$ :  $\Delta$  — алгебраическая операция на множестве  $E$ ;

$A_2$ : для любых элементов  $a, b, c$  из  $E$  имеем  $\Delta(\Delta(a, b), c) = \Delta(a, \Delta(b, c))$  (ассоциативность);

$A_3$ : существует элемент  $e$  в  $E$ , такой, что для любого  $a \in E$  имеем  $\Delta(a, e) = \Delta(e, a) = a$  (существование нейтрального элемента);

$A_4$ : для любого элемента  $a$  из  $E$  существует элемент  $a'$  из  $E$ , такой, что  $\Delta(a, a') = \Delta(a', a) = e$  (существование элемента  $a'$ , симметричного элементу  $a$ ).

Множеству, на котором определена структура данного рода, дают специальное название. Так, в рассмотренном примере мы скажем: « $E$  — группа», а полностью следовало бы сказать так: «На множестве  $E$  определена структура рода структуры группы».

**Пример 2** (структура евклидова пространства по Гильберту). По Гильберту, база структуры евклидова пространства состоит из трех множеств  $E, F, G$ . Элементы первого множества  $E$  называются *точками*, элементы множества  $F$  — *прямыми*, а элементы множества  $G$  — *плоскостями*.

На системе множеств  $E, F, G$  существуют отношения  $\Delta_1, \Delta_2$  и  $\Delta_3$ , которые обозначены соответственно словами «лежит на», «лежит между» и «равны». Список аксиом Гильберта состоит из двадцати аксиом:  $I_1$ — $I_8$ ,  $II_1$ — $II_4$ ,  $III_1$ — $III_5$ ,  $IV_1, IV_2, V$ , которые сформулированы в § 71, 72.

Эту систему аксиом коротко обозначим через  $\sum_H$ .

**Пример 3** (структура пространства Лобачевского). База структуры состоит из тех же трех множеств  $E, F, G$ , что и в примере 2, элементы которых называются соответственно *точками*, *прямыми*, *плоскостями*.

На системе множеств  $E, F, G$  существуют те же отношения  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , что и в примере 2, которые обозначены соответственно словами «лежит на», «лежит между» и «равны». Список аксиом состоит из двадцати аксиом:  $I_1$ — $I_8, II_1$ — $II_4, III_1$ — $III_5, IV_1, VI_2, V^*$ . Этот список отличается от списка аксиом Гильберта тем, что аксиома  $V$  за-

менена аксиомой  $V^*$ . Эту систему аксиом коротко обозначим через  $\sum_A$ .

Если база состоит из нескольких множеств, например из трех:  $E, F, G$ , то иногда одно из этих множеств, например  $E$ , играет основную роль в определяемых структурах. Тогда говорят, что эти структуры определены на множестве  $E$ , а множества  $F$  и  $G$  рассматривают как вспомогательные.

4. *Теория структур рода  $T$*  — это множество  $\mathcal{F}(T)$  предложений (теорем), каждое из которых является логическим следствием аксиом системы  $\sum$ , определяющих  $T$ . Так, мы имеем теорию групп, теорию колец, теорию (геометрию) аффинных пространств, геометрию евклидовых пространств и т. д. Вместо  $\mathcal{F}(T)$  иногда пишут:  $\mathcal{F}(\sum)$ .

Математика занимается изучением математических структур. Основным ее методом служит аксиоматический метод: структура каждого рода определяется при помощи соответствующего списка аксиом, а дальше чисто логическим путем строится теория структур этого рода.

Таким образом, хотя математика в наше время и является чрезвычайно обширной отраслью знаний, имеющей многочисленные разделы и на первый взгляд разобщенные направления исследования, мы можем сказать, что математика — это единая наука. Ее предмет исследования — множество математических структур; ее основной метод — аксиоматический метод.

## § 78. Интерпретации системы аксиом. Изоморфизм структур

1. Не на всяком множестве  $E$  можно определить любую структуру. Например, на множестве  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  нельзя определить структуру  $n$ -мерного векторного пространства над полем  $\mathbf{R}$ , но ту же структуру легко определить на множестве

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} (n \text{ раз}).$$

Следовательно, при определении математической структуры случай  $T = \emptyset$  может возникнуть по двум причинам:

а) данная база не допускает структуру требуемого рода, но при другом выборе базы такая структура существует;

б) не существует базы, допускающей требуемую структуру (при любом выборе базы оказывается, что  $T = \emptyset$ ).

В последнем случае говорят, что система аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_l$ , определяющая множество  $T$ , *противоречива*. Если же существует база, на которой можно задать рассматриваемую структуру (и значит,  $T \neq \emptyset$ ), то система аксиом называется *непротиворечивой*.

При изучении общей теории  $\mathcal{F}(T)$  структур рода  $T$  мы обычно не фиксируем базу, желая найти наиболее общие свойства структур этого рода. Но мы должны быть уверены, что существует база, допускающая структуру рассматриваемого рода, т. е. что соответствующая система аксиом непротиворечива.

Допустим, что мы нашли конкретное множество  $M$ , на котором можно придать конкретный смысл отношениям  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$  так, что все аксиомы  $A_1, A_2, \dots, A_l$  оказываются выполненными

(и значит, на множестве  $M$  определяется структура рода  $T$ ). Тогда говорят, что мы построили *интерпретацию системы аксиом*  $A_1, A_2, \dots, A_i$ , а самое множество  $M$  называют *моделью* структуры рода  $T$ .

**Пример 1.** Пусть  $M$  — множество квадратных матриц второго порядка с вещественными элементами. Вводя обычным путем сложение матриц и умножение их на числа из  $\mathbf{R}$ , мы видим, что  $M$  становится моделью 4-мерного векторного пространства над полем  $\mathbf{R}$ .

Таким образом, чтобы доказать непротиворечивость системы аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_i$ , достаточно построить хотя бы одну ее интерпретацию.

**З а м е ч а н и е.** Систему аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_i$ , определяющую структуры рода  $T$ , мы назвали непротиворечивой, если существует база, на которой можно определить структуру этого рода (т. е. если можно построить интерпретацию данной системы аксиом). Иногда такую систему аксиом называют *содержательно непротиворечивой*<sup>1</sup>.

2. Систему аксиом называют *внутренне непротиворечивой*, если из нее нельзя получить логическим путем два утверждения, из которых одно является отрицанием другого.

Чтобы решить вопрос о внутренней непротиворечивости данной системы аксиом, надо изучить, так сказать, самую технику логических выводов предложений из аксиом. Это одна из задач математической логики. Здесь мы отметим лишь следующее. Если установлено, что система аксиом содержательно непротиворечива, т. е. построена ее интерпретация, то проблема внутренней непротиворечивости этой системы аксиом сводится к вопросу о внутренней непротиворечивости системы тех понятий, которые были использованы при построении интерпретации.

Если известно, что эта система понятий внутренне непротиворечива, то, доказав содержательную непротиворечивость данной системы аксиом, мы устанавливаем тем самым и ее внутреннюю непротиворечивость.

Таким образом, если не исследовать технику логических выводов средствами математической логики, а оставаться только в рамках геометрии, то мы можем решать вопрос только о содержательной непротиворечивости данной системы аксиом.

3. Пусть система аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_i$  (содержательно) непротиворечива и, следовательно, определяет структуры рода  $T$  с основными отношениями  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ .

Пусть на множестве  $M'$  мы придали конкретный смысл  $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_k$  отношениям  $\Delta_j$  так, что все аксиомы  $A_1, \dots, A_i$  выполнены. Можно сказать, что на множестве  $M'$  определена структура  $\sigma' \in T$ . Пусть на множестве  $M''$  таким же путем определена структура  $\sigma'' \in T$  с конкретным смыслом  $\Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_k$  отношений  $\Delta_j$ . Структуры  $\sigma'$  и  $\sigma''$  (а также и модели  $M'$  и  $M''$ ) называются *изоморфными*, если существует биекция (называемая *изоморфизмом*)  $f: M' \rightarrow M''$ , такая, что  $(x', y', \dots, v') \in \Delta'_j$  тогда и только тогда, когда  $(f(x'), f(y'), \dots, f(v')) \in \Delta''_j$ , т. е. если элементы  $x', y', \dots, v' \in M'$  находятся в отноше-

<sup>1</sup> См.: Новиков П. С. Элементы математической логики.— М.: Наука, 1973.

нии  $\Delta'_i$ , то соответствующие элементы  $f(x')$ ,  $f(y')$ , ...,  $f(v')$   $\in M''$  находятся в отношении  $\Delta''_i$ .

**Пример 2.** Пусть  $T$  — род структуры абелевой группы. Рассмотрим две конкретные структуры этого рода:

$\sigma'$  — множество  $\mathbf{R}$  вещественных чисел как аддитивная группа;

$\sigma''$  — множество  $\mathbf{R}_+^*$  положительных чисел как мультипликативная группа.

Рассмотрим биекцию  $f: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$  по закону: для любого  $x \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $f(x) = \ln x$ .

Так как  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ , то  $f(xy) = f(x) + f(y)$ , следовательно, структуры  $\sigma'$  и  $\sigma''$  изоморфны (или, как говорят, изоморфны указанные группы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}_+^*$ ).

Изоморфизм множества  $M$  (на котором определена структура  $\sigma$ ) на себя называется *автоморфизмом* этого множества.

## § 79. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом

1. Как было отмечено выше, система аксиом называется *непротиворечивой*, если существует база, на которой можно задать рассматриваемую структуру рода  $T$ . Чтобы доказать непротиворечивость системы аксиом, достаточно построить какую-либо интерпретацию этой системы аксиом. При построении интерпретации мы должны использовать «достаточно надежные» понятия, относительно которых у нас есть уверенность, что их система внутренне непротиворечива. Только в этом случае можно утверждать, что наша система аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_l$  внутренне непротиворечива, и, значит, в теории  $\mathcal{T}(T)$  мы не получим двух теорем, отрицающих одна другую, как бы далеко мы ни развивали эту теорию.

Если система аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_l$  противоречива ( $T = \emptyset$ ), то она не определяет никакой структуры: не существует множеств  $E, F, G$  (базы), таких, чтобы какие-либо отношения на них обладали свойствами  $A_1, A_2, \dots, A_l$ . Следовательно, такая система аксиом бесполезна.

Таким образом, система аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_l$ , для которой мы собираемся строить теорию  $\mathcal{T}(T)$ , должна быть непротиворечивой. Это важнейшее требование, предъявляемое ко всякой системе аксиом.

Как уже отмечалось выше, вопрос о внутренней непротиворечивости системы аксиом может быть решен только средствами математической логики.

При построении интерпретаций систем аксиом, определяющих структуры, изучаемые в геометрии, мы используем различные числовые множества, считая «наиболее надежными» понятия, взятые из арифметики вещественных чисел. Поэтому при исследовании непротиворечивости системы аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_l$ , не прибегая к средствам математической логики, мы в лучшем случае можем прийти к утверждению такого вида: система аксиом  $A_1, A_2, \dots, A_l$  непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.

**Пример 1.** Докажем, что группа I аксиом Гильберта непротиворечива. Для этого построим интерпретацию системы  $\{I_1, I_2, \dots, I_8\}$ . Возьмем какое-нибудь множество  $\Omega$ , состоящее из четырех элементов  $a, b, c, d$  (пусть, например,  $a, b, c$  и  $d$  — различные числа). *Точкой* назовем каждый элемент этого множества; *прямой* — каждое из подмножеств, состоящее из двух элементов, т. е.  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$  — прямые; *плоскостью* — каждое из подмножеств, состоящее из трех элементов, т. е.  $\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}$  и  $\{b, c, d\}$  — плоскости. Будем говорить, что точка лежит на прямой (или на плоскости), если соответствующий элемент множества  $\Omega$  принадлежит соответствующему подмножеству. Например, точка  $a$  лежит на прямой  $\{a, c\}$ , но не лежит на плоскости  $\{b, c, d\}$ . Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что при этих соглашениях выполняются все аксиомы группы I Гильберта.

2. Мы знаем, что система аксиом  $\Sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  представляет собой перечень явно сформулированных требований, которым должны удовлетворять отношения  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$  на множествах  $E, F, G$  базы.

Пусть система аксиом  $\Sigma$  непротиворечива, и, значит, можно строить теорию  $\mathcal{T}(T)$  структур рода  $T$ . Возникает вопрос: все ли аксиомы системы  $\Sigma$  необходимы для определения данного рода структур, т. е. нельзя ли число этих аксиом уменьшить, не меняя  $T$ ?

Пусть  $A$  — одна из аксиом системы  $\Sigma$ . Аксиома  $A$  называется *зависимой* от остальных аксиом системы  $\Sigma$ , если предложение  $A$  является логическим следствием из остальных аксиом системы  $\Sigma$ . В этом случае аксиома  $A$  выполняется, как только выполняются аксиомы системы  $\Sigma' = \Sigma \setminus \{A\}$ . Ясно, что в этом случае любая интерпретация системы  $\Sigma'$  является также интерпретацией и системы  $\Sigma$  (т. е.  $\Sigma'$  определяет то же множество  $T$ ).

В системе  $\Sigma$  заменим аксиому  $A$  ее отрицанием  $\bar{A}$  (не  $A$ ) и обозначим новую систему аксиом через  $\Sigma^*$ , т. е.  $\Sigma^* = \Sigma' \cup \{\bar{A}\}$ . Всякая интерпретация системы  $\Sigma^*$  служит также интерпретацией и системы  $\Sigma'$ . Если аксиома  $A$  зависима от остальных аксиом системы  $\Sigma$ , то она должна выполняться в интерпретации системы  $\Sigma^*$ , в которой выполняется и аксиома  $\bar{A}$ . Но любое отношение  $\Delta_j$  не может обладать свойствами  $A$  и  $\bar{A}$  одновременно. Следовательно, если аксиома  $A$  зависима от остальных аксиом системы  $\Sigma$ , то система аксиом  $\Sigma^*$  противоречива (не существует ее интерпретаций).

Таким образом, чтобы доказать независимость аксиомы  $A \in \Sigma$  от остальных аксиом системы  $\Sigma$ , достаточно доказать, что система  $\Sigma^*$  содержательно непротиворечива.

**Пример 2.** Система аксиом, определяющая структуру абелевой группы, состоит из аксиом  $A_1 - A_4$  (§ 77, пример 1) и следующей аксиомы:

$A_5$ : для любых двух элементов  $a, b$  из  $E$  имеем  $\Delta(a, b) = \Delta(b, a)$ .

Докажем, что аксиома  $A_5$  независима от аксиом  $A_1 - A_4$ .

Для этого достаточно доказать непротиворечивость системы аксиом  $\Sigma^* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{A}_5\}$ , где  $\bar{A}_5$  — отрицание аксиомы  $A_5$ .

$\bar{A}_5$ : существует хотя бы одна пара элементов из  $E$ , таких, что  $\Delta(a, b) \neq \Delta(b, a)$ .

Непротиворечивость системы  $\Sigma^*$  следует из того, что существуют некоммутативные группы (например, мультипликативная группа невырожденных квадратных матриц порядка  $n \geq 2$  над полем  $\mathbf{R}$ ).

**Пример 3.** Рассмотрим группу I аксиом Гильберта (см. пример 1) и докажем, что аксиома  $I_1$  не зависит от аксиом  $I_2$ — $I_8$ . Для этого достаточно доказать непротиворечивость системы аксиом  $\Sigma^* = \{\bar{I}_1, I_2, I_3, \dots, I_8\}$ , где  $\bar{I}_1$  — отрицание аксиомы  $I_1$ : существуют по крайней мере две точки, через которые не проходит ни одна прямая.

Докажем, что система  $\Sigma^*$  непротиворечива. Для этого несколько видоизменим интерпретацию, рассмотренную в примере 1. Точки и плоскости интерпретируются так же, как и в примере 1, а прямыми назовем следующие пять подмножеств:  $\{a, c\}$ ,  $\{a, d\}$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\{b, d\}$  и  $\{c, d\}$ . Ясно, что при этом выполняются все аксиомы системы  $\Sigma^*$ : аксиома  $\bar{I}_1$  выполняется, так как через точки  $a$  и  $b$  не проходит ни одна прямая; выполнение аксиом  $I_2$ — $I_8$  очевидно.

Если аксиома  $A$  зависима от остальных аксиом системы  $\Sigma$ , то ее можно вычеркнуть из списка аксиом и строить теорию  $\mathcal{T}(T)$ , пользуясь лишь аксиомами системы  $\Sigma' = \Sigma \setminus \{A\}$ .

Конечно, желательно иметь такую систему аксиом  $\Sigma$ , в которой каждая аксиома независима от остальных. Такая система аксиом называется *независимой*. В некоторых случаях удается получить такую систему, вычеркивая из данной системы  $\Sigma$  последовательно те аксиомы, которые зависимы от остальных.

Но данная система  $\Sigma$  может быть такой, что для некоторых ее аксиом даже бессмысленно ставить вопрос об их зависимости или независимости от остальных. Так обстоит дело в аксиоматике Гильберта. Нельзя говорить о независимости некоторых аксиом Гильберта потому, что от их содержания зависит ряд других аксиом. Бессмысленно ставить вопрос о независимости аксиомы Паша от всех остальных аксиом, так как для самой формулировки, например, аксиом конгруэнтности мы должны иметь понятия луча и полуплоскости, а эти понятия вводятся на основании аксиомы Паша. Поэтому если мы исключим из рассмотрения аксиому Паша, то некоторые аксиомы группы III не могут быть сформулированы.

Но данная система  $\Sigma$  может быть такой, что для некоторых ее аксиом даже бессмысленно ставить вопрос об их зависимости или независимости от остальных. Так обстоит дело в аксиоматике Гильберта. Нельзя говорить о независимости некоторых аксиом Гильберта потому, что от их содержания зависит ряд других аксиом. Бессмысленно ставить вопрос о независимости аксиомы Паша от всех остальных аксиом, так как для самой формулировки, например, аксиом конгруэнтности мы должны иметь понятия луча и полуплоскости, а эти понятия вводятся на основании аксиомы Паша. Поэтому если мы исключим из рассмотрения аксиому Паша, то некоторые аксиомы группы III не могут быть сформулированы.

**З а м е ч а н и е.** Если аксиома  $A$  независима от остальных аксиом системы  $\Sigma$ , то система  $\Sigma^*$  непротиворечива и определяет структуры рода  $T^*$ , отличные от структур рода  $T$ , определяемых системой  $\Sigma$ . Именно с таким случаем мы имеем дело при рассмотрении системы аксиом Гильберта  $\Sigma_H = \{I, II, III, IV, V\}$  и системы аксиом геометрии Лобачевского  $\Sigma_L = \{I, II, III, IV, V^*\}$ , где  $V^*$  — аксиома Лобачевского, которая представляет собой отрицание  $V$  постулата. Как будет выяснено позже, обе системы аксиом  $\Sigma_H$  и  $\Sigma_L$  непротиворечивы.

**3.** Пусть дана непротиворечивая система аксиом  $\Sigma$ , описывающая свойства отношений  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ . Допустим, что существует аксиома  $A$ , которая удовлетворяет условиям:

а) аксиома  $A$  сформулирована в терминах теории  $\mathcal{T}(\Sigma)$ , и, следовательно, она не вводит новых отношений;

б) аксиома  $A$  независима от аксиом системы  $\Sigma$ ;

в) система аксиом  $\Sigma \cup \{A\}$  непротиворечива.

В этом случае система аксиом  $\Sigma$  называется *неполной* (точнее, дедуктивно неполной). Если же такой аксиомы  $A$  не существует, то система  $\Sigma$  называется *полной* (дедуктивно полной).

Пусть система аксиом  $\Sigma$  неполная, и, значит, существует аксиома  $A$ , удовлетворяющая указанным выше условиям а), б), в). По условию в) система аксиом  $\Sigma' = \Sigma \cup \{A\}$  непротиворечива, а так как  $A$  не зависит от аксиом системы  $\Sigma$  (по условию б)), то непротиворечива и система аксиом  $\Sigma'' = \Sigma \cup \{\bar{A}\}$ . Обозначим через  $M'$ ,  $M''$  какие-либо интерпретации систем  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$  соответственно. Так как  $\Sigma \subset \Sigma'$  и  $\Sigma \subset \Sigma''$ , то  $M'$  и  $M''$  являются также интерпретациями и системы аксиом  $\Sigma$ .

Но в интерпретации  $M'$  выполнена аксиома  $A$ , а в  $M''$  —  $\bar{A}$  (не  $A$ ), и, следовательно, интерпретации  $M'$  и  $M''$  (системы  $\Sigma$ ) не изоморфны. (Если предположить, что интерпретации  $M'$  и  $M''$  изоморфны, то мы получим, что основные отношения  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  должны обладать *одно- временно* как свойствами  $\{A_1, \dots, A_t, A\}$ , так и свойствами  $\{A_1, \dots, A_t, \bar{A}\}$ , что, конечно, невозможно.) Таким образом, если система аксиом  $\Sigma$  неполная, то для нее существуют неизоморфные интерпретации.

Из определения полной (неполной) системы аксиом следует, что всякая непротиворечивая система аксиом либо является полной, либо неполной. Поэтому если все интерпретации системы аксиом изоморфны (такую систему аксиом часто называют *категоричной*), то эта система заведомо полная. Но отсюда никак не следует, что если система аксиом дедуктивно полная, то она будет и категоричной.

Мы приходим к такому выводу: чтобы доказать, что данная система аксиом полная, достаточно доказать, что все ее интерпретации изоморфны.

**Пример 4.** Тот факт, что к системе аксиом  $A_1$ — $A_4$ , определяющей структуру группы, можно добавить независимую от этих аксиом аксиому  $A_5$ , которая не вводит новых отношений, и при этом получается непротиворечивая система  $A_1$ — $A_5$  (определяющая структуру абелевой группы), дает возможность заключить, что система аксиом  $A_1$ — $A_4$  групповой структуры неполная.

**Пример 5.** Рассмотрим систему аксиом абсолютной геометрии, т. е. систему  $\Sigma = \{I, II, III, IV\}$ , состоящую из первых четырех групп аксиом Гильберта. Эта система является неполной, так как к ней можно добавить независимую от аксиом этой системы аксиому  $V$  параллельности и при этом получается непротиворечивая система  $\Sigma_n$ .

Пусть система аксиом  $\Sigma$  непротиворечива и определяет структуры рода  $T$ . Если все эти структуры изоморфны (т. е. система аксиом  $\Sigma$  категоричная), то говорят, что теория  $\mathcal{T}(T)$  *однозначна*. Если же не все структуры рода  $T$  изоморфны (т. е. система аксиом  $\Sigma$  некатегоричная), то говорят, что теория  $\mathcal{T}(T)$  *многозначна*. В современной

математике нередко встречаются многозначные теории (например, теория групп).

**З а м е ч а н и е.** Дедуктивную полноту системы аксиом иногда определяют иначе. Пусть система аксиом  $\Sigma$  дедуктивно неполная в смысле данного выше определения. Что можно сказать о предложении  $A$ ? Из условия а), указанного в определении, мы знаем, что предложение  $A$  сформулировано в терминах теории  $\mathcal{T}(\Sigma)$ . Из условия б) следует, что предложение  $A$  недоказуемо в теории  $\mathcal{T}(\Sigma)$  (т. е. его нельзя вывести как логическое следствие аксиом  $\Sigma$ ). Из условия в) заключаем, что и предложение  $\bar{A}$  (не  $A$ ) недоказуемо в этой теории.

Говорят, что предложение  $A$  опровержимо, если  $\bar{A}$  доказуемо. Мы приходим к такому определению: система аксиом  $\Sigma$  называется дедуктивно неполной, если существует предложение  $A$ , сформулированное в терминах теории  $\mathcal{T}(\Sigma)$ , которое недоказуемо и неопровержимо в данной теории.

Если же для всякого предложения  $A$ , сформулированного в терминах понятий теории  $\mathcal{T}(\Sigma)$ , оказывается доказуемым либо это предложение, либо его отрицание  $\bar{A}$ , то система аксиом  $\Sigma$  является дедуктивно полной.

## § 80. Доказательство логической непротиворечивости геометрии Лобачевского

1. В этом параграфе мы докажем непротиворечивость системы аксиом планиметрии Лобачевского, состоящей из четырех групп  $I_{1-3}$ ,  $II_{1-4}$ ,  $III_{1-5}$ ,  $IV_{1-2}$  аксиом Гильберта (аксиомы абсолютной планиметрии) и аксиомы  $V^*$  Лобачевского. При решении этой задачи предполагается, что евклидова геометрия (т. е. система аксиом  $\Sigma_N$  Гильберта) непротиворечива. Мы построим из объектов евклидовой плоскости модель плоскости Лобачевского, которая называется *евклидовой моделью Кэли — Клейна*.

Рассмотрим на евклидовой плоскости некоторую окружность  $\omega$  с центром  $O$  радиуса  $r = 1$  и назовем ее *абсолютом*. Обозначим через  $\Omega$  круг с границей  $\omega$ , а через  $\dot{\Omega}$  множество внутренних точек этого круга.

Введем следующие соглашения. *Неевклидовой точкой* назовем любую евклидову точку  $M \in \dot{\Omega}$ , а *неевклидовой прямой* — любую хорду (без концов) окружности  $\omega$ . Отношения «принадлежность» и «лежать между» понимаем в обычном смысле. Неевклидовы прямые будем обозначать так:  $UV$ ,  $U_1V_1$  и т. д., предполагая, что  $U$ ,  $V$ ,  $U_1$ ,  $V_1 \in \omega$ . Таким образом, неевклидовыми точками прямой  $UV$  будут те и только те евклидовы точки, которые лежат между точками  $U$  и  $V$ .

Нетрудно убедиться в том, что при этих соглашениях выполняются все аксиомы  $I_{1-3}$ ,  $II_{1-4}$  Гильберта. Проверим в качестве примера аксиому  $II_2$  (см. § 71). Пусть  $A$  и  $B$  — две неевклидовы точки, а  $UV$  — неевклидова прямая, на которой они лежат. Так как  $A$  и  $B$  — внутренние точки хорды  $UV$ , то на этой хорде существует хотя бы одна внутренняя точка  $C$ , такая, что  $A - B - C$ . Отсюда мы заключаем, что существует по крайней мере одна неевклидова точка  $C$ , такая, что неевклидова точка  $B$  лежит между неевклидовыми точками  $A$  и  $C$ .

Так как в построенной модели выполняются все аксиомы групп I, II Гильберта, то выполняются и все следствия из этих аксиом, в частности имеют место теоремы, с помощью которых вводятся понятия луча и полуплоскости. Ясно, что неевклидовым лучом, исходящим из точки  $C$ , является множество всех внутренних точек произвольной *полу хорды*  $CU$  окружности  $\omega$  ( $CU$  — евклидов отрезок, где  $C$  — внутренняя точка круга  $\Omega$ , а  $U$  — точка на его границе). Неевклидовой полуплоскостью является множество всех внутренних точек какого-нибудь сегмента круга  $\Omega$ .

2. Для того чтобы в нашей модели определить равенство отрезков и углов, введем ряд вспомогательных понятий. Напомним, что на евклидовой плоскости простым отношением трех точек  $A, B$  и  $C$ , лежащих на одной прямой, называется число  $(AB, C) = \lambda$ , такое, что  $\vec{AC} = \lambda\vec{CB}$ , а сложным отношением четырех точек  $A, B, C, D$ , лежащих на одной прямой, — число  $(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}$ . Из этого определения непосредственно вытекают следующие свойства.

1<sup>o</sup>. Если  $(AB, CD) = (AB, CD')$ , то точки  $D$  и  $D'$  совпадают.

2<sup>o</sup>. Для любых четырех точек  $A, B, C, D$  прямой имеем  $(AB, CD) = (CD, AB) = (BA, DC) = (DC, BA)$ .

Если четыре точки на прямой заданы своими координатами  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$  и  $M_4(x_4, y_4)$ , то

$$(M_1M_2, M_3M_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)} = \frac{(y_1 - y_3)(y_4 - y_2)}{(y_3 - y_2)(y_1 - y_4)}. \quad (1)$$

Одна из этих формул теряет смысл, если данные точки лежат на прямой, параллельной одной из координатных осей.

Биективное отображение  $f: \Omega \rightarrow \Omega$  назовем  $\Lambda$ -преобразованием, если выполнены следующие условия.

а) Внутренние точки круга  $\Omega$  переходят во внутренние точки этого же круга, а граничные точки этого круга — в граничные точки.

б) Любая хорда окружности  $\omega$  переходит в некоторую хорду этой же окружности, и при этом сохраняется сложное отношение соответственных точек.

Рассмотрим примеры  $\Lambda$ -преобразований.

**Пример 1.** Любое движение евклидовой плоскости, имеющее центр абсолюта своей инвариантной точкой, индуцирует во множестве  $\Omega$  некоторое  $\Lambda$ -преобразование. В частности, тождественное преобразование множества  $\Omega$ , вращение вокруг центра  $O$  круга  $\Omega$ , отражение от любого диаметра круга  $\Omega$  являются примерами  $\Lambda$ -преобразований.

**Пример 2.** Пусть отображение  $f: \Omega \rightarrow \Omega$  в системе координат  $Oxy$  задано формулами

$$x' = \frac{a - x}{1 - ax}, \quad y' = \frac{y\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax}, \quad \text{где } |a| < 1. \quad (2)$$

Так как для точек множества  $\Omega$  —  $-1 \leq x \leq 1$ , то  $1 - ax \neq 0$ , поэтому каждая точка множества  $\Omega$  имеет образ. Из формул (2) получаем:

$$1 - x'^2 - y'^2 = \frac{1 - a^2}{(1 - ax)^2} (1 - x^2 - y^2), \quad (3)$$

$$x = \frac{a - x'}{1 - ax'}, \quad y = \frac{y'\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax'}. \quad (4)$$

Из равенства (3) следует, что точки абсолюта  $\omega$  при отображении  $f$  переходят в точки абсолюта, а точки множества  $\dot{\Omega}$  — в точки того же множества  $\dot{\Omega}$ . Далее, из равенств (4) мы заключаем, что каждая точка  $(x', y')$  множества  $\Omega$  имеет единственный прообраз  $(x, y)$ , поэтому отображение (3) является биекцией множества  $\Omega$ .

Отметим, что преобразование  $f$ , как показывают формулы (2) и (4), является инволютивным, т. е.  $f^{-1} = f$ .

Докажем, что для преобразования  $f$  выполняются также условия б). Если точки  $M_1, M_2, M_3 \in \Omega$  лежат на прямой  $Ax + By + C = 0$ , то, используя формулы (4), мы убеждаемся в том, что их образы  $M'_1, M'_2, M'_3 \in \Omega$  также лежат на некоторой прямой. Таким образом, если  $UV$  — некоторая хорда окружности  $\omega$ , а  $U' = f(U), V' = f(V)$ , то все точки хорды  $UV$  переходят в точки хорды  $U'V'$ . Но так как  $f^{-1} = f$ , то все точки хорды  $U'V'$  переходят в точки хорды  $UV$ . Таким образом, хорда  $UV$  переходит в хорду  $U'V'$ .

Остается доказать, что преобразование (2) сохраняет сложное отношение четырех точек. Пусть  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4)$  — четыре точки, лежащие на одной прямой, пересекающей ось  $Oy$ , а  $M'_i(x'_i, y'_i), i = 1, 2, 3, 4$ , — их образы. Используя первую из формул (4), находим:

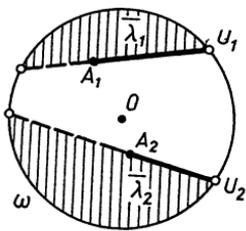


Рис. 239

$$x_i - x_j - \frac{a^2 - 1}{(1 - ax_i)(1 - ax_j)}(x'_i - x'_j),$$

где  $i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$ .

Отсюда, применяя формулу (1), получаем  $(M_1M_2, M_3M_4) = (M'_1M'_2, M'_3M'_4)$ . Если точки  $M_i$  лежат на прямой, параллельной оси  $Oy$ , или на оси  $Oy$ , то, используя вторую из формул (4), приходим к тому же выводу.

Итак, доказано, что формулами (2) задано инволютивное  $\Lambda$ -преобразование.

3. Рассмотрим некоторые свойства  $\Lambda$ -преобразований. Из определения  $\Lambda$ -преобразования непосредственно следует утверждение.

- 1<sup>0</sup>. Если  $f$  и  $g$  —  $\Lambda$ -преобразования, то  $fg$  и  $f^{-1}$  являются  $\Lambda$ -преобразованиями.  
 2<sup>0</sup>. Любое  $\Lambda$ -преобразование сохраняет отношение «лежать между» точек круга  $\Omega$ .

□ Пусть  $A, B, C \in \Omega$  и  $A - B - C$ , а  $A', B', C'$  — образы этих точек. Обозначим через  $UV$  хорду, на которой лежат данные точки, а через  $U'V'$  образ этой хорды. Если точки  $A$  и  $C$  являются концами хорды  $UV$  (т. е. совпадают с точками  $U$  и  $V$ ), то  $A'$  и  $C'$  являются концами хорды  $U'V'$ . В этом случае утверждение 2<sup>0</sup> очевидно. Предположим, что точка  $U$  не совпадает ни с одной из точек  $A$  и  $C$ . Тогда  $(AC, BU) = (A'C', B'U')$  или  $\frac{(AC, B)}{(AC, U)} = \frac{(A'C', B')}{(A'C', U')}$ . Так как  $(AC, V) < 0$ ,  $(A'C', V') < 0$  и

по условию  $(AC, B) > 0$ , то из последнего равенства следует, что  $(A'C', B') > 0$ . Это означает, что  $A' - B' - C'$ . ■

Отсюда мы заключаем, что при  $\Lambda$ -преобразовании отрезок, принадлежащий кругу  $\Omega$ , переходит в отрезок; в частности, полухорда круга  $\Omega$  переходит в полухорду того же круга. Далее, любой сегмент круга  $\Omega$  переходит в сегмент того же круга.

Пусть  $UV$  — хорда круга  $\Omega$ ,  $AU$  — полухорда этой хорды, а  $\bar{\lambda}$  — один из сегментов, ограниченный хордой  $UV$ . Пару  $AU, \bar{\lambda}$  назовем  $\Lambda$ -флагом и обозначим через  $(AU, \bar{\lambda})$ . На рисунке 239 изображены два  $\Lambda$ -флага  $(A_1U_1, \bar{\lambda}_1)$  и  $(A_2U_2, \bar{\lambda}_2)$ . Из предыдущего ясно, что  $\Lambda$ -преобразование любой  $\Lambda$ -флаг переводит в  $\Lambda$ -флаг.

3<sup>0</sup>. Какова бы ни была внутренняя точка  $A$  круга  $\Omega$ , существует инволютивное  $\Lambda$ -преобразование, которое переводит точку  $A$  в центр  $O$  круга  $\Omega$ , а точку  $O$  в точку  $A$ .

□ В самом деле, пусть  $OA = a$ . Выберем прямоугольную систему координат  $Oxy$  так, чтобы точка  $A$  в этой системе имела координаты  $A(a, 0)$ . Тогда  $\Lambda$ -преобразование, заданное формулами (2), переводит точку  $A$  в точку  $O$ , а точку  $O$  в точку  $A$ . ■

4<sup>0</sup>. Каковы бы ни были флаги  $I_1 = (A_1U_1, \bar{\lambda}_1)$  и  $I_2 = (A_2U_2, \bar{\lambda}_2)$ , существует  $\Lambda$ -преобразование, которое  $I_1$  переводит в  $I_2$  (рис. 239).

□ По свойству 3<sup>0</sup> существуют инволютивные  $\Lambda$ -преобразования  $f_1$  и  $f_2$ , такие, что  $O = f_1(A_1)$  и  $O = f_2(A_2)$ , где  $O$  — центр круга  $\Omega$ . Пусть  $I'_1 = f_1(I_1)$  и  $I'_2 = f_2(I_2)$ . Рассмотрим  $\Lambda$ -преобразование  $f_0$ , такое, что  $I'_2 = f_0(I'_1)$  ( $f_0$  является вращением вокруг точки  $O$  или вращением вокруг точки  $O$  с последующим отражением от диаметра круга  $\Omega$ ). Тогда  $\bar{f} = f_2 f_0 f_1$  является искомым  $\Lambda$ -преобразованием, так как  $\bar{f}(I_1) = f_2 f_0 f_1(I_1) = f_2 f_0(I'_1) = f_2(I'_2) = I_2$ . ■

Отсюда, как следствие, получаем утверждение.

5<sup>0</sup>. Каковы бы ни были полухорды  $A_1U_1$  и  $A_2U_2$ , существует  $\Lambda$ -преобразование, которое полухорду  $A_1U_1$  переводит в полухорду  $A_2U_2$ .

Сформулируем еще одно свойство, которое мы приводим без доказательства.

6<sup>0</sup>. Если  $\Lambda$ -преобразование какой-нибудь  $\Lambda$ -флаг переводит в себя, то оно является тождественным преобразованием круга  $\Omega$ .

4. В этом пункте для простоты изложения неевклидовы отрезки, лучи, углы, полуплоскости будем называть просто отрезками, лучами, углами, полуплоскостями. Введем следующие соглашения. Будем считать, что отрезок  $AB$  равен отрезку  $A'B'$ , если существует такое  $\Lambda$ -преобразование, которое отрезок  $AB$  переводит в отрезок  $A'B'$ . Аналогично угол  $hk$  считается равным углу  $h'k'$ , если существует  $\Lambda$ -преобразование  $f$ , которое угол  $hk$  переводит в угол  $h'k'$  (т. е.  $h' = f(h)$  и  $k' = f(k)$  или  $k' = f(h)$  и  $h' = f(k)$ ).

Заметим, что если  $\angle hk = \angle h'k'$ , то всегда найдется такое  $\Lambda$ -преобразование  $f'$ , что  $h' = f'(h)$ ,  $k' = f'(k)$ . В самом деле, допустим, что равенство  $\angle hk = \angle h'k'$  означает существование такого  $\Lambda$ -преобразования, что  $k' = f(k)$ ,  $h' = f(k)$ . Рассмотрим

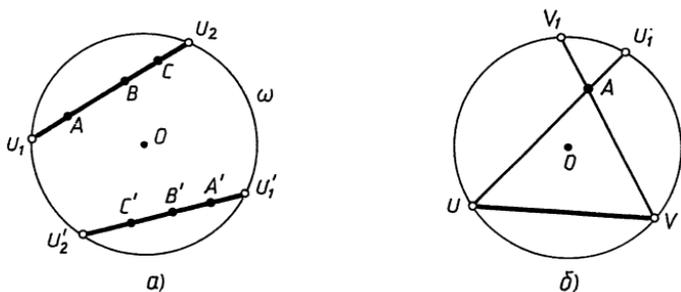


Рис. 240

инволютивное  $\Lambda$ -преобразование  $f_1$ , которое вершину угла  $hk$  переводит в центр  $O$  круга  $\Omega$  (свойство  $3^0$ ). Пусть  $h_1 = f_1(h)$ ,  $k_1 = f_1(k)$ . Если  $f_2$  — симметрия с осью, содержащей биссектрису угла  $h_1k_1$ , то  $k_1 = f_2(h_1)$ ,  $h_1 = f_2(k_1)$ . Поэтому  $f' = ff_1f_2f_1$  является искомым  $\Lambda$ -преобразованием.

Покажем, что все аксиомы группы III Гильберта выполнены.

III<sub>1</sub>. Пусть  $AB$  — данный отрезок, отложенный на луче  $h$ , а  $h'$  — луч, исходящий из точки  $A'$ . Докажем, что существует точка  $B' \in h'$ , такая, что  $A'B' = AB$ .

Обозначим через  $AU$  и  $A'U'$  полухорды круга  $\Omega$ , на которых лежат лучи  $h$  и  $h'$ , а через  $UV$  и  $U'V'$  соответствующие хорды. Рассмотрим  $\Lambda$ -преобразование  $f$ , которое полухорду  $AU$  переводит в полухорду  $A'U'$  (свойство  $5^0$ ). Тогда  $h' = f(h)$ . Если  $B' = f(B)$ , то  $B' \in h'$ , и по определению  $A'B' = AB$ .

**З а м е ч а н и е.** В нашей модели на луче  $h'$  существует *единственная точка*  $B'$ , удовлетворяющая условию  $AB = A'B'$ . В самом деле,  $U' = f(U)$ ,  $V' = f(V)$ , поэтому  $(UV, AB) = (U'V', A'B')$ . Если допустить, что на луче  $h'$  существует другая точка  $B''$ , такая, что  $AB = A'B''$ , то аналогично получаем  $(UV, AB) = (U'V', A'B'')$ . Поэтому  $(U'V', A'B') = (U'V', A'B'')$ . По свойству  $1^0$  сложного отношения четырех точек точки  $B'$  и  $B''$  совпадают.

III<sub>2</sub>. Выполнение этой аксиомы непосредственно следует из свойства  $1^0$   $\Lambda$ -преобразований.

III<sub>3</sub>. Пусть  $A - B - C$ ,  $A' - B' - C'$ ,  $AB = A'B'$  и  $BC = B'C'$ . Докажем, что  $AC = A'C'$ . Рассмотрим полухорды  $BU_1, BU_2, B'U'_1, B'U'_2$ , на которых лежат соответственно точки  $A, C, A'$  и  $C'$  (рис. 240, а). По свойству  $5^0$  существует такое  $\Lambda$ -преобразование  $f$ , которое полухорду  $BU_1$  переводит в полухорду  $B'U'_1$ . При этом полухорда  $BU_2$  переходит в полухорду  $B'U'_2$ . Пусть  $A_1 = f(A)$ ,  $C_1 = f(C)$ .

Так как  $BA = B'A'$  по условию и  $BA = B'A_1$  по построению, то точки  $A'$  и  $A_1$  совпадают, т. е.  $A' = f(A)$  (см. замечание к аксиоме III<sub>1</sub>). Аналогично доказывается, что точки  $C'$  и  $C_1$  совпадают, поэтому  $C' = f(C)$ . Таким образом,  $\Lambda$ -преобразование  $f$  отрезок  $AC$  переводит в отрезок  $A'C'$ , т. е.  $AC = A'C'$ .

III<sub>4</sub>. Пусть даны угол  $hk$  и флаг  $(A', h', \lambda')$ . Докажем, что существует единственный луч  $k' \subset \lambda'$ , такой, что  $\angle hk = \angle h'k'$ . Для этого рассмотрим  $\Lambda$ -флаги  $I = (AU, \bar{\lambda})$  и  $I' = (A'U', \bar{\lambda}')$ , которые выбраны так, что  $h \subset AU$ ,  $h' \subset A'U'$ ,  $k \subset \bar{\lambda}$ ,  $k' \subset \bar{\lambda}'$ . По свойству  $4^0$  существует такое  $\Lambda$ -преобразование  $f$ , что  $I' = f(I)$ . Луч  $k' = f(k)$  является искомым, так как  $k' \subset \bar{\lambda}'$ , и по определению равенства углов  $\angle hk = \angle h'k'$ .

Предположим, что  $k''$  — луч, удовлетворяющий условиям:  $\angle hk = \angle h'k''$  и  $k'' \in \bar{\lambda}'$ . Тогда, очевидно,  $\angle h'k' = \angle h'k''$ , поэтому существует такое  $\Lambda$ -преобразование  $f$ , что  $h' = f(h')$ ,  $k' = f(k')$ . Отсюда мы заключаем, что преобразование  $f$   $\Lambda$ -флаг  $I'$  переводит в себя. По свойству  $6^0$   $f$  — тождественное преобразование круга  $\Omega$ , следовательно, лучи  $h'$  и  $k''$  совпадают.

III<sub>5</sub>. Пусть в треугольниках  $ABC$  и  $A'B'C'$  имеем  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  и  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ . Докажем, что  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ .

Так как  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ , то существует такое  $\Lambda$ -преобразование  $f$ , которое переводит луч  $AB$  в луч  $A'B'$ , а луч  $AC$  в луч  $A'C'$ . Пусть  $B_1 = f(B)$  и  $C_1 = f(C)$ . Так как  $A' = f(A)$ , то  $AB = A'B_1$ . Но по условию  $AB = A'B'$ , поэтому точки  $B_1$  и  $B'$  совпадают, т. е.  $B' = f(B)$  (см. замечание к аксиоме III<sub>1</sub>). Аналогично доказывается, что  $C' = f(C)$ . Таким образом,  $\Lambda$ -преобразование  $f$  точки  $A, B, C$  переводит соответственно в точки  $A', B', C'$ , поэтому  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ .

$IV_1$  и  $IV_2$ . Группа  $IV$  аксиом Гильберта эквивалентна предложению Дедекинда. Ясно, что предложение Дедекинда выполняется на построенной нами модели, поэтому выполняются аксиомы  $IV_1$  и  $IV_2$  Гильберта.

$V^*$ . Возьмем произвольную прямую  $UV$  и точку  $A$ , не лежащую на ней. Рассмотрим прямые  $UU_1$  и  $VV_1$ , проходящие через точку  $A$  (рис. 240, б). Эти прямые не пересекаются с прямой  $UV$ , так как евклидовы точки  $U$  и  $V$  не являются неевклидовыми точками прямой  $UV$ . Таким образом, имеет место аксиома  $V^*$  Лобачевского.

5. Таким образом, построив евклидову модель Кэли — Клейна, мы тем самым доказали, что система аксиом  $I_{1-3}$ ,  $II_{1-4}$ ,  $III_{1-5}$ ,  $IV_{1-2}$ ,  $V^*$  непротиворечива, если непротиворечива система аксиом  $\Sigma_n$  Гильберта. (Непротиворечивость системы аксиом  $\Sigma_n$  будет доказана ниже, в § 83.) Отсюда непосредственно следует, что аксиома параллельных  $V$  не зависит от аксиом  $I_{1-3}$ ,  $II_{1-4}$ ,  $III_{1-5}$ ,  $IV_{1-2}$  Гильберта. Но выше было доказано, что аксиома параллельных  $V$  эквивалентна  $V$  постулату Евклида, поэтому  $V$  постулат Евклида не зависит от остальных аксиом евклидовой планиметрии.

## § 81. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства

1. Пусть  $V$  — трехмерное векторное пространство над полем вещественных чисел, а  $E$  — непустое множество, элементы которого называем *точками*. Мы предполагаем, что задано отображение  $\sigma: E \times E \rightarrow V$ , и вектор  $\sigma(A, B)$  обозначаем через  $\overrightarrow{AB}$ . Предполагаем также, что дано множество  $\tilde{g}$  отображений, каждое из которых является отображением вида  $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ .

Множество  $E$  называется *трехмерным вещественным евклидовым пространством*  $E_3$ , если выполнены следующие аксиомы<sup>1</sup>.

1) Для каждой точки  $A$  из  $E$  и произвольного вектора  $\vec{p}$  из  $V$  существует одна и только одна точка  $X$ , такая, что  $\overrightarrow{AX} = \vec{p}$ .

2) Для любых точек  $A, B$  и  $C$  выполняется равенство  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

3) Множество  $\tilde{g}$  является множеством положительно-определенных билинейных форм, таких, что если  $g(\vec{x}, \vec{y}) \in \tilde{g}$ , то  $\tilde{g} = \{\lambda g\}$ , где  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ . Другими словами, в пространстве  $V$  дана положительно-определенная билинейная форма с точностью до положительного числового множителя.

Аксиомы 1—2 определяют структуру трехмерного вещественного аффинного пространства  $A_3$  (с пространством переносов  $V$ ).

Таким образом, базой структуры евклидова пространства  $E_3$  служит тройка множеств  $E, V, \mathbf{R}$ , где  $E$  — множество точек,  $V$  — трехмерное векторное пространство над полем  $\mathbf{R}$ , а  $\mathbf{R}$  — поле вещественных чисел.

Следовательно, при определении структуры  $E_3$  мы будем исходить из того, что структура поля  $\mathbf{R}$  вещественных чисел и структура трехмерного векторного пространства над полем  $\mathbf{R}$  нам хорошо известны. Тогда структура  $E_3$  определяется всего лишь тремя аксиомами Вейля 1—3. Эту систему обозначим через  $\Sigma_w$ .

<sup>1</sup> См. ч. I, § 89, где дана аксиоматика евклидова  $n$ -мерного пространства по Вейлю. При  $n = 3$  получаем аксиомы пространства  $E_3$ . Заметим, что приведенная здесь аксиоматика несколько отличается от той, которая дана в ч. I, § 85 и 89 (см. аксиому 3). В новой редакции аксиомы 3 достигается полная эквивалентность аксиоматики Вейля с другими системами аксиом пространства  $E_3$  (в частности, с системой аксиом Гильберта).

2. Докажем, что система  $\sum_{\mathbb{W}}$  непротиворечива. Для этого построим интерпретацию этой системы, используя множество  $\mathbb{R}$  действительных чисел.

*Вектором* назовем любой столбец вида  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ , где  $a_1, a_2, a_3$  — произвольные действительные числа. Сумма векторов и умножение вектора на число определяются как сумма столбцов и умножение столбца на действительное число:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \text{ и } a \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 \\ aa_2 \\ aa_3 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что при этих соглашениях выполняются все аксиомы  $I_1$ — $I_8$  трехмерного векторного пространства, сформулированные

в п. 1, ч. I, § 83. При этом роль вектора  $\vec{0}$  играет столбец  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , а в качестве базиса может быть принята тройка векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Множество  $\vec{g}$  положительно-определенных билинейных форм определим так. Введем в рассмотрение билинейную форму  $g_0(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ , где  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  и  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ , и

рассмотрим множество  $\vec{g} = \{\lambda g_0\}$ , где  $\lambda$  — любое действительное положительное число. Очевидно, при этом выполняется аксиома 3 Вейля.

*Точкой* назовем любую строчку вида  $(m_1, m_2, m_3)$ , где  $m_1, m_2, m_3$  — произвольные действительные числа. Отображение  $\sigma: E \times E \rightarrow V$  определим так:  $\sigma((m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3)) = \begin{pmatrix} n_1 - m_1 \\ n_2 - m_2 \\ n_3 - m_3 \end{pmatrix}$ .

Убедимся в том, что в построенной интерпретации выполняются аксиомы 1—2 Вейля.

**Аксиома 1.** Пусть  $A = (a_1, a_2, a_3)$  — произвольная точка,  $\vec{a}p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$  — произвольный вектор. Мы должны доказать, что существует одна и только одна точка  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , такая, что  $\vec{A}X = \vec{a}p$ , или в терминах нашей интерпретации  $x_1 - a_1 = p_1$ ,  $x_2 - a_2 = p_2$ ,  $x_3 - a_3 = p_3$ . Ясно, что существует одна и только одна тройка чисел  $x_1, x_2, x_3$ , удовлетворяющая этим равенствам, поэтому в построенной интерпретации выполнена аксиома 1.

**Аксиома 2.** Пусть  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  и  $C = (c_1, c_2, c_3)$  — произвольные точки. Тогда имеем:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - b_3 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Простым подсчетом убеждаемся в том, что  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ . Итак, нами доказана следующая теорема.

**Т е о р е м а 1.** Система аксиом 1—3 Вейля непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.

В ч. 1 § 83 и 85 мы ввели понятия координат векторов в пространстве  $V$  и координат точек в пространстве  $E_3$ . Тем самым мы, по существу, доказали, что любая интерпретация системы аксиом 1—3 изоморфна построенной выше интерпретации. Отсюда следует, что любые две интерпретации системы  $\sum_{\mathcal{W}}$  изоморфны, следовательно, система аксиом Вейля обладает свойством полноты (она категорична).

3. Покажем, что, пользуясь системой аксиом  $\sum_{\mathcal{W}}$ , можно ввести все известные нам понятия пространства  $E_3$ . Прежде всего заметим, что в пространстве  $E_3$  имеют место свойства, сформулированные в п. 1, ч. I, § 85; в частности, пространство  $E_3$  содержит бесконечное множество точек.

Напомним определения прямых и плоскостей в  $E_3$  (см. ч. I, § 86). Пусть  $L_k$  — одномерное или двумерное подпространство трехмерного векторного пространства (т. е.  $k = 1$  или  $2$ ). С помощью  $L_k$  введем бинарное отношение  $\Delta$  на множестве всех точек пространства  $E_3$ .

Мы скажем, что точки  $A$  и  $B$  находятся в отношении  $\Delta$ , если  $\vec{AB} \in L_k$ . Очевидно,  $\Delta$  — отношение эквивалентности (см. ч. I, § 86, п. 1). Каждый из элементов фактор-множества  $E_3/\Delta$  при  $k = 1$  называется *прямой*, а при  $k = 2$  — *плоскостью*. Подпространство  $L_k$  называется *направляющим подпространством* прямой (плоскости), а векторы этого подпространства — *векторами*, параллельными прямой (плоскости). Таким образом, прямая однозначно определяется заданием одной ее точки  $A$  и направляющего подпространства  $L_1$  (или одного ненулевого вектора  $\vec{p} \in L_1$ ). Аналогично плоскость однозначно определяется заданием одной ее точки и направляющего подпространства  $L_2$  (или двух линейно независимых векторов  $\vec{a}, \vec{b} \in L_2$ ). Прямую (или плоскость), проходящую через точку  $A$  и имеющую направляющее подпространство  $L$ , будем обозначать так:  $(A, L)$ .

Убедимся в том, что все аксиомы группы I Гильберта могут быть доказаны в теории  $\mathcal{T}(\sum_{\mathcal{W}})$  как теоремы.

Выполнение аксиом  $I_3$  и  $I_8$  очевидно. В самом деле, пусть  $Oabc$  — система координат пространства  $E_3$ . По первой аксиоме Вейля существуют точки  $A, B$  и  $C$ , такие, что  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  и  $\vec{OC} = \vec{c}$ . Ясно, что точки  $O, A$  и  $B$  не лежат на одной прямой, а точки  $O, A, B$  и  $C$  не лежат в одной плоскости.

1<sup>0</sup>. Через любые две точки  $A$  и  $B$  проходит одна и только одна прямая (аксиомы  $I_1$  и  $I_2$ ).

□ В самом деле, прямая  $d$ , проходящая через точку  $A$  и параллельная вектору  $\vec{AB}$ , проходит также через точку  $B$ .

Если предположить, что через точки  $A$  и  $B$  проходит еще одна прямая  $d'$  с направляющим подпространством  $L'_1$ , то  $\vec{AB} \in L'_1$ . Отсюда

следует, что направляющие подпространства прямых  $d$  и  $d'$  совпадают, и, следовательно, сами прямые  $d$  и  $d'$  совпадают. ■

Предлагаем читателю аналогично доказать следующее утверждение.

2<sup>0</sup>. *Через любые три точки  $A, B$  и  $C$ , не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость* (аксиомы  $I_4$  и  $I_5$ ).

3<sup>0</sup>. *Если две точки  $A$  и  $B$  прямой  $d$  лежат в плоскости  $\sigma$ , то любая точка прямой  $d$  лежит в плоскости  $\sigma$*  (аксиома  $I_6$ ).

□ Пусть  $(A, L_1)$  — прямая  $d$ , а  $(A, L_2)$  — плоскость  $\sigma$ . Так как  $B \in d$ , то  $\overrightarrow{AB} \subset L_1$ , поэтому  $L_1$  — подпространство, натянутое на вектор  $\overrightarrow{AB}$ . По условию  $B \in \sigma$ , следовательно,  $\overrightarrow{AB} \in L_2$ . Таким образом,  $L_1 \subset L_2$ . Если  $M$  — произвольная точка прямой  $d$ , то  $\overrightarrow{AM} \in L_1$ , следовательно,  $\overrightarrow{AM} \in L_2$ , т. е.  $M \in \sigma$ . ■

4<sup>0</sup>. *Если две плоскости  $\sigma$  и  $\sigma'$  имеют общую точку  $A$ , то они имеют общую прямую, которой принадлежат все общие точки плоскостей  $\sigma$  и  $\sigma'$ .*

□ Пусть  $(A, L)$  — плоскость  $\sigma$ , а  $(A', L')$  — плоскость  $\sigma'$ . Подпространства  $L$  и  $L'$  не совпадают и принадлежат векторному пространству  $V$ , поэтому  $L \cap L' = W$ , где  $W$  — одномерное векторное подпространство. Так как  $W \subset L$  и  $W \subset L'$ , то все точки прямой  $d = (A, W)$  лежат в плоскостях  $\sigma$  и  $\sigma'$ , т. е.  $d$  — общая прямая плоскостей  $\sigma$  и  $\sigma'$ . Рассмотрим теперь произвольную общую точку  $M$  плоскостей  $\sigma$  и  $\sigma'$ . Очевидно,  $\overrightarrow{AM} \in L$  и  $\overrightarrow{AM} \in L'$ , следовательно,  $\overrightarrow{AM} \in W$ . Отсюда следует, что  $M \in d$ . ■

Из свойства 4<sup>0</sup> следует, что в теории  $\mathcal{S}(\Sigma_w)$  имеет место аксиома  $I_7$  Гильберта.

4. Докажем лемму, необходимую для доказательства следующей теоремы.

**Л е м м а.** *Если две прямые лежат в одной плоскости и их направляющие подпространства не совпадают, то эти прямые пересекаются.*

□ Пусть  $(A, \vec{p})$  и  $(B, \vec{q})$  — данные прямые, лежащие в плоскости  $\sigma$ . По условию леммы векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  не коллинеарны, поэтому образуют базис направляющего подпространства плоскости  $\sigma$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{AB}$ , параллельный плоскости  $\sigma$ , можно разложить по векторам  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ :

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q}. \quad (1)$$

По аксиоме 1 существуют точки  $M$  и  $M'$ , такие, что  $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{p}$ ,  $\overrightarrow{BM'} = -\beta \vec{q}$ . Очевидно,  $M \in (A, \vec{p})$ ,  $M' \in (B, \vec{q})$ . Подставив эти значения в равенство (1), получаем  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM'}$ , или  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{AM}$ . По аксиоме 2 имеем  $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$ . Отсюда, учитывая аксиому 1, приходим к выводу, что точки  $M$  и  $M'$  совпадают, поэтому прямые  $(A, \vec{p})$  и  $(B, \vec{q})$  имеют общую точку. ■

Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной

плоскости и не имеют общих точек. Докажем следующий признак параллельности двух прямых.

**Т е о р е м а 1.** *Две различные прямые параллельны тогда и только тогда, когда они имеют общее направляющее подпространство.*

□ Пусть  $(A, L)$  и  $(B, L)$  — две прямые, имеющие общее направляющее подпространство  $L$ . По определению эти прямые являются разными классами эквивалентности бинарного отношения  $\Delta$ , введенного с помощью  $L$ . Отсюда следует, что данные прямые не имеют общих точек. Они, очевидно, лежат в плоскости, проходящей через точку  $A$  и параллельной векторам  $\vec{p}$  и  $\vec{AB}$ , где  $\vec{p}$  — ненулевой вектор подпространства  $L$ . Следовательно, данные прямые параллельны.

Обратное утверждение непосредственно следует из доказанной леммы. ■

**Т е о р е м а 2.** *Через данную точку  $A$ , не лежащую на данной прямой  $d$ , проходит одна и только одна прямая, параллельная прямой  $d$ .*

□ Пусть  $L$  — направляющее подпространство прямой  $d$ . По теореме 1 прямая  $(A, L)$ , проходящая через точку  $A$ , параллельна прямой  $d$ . Докажем, что  $(A, L)$  — единственная прямая, удовлетворяющая этому условию. В самом деле, пусть  $(A, L')$  — любая прямая, проходящая через точку  $A$  и параллельная прямой  $d$ . По теореме 1 подпространства  $L'$  и  $L$  совпадают, поэтому прямые  $(A, L)$  и  $(A, L')$  совпадают. ■

**С л е д с т в и е.** *В теории  $\mathcal{F}(\Sigma_{\mathbb{W}})$  имеет место аксиома параллельности (аксиома V Гильберта).*

Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек. Можно доказать две теоремы о параллельных плоскостях, аналогичные теоремам 1 и 2. Их формулировку и доказательство мы предоставляем читателю.

## § 82. Луч, угол, отрезок

1. Пусть  $L_1$  — направляющее подпространство прямой  $d$ . Рассмотрим множество  $\Omega = L_1 \setminus \{\vec{0}\}$  векторов и на этом множестве введем бинарное отношение  $\uparrow\uparrow$  сонаправленности. Будем говорить, что вектор  $\vec{a} \in \Omega$  сонаправлен с вектором  $\vec{b} \in \Omega$ , если  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , где  $\lambda > 0$ . Это отношение является отношением эквивалентности. В самом деле, пусть  $\vec{a} \in \Omega$ , тогда  $\vec{a} = 1 \cdot \vec{a}$ , поэтому  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ . Далее, если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ , то  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , где  $\lambda > 0$ . Отсюда получаем  $\vec{b} = \frac{1}{\lambda} \vec{a}$ , т. е.  $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ . Точно так же проверяется условие транзитивности.

Нетрудно видеть, что фактор-множество  $\Omega / \uparrow\uparrow$  содержит лишь два элемента. Для доказательства этого утверждения возьмем вектор  $\vec{a} \in \Omega$  и рассмотрим противоположный вектор  $\vec{b} = -\vec{a}$ . Так как векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не сонаправлены, то классы эквивалентности  $K_{\vec{a}}$  и  $K_{\vec{b}}$  не совпадают. Любой вектор  $\vec{x} \in \Omega$  можно представить в виде  $\vec{x} = \mu \vec{a}$ ,

где  $\mu \neq 0$ . Если  $\mu > 0$ , то  $\vec{x} \in K_a$ , а если  $\mu < 0$ , то  $\vec{x} = -|\mu|\vec{a} = |\mu|\vec{b}$ , поэтому  $\vec{x} \in K_b$ . Каждый из элементов фактор-множества  $\Omega / \uparrow\uparrow$  называется *направлением* на прямой  $d$ .

Таким образом, на каждой прямой имеются два и только два направления. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  принадлежат разным направлениям прямой, то говорят, что они противоположно направлены, и пишут:  $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$ .

Докажем следующую лемму.

**Л е м м а 1.** Если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ , то  $\vec{a} + \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$  и  $\vec{a} + \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}$ .

□ Пусть  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ , тогда  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ , где  $\lambda > 0$ . Отсюда получаем  $\vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{b} + \vec{b}$ , или  $\vec{a} + \vec{b} = (\lambda + 1)\vec{b}$ . Так как  $\lambda + 1 > 0$ , то из этого равенства следует  $\vec{a} + \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}$ . Отсюда, учитывая, что  $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ , приходим к соотношению  $\vec{a} + \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ . ■

Пусть  $d$  — произвольная прямая,  $O$  — некоторая ее точка, а  $\Omega_0$  — одно из направлений на этой прямой. Множество  $h$  всех точек  $M$ , таких, что  $\overrightarrow{OM} \in \Omega_0$ , называется *лучом*, исходящим из точки  $O$  (или с началом в точке  $O$ ). Направление  $\Omega_0$  называется *направлением* этого луча. Очевидно, все точки луча  $h$  принадлежат прямой  $d$ . Так как на прямой имеются только два направления, то существуют два и только два луча прямой  $d$ , исходящие из произвольной точки прямой. Эти лучи называются *дополнительными* лучами. Ясно, что точка  $O$  не принадлежит ни одному из этих лучей, но любая точка прямой  $d$ , отличная от точки  $O$ , принадлежит одному и только одному из этих лучей. Каждый луч определяется заданием начала и еще одной точки, принадлежащей лучу. Таким образом, если  $h$  и  $h'$  — дополнительные лучи прямой  $d$ , исходящие из точки  $O$ , то множество всех точек прямой совпадает с множеством  $h \cup h' \cup \{O\}$ .

*Углом* называется фигура, состоящая из точки  $O$  и двух лучей  $h$  и  $k$ , исходящих из этой точки. Угол называется *развернутым*, если  $h$  и  $k$  — дополнительные лучи.

**2.** Говорят, что точка  $M$  лежит между точкой  $A$  и точкой  $B$  (пишут:  $A - M - B$ ), если  $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$ .

Докажем, что в теории  $\mathcal{F}(\Sigma_w)$  выполняются аксиомы II<sub>1</sub>—II<sub>4</sub> Гильберта. Сначала проверим аксиомы II<sub>1</sub>, II<sub>2</sub>.

а) Пусть  $\overrightarrow{A - M - B}$ . Тогда по определению  $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$ , а по лемме 1  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$  или  $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$ . Отсюда следует, что точка  $M$  лежит на прямой  $(B, \overrightarrow{AB})$ , т. е. точки  $A$ ,  $M$  и  $B$  лежат на одной прямой. Из соотношений  $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$  и  $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$  следует, что векторы  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{BM}$  и  $\overrightarrow{AB}$  ненулевые, т. е. что  $A$ ,  $B$  и  $M$  — попарно различные точки. Далее, из  $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$  следует, что  $\overrightarrow{BM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MA}$ , т. е.  $B - M - A$ .

б) Пусть  $A$  и  $B$  — две произвольные точки. По аксиоме 1 Вейля существует точка  $C$ , такая, что  $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ , где  $\lambda$  — некоторое положительное число. Это равенство означает, что  $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BC}$ , т. е.  $A - B - C$ .

**Теорема 1.** *Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

□ Сначала докажем, что из трех данных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  прямой по крайней мере одна точка лежит между двумя другими. Для этого рассмотрим ненулевые векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{CA}$ . Так как на прямой существуют только два направления, то по крайней мере два из этих трех векторов сонаправлены. Возможны три случая: а)  $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BC}$ ; б)  $\overrightarrow{BC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CA}$ ; в)  $\overrightarrow{CA} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AB}$ . В случае а)  $A - B - C$ , в случае б)  $B - C - A$ , а в случае в)  $C - A - B$ . Таким образом, хотя бы одна из данных точек лежит между двумя другими. Условимся, что  $A - B - C$ .

По определению  $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BC}$ , а по лемме 1  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AB}$  или  $\overrightarrow{AC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AB}$ . Отсюда следует, что  $\overrightarrow{CA} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AB}$ , т. е. точка  $A$  не лежит между точками  $C$  и  $B$ . Точно так же можно доказать, что точка  $C$  не лежит между точками  $A$  и  $B$ . ■

**С л е д с т в и е.** *В теории  $\mathcal{T}(\Sigma_w)$  выполняется аксиома  $\Pi_3$  Гильберта.*

**3.** Напомним понятие координат точек на плоскости (см. ч. I, § 85, п. 2). Если на плоскости выбрана система координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ , то каждая точка  $M$  плоскости имеет координаты, которые, как известно, являются координатами вектора  $\overrightarrow{OM}$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , т. е.  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ . Напомним также, что если точки  $A$  и  $B$  заданы координатами  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , то вектор  $\overrightarrow{AB}$  имеет координаты  $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .

Докажем следующую лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

**Л е м м а 2.** *Точка  $M(x, y)$  лежит между двумя точками  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  тогда и только тогда, когда существует положительное число  $\lambda \in \mathbb{R}$ , такое, что*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1)$$

□ Пусть  $A - M - B$ , тогда  $\overrightarrow{AM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{MB}$ , т. е. существует положительное число  $\lambda$ , такое, что  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ . Это равенство в координатах запишется так:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \quad (2)$$

Отсюда и следуют формулы (1).

Обратно: пусть координаты  $(x, y)$  точки  $M$  удовлетворяют равенствам (1), а следовательно, и равенствам (2), где  $\lambda > 0$ .

Отсюда получаем  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ . Так как  $A$  и  $B$  — различные точки, то  $\overrightarrow{AM}$  и  $\overrightarrow{BM}$  — ненулевые векторы, следовательно,  $\overrightarrow{AM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{MB}$ , т. е.  $A - M - B$ . ■

Из доказанной леммы следует, что, каковы бы ни были две точки  $A$  и  $B$ , существует бесконечное множество точек, лежащих между ними.

Множество, состоящее из двух точек  $A$  и  $B$  и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком* и обозначается через  $AB$  или  $BA$ . Ясно, что отрезок есть бесконечное множество точек.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $A, B$  и  $C$  — три точки, а  $d$  — прямая, лежащая с данными точками в одной плоскости и не проходящая через эти точки. Если прямая  $d$  пересекает отрезок  $AB$ , то она пересекает по крайней мере один из отрезков  $BC$  или  $AC$ .

□ Выберем на плоскости систему координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  так, чтобы  $O \in d$  и  $\vec{e}_1 \parallel d$ , и введем обозначения для координат данных точек в этой системе:  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Эти точки не лежат на прямой  $d$ , поэтому  $y_1 \neq 0$ ,  $y_2 \neq 0$ ,  $y_3 \neq 0$ .

Обозначим через  $M(x, y)$  точку пересечения прямой  $d$  с отрезком  $AB$ . По лемме 2 существует такое положительное число  $\lambda \in \mathbb{R}$ , что  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ ,  $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ . Так как  $M$  — точка прямой  $d$ , то  $y = 0$ , поэтому  $y_1 + \lambda y_2 = 0$ . Отсюда мы заключаем, что числа  $y_1$  и  $y_2$  имеют разные знаки, поэтому возможны два случая: а)  $y_2 y_3 < 0$ ; б)  $y_1 y_3 < 0$ . Легко доказать, что в случае а) прямая  $d$  пересекает отрезок  $BC$ , а в случае б) — отрезок  $AC$ . Докажем первое из этих утверждений; предлагаем читателю по аналогии самостоятельно доказать второе утверждение.

Рассмотрим точку  $N$  с координатами  $x_0 = \frac{x_2 + \lambda x_3}{1 + \lambda}$ ,  $y_0 = \frac{y_2 + \lambda y_3}{1 + \lambda}$ , где  $\lambda = -\frac{y_2}{y_3}$ . Так как  $y_0 = 0$ , то точка  $N$  лежит на прямой  $d$ . С другой стороны, по лемме 2 она лежит между точками  $B$  и  $C$ . Следовательно, прямая  $d$  пересекает отрезок  $BC$ . ■

**С л е д с т в и е.** В теории  $\mathcal{F}(\Sigma_{\mathbb{W}})$  выполняется аксиома Паша. Мы доказали, что в теории  $\mathcal{F}(\Sigma_{\mathbb{W}})$  выполняются все аксиомы групп I, II Гильберта, поэтому в этой теории имеет место теорема о полуплоскостях, доказанная в § 71. Пользуясь этой теоремой, точно так же, как и в § 71, вводят понятие полуплоскости.

### § 83. Равенство отрезков и углов. Длина отрезка

1. Отрезки  $AB$  и  $CD$  называются *равными* (пишут:  $AB = CD$ ), если для любой билинейной формы  $g \in \underline{g}$  выполняется равенство

$$g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = g(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD}). \quad (1)$$

Из аксиомы 3 следует, что если найдется хотя бы одна билинейная форма  $g$  из  $\underline{g}$ , такая, что выполняется равенство (1), то  $AB = CD$ .

Отметим, что равенство (1) эквивалентно следующим равенствам:  $g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = g(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DC})$ ,  $g(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}) = g(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD})$ ,  $g(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}) = g(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DC})$ , поэтому определение равенства отрезков  $AB$  и  $CD$  не зависит от того, в каком порядке берутся концы отрезков  $AB$  и  $CD$ .

Пользуясь этим определением, докажем, что в теории  $\mathcal{F}(\Sigma_w)$  имеют место аксиомы III<sub>1</sub> и III<sub>3</sub> Гильберта (выполнение аксиомы III<sub>2</sub> очевидно).

1<sup>0</sup>. Пусть  $AB$  — некоторый отрезок, а  $h'$  — произвольный луч, исходящий из точки  $A'$ . Тогда существует одна и только одна точка  $B' \in h'$ , такая, что  $AB = A'B'$ .

□ Обозначим через  $\vec{p}$  один из векторов, определяющих направление луча  $h'$ . Тогда любая точка  $M'$  луча  $h'$  определяется равенством  $\overrightarrow{A'M'} = x\vec{p}$ , где  $x > 0$ . Отрезок  $A'M'$  равен отрезку  $AB$  тогда и только тогда, когда  $g(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{A'M'}) = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})$ , или  $g(x\vec{p}, x\vec{p}) = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})$ , где  $g$  — какая-то билинейная форма из множества  $g$ . Из предыдущего равенства получаем следующее уравнение для нахождения  $x$ :

$$x^2 g(\vec{p}, \vec{p}) = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}).$$

Так как  $g(\vec{p}, \vec{p}) > 0$  и  $g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) > 0$ , то существует единственное  $x > 0$ , удовлетворяющее этому уравнению. ■

2<sup>0</sup>. Если  $A - B - C$ ,  $A' - B' - C'$ ,  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ , то  $AC = A'C'$ .

□ По условию имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A'B'} = \lambda' \overrightarrow{B'C'}, \text{ где } \lambda > 0, \lambda' > 0. \quad (2)$$

Если  $\vec{g} \in \tilde{g}$ , то  $g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = \lambda^2 g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC})$  и  $g(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'B'}) = \lambda'^2 g(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'C'})$ . Отсюда, учитывая, что  $AB = A'B'$  и  $BC = B'C'$ , получаем  $\lambda = \lambda'$ .

По аксиоме 2  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$ . Используя равенства (2), с учетом того, что  $\lambda = \lambda'$ , получаем  $\overrightarrow{AC} = (1 + \lambda) \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{A'C'} = (1 + \lambda) \overrightarrow{B'C'}$ . Отсюда следует  $g(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = (1 + \lambda)^2 g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC})$ ,  $g(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'C'}) = (1 + \lambda)^2 g(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'C'})$ . Учитывая, что  $BC = B'C'$ , получаем  $g(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'C'})$ , т. е.  $AC = A'C'$ . ■

2. Ненулевые векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются *перпендикулярными* (ортогональными), если они сопряжены относительно любой билинейной формы из множества  $g$ . Из аксиомы 3 непосредственно следует, что если существует хотя бы одна билинейная форма  $g \in g$ , относительно которой векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сопряжены, то эти векторы перпендикулярны.

Из следствия теоремы 1 (ч. I, § 84) следует, что в векторном пространстве  $V$  существует хотя бы один базис, любые векторы которого перпендикулярны.

Две прямые пространства  $E_3$  называются *перпендикулярными*, если их направляющие подпространства перпендикулярны (т. е. любой ненулевой вектор одного подпространства перпендикулярен любому ненулевому вектору другого подпространства). Аналогично определяется перпендикулярность прямой и плоскости.

Пользуясь этими определениями, можно доказать все известные нам из курса средней школы теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей.

3. Введем теперь понятие длины отрезка. Выберем произвольный отрезок  $PQ$  и назовем его *единичным отрезком*. Любой отрезок  $P'Q'$ , равный отрезку  $PQ$ , также назовем единичным отрезком.

**Л е м м а.** Если выбран единичный отрезок  $PQ$ , то во множестве  $g$  существует одна и только одна билинейная форма  $g$  из  $g$ , удовлетворяющая условию

$$g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = 1. \quad (3)$$

$\square$  Пусть  $g'$  — произвольная билинейная форма из  $\tilde{g}$ . Число  $g'(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = m$  отлично от нуля, так как  $g'$  — положительно-определенная форма. Рассмотрим билинейную форму  $g = \frac{1}{m} g'$ . Она удовлетворяет условию леммы, потому что  $g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = \frac{g'(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})}{m} = 1$ .

Докажем теперь, что  $g$  — единственная билинейная форма из  $\tilde{g}$ , удовлетворяющая условию (3). В самом деле, пусть для какой-то билинейной формы  $g_1 \in \tilde{g}$  выполняется равенство  $g_1(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = 1$ . Так как  $g_1 = \lambda g$ , то  $g_1(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = \lambda g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})$ . Отсюда получаем  $\lambda = 1$ , т. е.  $g_1 = g$ . ■

Если  $g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = 1$ , то будем говорить, что *билинейная форма  $g$  соответствует* единичному отрезку  $PQ$ .

Таким образом, если в пространстве  $E_3$  выбран единичный отрезок  $PQ$ , то векторное пространство  $V$  становится евклидовым и в нем можно ввести скалярное произведение векторов, используя билинейную форму  $g$ , соответствующую отрезку  $PQ$  (см. ч. I, § 84, п. 4). Число

$|\vec{a}| = \sqrt{g(\vec{a}, \vec{a})}$  называется *длиной* или *нормой* вектора  $\vec{a}$ . Вектор называется *единичным*, если его длина равна единице.

Базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  называется *ортонормированным*, если векторы этого базиса единичные и взаимно перпендикулярные. Согласно теореме 2 ч. I, § 84 в пространстве  $V$  существуют ортонормированные базисы. Система координат  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  в  $E_3$  называется *прямоугольной*, если базис  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ортонормированный.

*Длиной отрезка  $AB$*  при выбранном единичном отрезке  $PQ$  называется норма вектора  $\overrightarrow{AB}$ , т. е. число

$$|AB| = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}, \quad (4)$$

где  $g$  — билинейная форма, соответствующая отрезку  $PQ$ .

В следующей теореме выражены основные свойства длин отрезков.

**Теорема 1.** 1°. Если два отрезка равны, то их длины равны. 2°. Если  $A - B - C$ , то  $|AB| + |BC| = |AC|$ . 3°. Длина единичного отрезка равна единице.

□ Пусть  $PQ$  — единичный отрезок, а  $g$  — билинейная форма, соответствующая этому отрезку.

1) Если отрезки  $AB$  и  $CD$  равны, то по определению  $g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = g(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD})$ . По формуле (4) получаем  $|AB| = |CD|$ .

2) Пусть  $A - B - C$ . Тогда по определению  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ , где  $\lambda > 0$ . Так как  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ , то

$$\overrightarrow{AC} = (1 + \lambda) \overrightarrow{BC}. \quad (5)$$

По формуле (4)  $|AB| = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \sqrt{g(\lambda \overrightarrow{BC}, \lambda \overrightarrow{BC})} = \lambda |BC|$ . Аналогично, используя равенство (5), будем иметь  $|AC| = (1 + \lambda) |BC|$ . Таким образом,  $|AC| = \lambda |BC| + |BC| = |AB| + |BC|$ .

3) Так как  $g$  — билинейная форма, соответствующая отрезку  $PQ$ , то  $g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = 1$ , т. е.  $|PQ| = 1$ . ■

Напомним еще одно свойство длин отрезков, которое нами уже доказано (см. ч. I, § 89, теоремы 1 и 2).

**Теорема 2.** Для любых трех точек  $A, B$  и  $C$  пространства  $E_3$   $|AC| \leq |AB| + |BC|$ , причем равенство  $|AC| = |AB| + |BC|$  имеет место тогда и только тогда, когда  $A - B - C$ .

4. **Расстоянием** между точками  $A$  и  $B$  называется длина отрезка  $AB$ . Напомним, что преобразование пространства  $E_3$  называется **движением**, если оно сохраняет расстояния (см. ч. I, § 90). Очевидно, все свойства движений, изученные нами в главах V и VIII ч. I имеют место в  $E_3$ . Мы знаем, что при движении отрезок переходит в отрезок, луч — в луч, полуплоскость — в полуплоскость, а угол — в угол (см. ч. I, § 41, п. 4). Нами доказана следующая теорема о движениях на плоскости (ч. I, § 41, теорема 2): *пусть  $(O, h, \alpha)$  и  $(O', h', \alpha')$  — произвольные флаги. Тогда существует одно и только одно движение, которое флаг  $(O, h, \alpha)$  переводит в флаг  $(O', h', \alpha')$ .*

Две фигуры  $F$  и  $F'$  называются **равными**, если существует движение, которое переводит одну фигуру в другую. В частности, угол  $hk$  называется равным углу  $h'k'$  (пишут:  $\angle hk = \angle h'k'$ ), если существует движение  $f$ , которое угол  $hk$  переводит в угол  $h'k'$  (т. е.  $h' = f(h)$  и  $k' = f(k)$  или  $h' = f(k)$ ,  $k' = f(h)$ ). Нетрудно доказать, что если  $\angle hk = \angle h'k'$ , то существует движение  $f$ , такое, что  $h' = f(h)$  и  $k' = f(k)$ . В теории  $\mathcal{F}$  ( $\Sigma_w$ ) выполняются аксиомы III<sub>4</sub> и III<sub>5</sub> Гильберта. Для простоты изложения убедимся в выполнении этих аксиом на плоскости.

**Теорема 3.** Пусть  $hk$  — неразвернутый угол, а  $(O', h', \alpha')$  — некоторый флаг. Тогда в полуплоскости  $\alpha'$  существует один и только один луч  $k'$ , исходящий из точки  $O'$ , такой, что  $\angle hk = \angle h'k'$ .

□ Пусть  $(O, h, \alpha)$  — флаг, где  $O$  — вершина данного угла  $(h, k)$ , а  $\alpha$  — полуплоскость, в которой лежит луч  $k$ . Рассмотрим движение  $f$ , которое флаг  $(O, h, \alpha)$  переводит в флаг  $(O', h', \alpha')$ , и обозначим через  $k'$  образ луча  $k$ . Очевидно,  $k'$  — искомый луч.

Докажем, что  $k'$  — единственный луч, удовлетворяющий условию теоремы. В самом деле, если  $k''$  — какой-либо луч, удовлетворяющий условию теоремы, то  $\angle hk = \angle h'k''$ . Отсюда следует, что существует движение  $f'$ , такое, что  $h' = f'(h)$ ,  $k'' = f'(k)$ . Но тогда, очевидно, движение  $f'$  переводит флаг  $(O, h, \alpha)$  в флаг  $(O', h', \alpha')$ . Таким образом, движения  $f$  и  $f'$  совпадают, и, следовательно, лучи  $k'$  и  $k''$  совпадают. ■

Из следующей теоремы следует, что в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_{\mathbb{W}})$  выполняется аксиома III<sub>5</sub> Гильберта.

**Теорема 4** (первый признак равенства треугольников). Если  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  и  $\angle A = \angle A'$ , то  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ .

□ Так как  $\angle A = \angle A'$ , то существует движение  $f$ , такое, что луч  $AB$  переходит в луч  $A'B'$ , а луч  $AC$  — в луч  $A'C'$ . Рассмотрим точки  $B'' = f(B)$  и  $C'' = f(C)$ . Так как  $AB = A'B''$ , а по условию теоремы  $AB = A'B'$ , то, учитывая свойство 1<sup>0</sup> п. 1, мы приходим к выводу, что точки  $B'$  и  $B''$  совпадают. Аналогично, точки  $C'$  и  $C''$  совпадают. Таким образом, треугольник  $A'B'C'$  является образом треугольника  $ABC$  в движении  $f$ , поэтому  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ . ■

5. Нам остается доказать, что в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_{\mathbb{W}})$  выполняются аксиомы IV<sub>1</sub> и IV<sub>2</sub> Гильберта (см. § 72).

Пусть  $AB$  и  $CD$  — произвольные отрезки. По свойству 1<sup>0</sup> п. 1 на луче  $AB$  существуют точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , такие, что  $A - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \dots, A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$  и  $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = CD$ .

Примем отрезок  $CD$  за единичный отрезок, тогда по теореме 1  $|AA_1| = |A_1A_2| = \dots = |A_{n-1}A_n| = |CD| = 1$ , поэтому  $|AA_n| = n$ . Если выбрать  $n$  так, чтобы  $n > |AB|$ , то  $|AB| < |AA_n|$ , поэтому по теореме 1 (утверждение 2<sup>0</sup>)  $A - B - A_n$ . Таким образом, в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_{\mathbb{W}})$  выполняется аксиома Архимеда (аксиома IV<sub>1</sub>).

Для проверки аксиомы Кантора проведем через прямую  $a$ , содержащую бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков, плоскость и в этой плоскости введем систему координат  $Oxy$  так, чтобы ось  $Ox$  совпала с прямой  $a$ . Рассмотрим отображение множества точек прямой  $a$  на множество их абсцисс. Это отображение является биективным, причем если  $M_1(x_1, 0), M_2(x_2, 0), M_3(x_3, 0)$  — три точки прямой  $a$  и  $M_1 - M_2 - M_3$ , то либо  $x_1 < x_2 < x_3$ , либо  $x_1 > x_2 > x_3$ . (Это утверждение следует из леммы 2 § 82.)

Отсюда, учитывая, что аксиома Кантора выполняется на числовой прямой, мы заключаем, что эта же аксиома в геометрических терминах имеет место на прямой  $a$ .

Мы доказали, что в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_{\mathbb{W}})$  выполняются все аксиомы Гильберта. Но по доказанному в п. 2 § 81 система аксиом  $\Sigma_{\mathbb{W}}$  непро-

тиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел. Поэтому справедлива следующая теорема:

**Т е о р е м а 5.** Система аксиом I—V Гильберта непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.

**З а м е ч а н и е.** Содержательную непротиворечивость системы  $\Sigma_H$  можно доказать и непосредственно, построив аналитическую модель этой системы аксиом (см., например, [11], § 71).

## § 84. Аксиоматика А. В. Погорелова школьного курса геометрии

1. В современных учебных пособиях по геометрии для средней школы в основу построения курса положены системы аксиом, отличные от системы  $\Sigma_H$  и от системы  $\Sigma_W$ .

Рассмотрим сначала систему аксиом, предложенную в учебном пособии по геометрии для VI—X классов средней школы А. В. Погорелова<sup>1</sup>. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением системы аксиом планиметрии. Здесь база структуры евклидовой плоскости  $E_2$  состоит из трех множеств  $E$ ,  $F$  и  $\mathbf{R}$ . Элементы из  $E$  называются точками, а элементы из  $F$  — прямыми;  $\mathbf{R}$  — множество вещественных чисел. Множества  $E$  и  $F$  выступают как основные, а множество  $\mathbf{R}$  — как вспомогательное.

Основными отношениями являются следующие четыре отношения: а) принадлежность точки и прямой; б) лежать между для трех точек одной прямой; в) длина отрезка; г) градусная мера угла.

2. Рассматриваемая система аксиом, которую мы обозначим через  $\Sigma_P$ , состоит из девяти аксиом, разбитых на шесть групп.

### I. Аксиомы принадлежности.

I<sub>1</sub>. Каковы бы ни были две точки, существует прямая, проходящая через эти точки, и притом только одна.

I<sub>2</sub>. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

### II. Аксиомы порядка.

II<sub>1</sub>. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

На основе этой аксиомы вводится понятие отрезка. *Отрезком  $AB$*  называется множество точек прямой, лежащих между точками  $A$  и  $B$ .

II<sub>2</sub>. Прямая разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два подмножества (полуплоскости) так, что отрезок, соединяющий точки одной полуплоскости, не пересекается с прямой, а отрезок, соединяющий точки разных полуплоскостей, пересекается с прямой.

Затем вводятся понятия луча и треугольника. *Лучом  $AB$*  с началом  $A$  называется множество точек, состоящее из точки  $B$  и любой точки  $M$  прямой  $AB$ , такой, что точка  $A$  не лежит между точками  $B$  и  $M$ .

<sup>1</sup> См.: Погорелов А. В. Геометрия, 6—10. — М.: Просвещение, 1984. Систему аксиом мы излагаем в основном в той редакции, которая дана в учебном пособии А. В. Погорелова «Геометрия» (М.: Наука, 1983).

*Треугольником* называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков. Пользуясь аксиомой  $\Pi_2$ , можно убедиться в том, что в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_P)$  имеет место теорема, которая в аксиоматике Гильберта принимается за аксиому (аксиома Паша).

### III. Аксиомы меры для отрезков и углов<sup>1</sup>.

Обозначим через  $L$  множество всех отрезков, а через  $\mathbf{R}_+^*$  — множество всех положительных чисел.

III<sub>1</sub>. Если выбран некоторый отрезок  $EF$ , то существует отображение  $l : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , такое, что выполняются два условия: а) если точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $B$ , то  $l(AC) + l(CB) = l(AB)$ ; б)  $l(EF) = 1$ .

Если  $l' : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  отображение при другом выборе отрезка  $E'F'$ , то из равенства  $l(AB) = l(CD)$  следует:  $l'(AB) = l'(CD)$ .

Число  $l(AB)$  называется *длиной* отрезка  $AB$ , а отрезок  $EF$  — *единичным отрезком*.

Для того чтобы сформулировать следующую аксиому, введем понятие угла. *Углом* называется фигура, которая состоит из двух различных лучей с общим началом. Угол называется *развернутым*, если эти лучи лежат на одной прямой. Мы будем говорить, что данный луч проходит между сторонами неразвернутого угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. В случае развернутого угла мы считаем, что любой луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

Обозначим через  $\Omega$  множество всех углов.

III<sub>2</sub>. Существует отображение  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , такое, что выполняются два условия: а) если луч  $l$  проходит между сторонами угла  $hk$ , то  $\varphi(hl) + \varphi(lk) = \varphi(hk)$ ; б) если  $hk$  — развернутый угол, то  $\varphi(hk) = 180$ .

Число  $\varphi(hk)$  называется *градусной мерой* угла  $hk$ .

**Аксиома существования треугольника, равного данному.**

*Два отрезка* называются *равными*, если при любом выборе единичного отрезка их длины равны. *Два угла* называются *равными*, если они имеют одну и ту же градусную меру. *Треугольники*  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  называются *равными*, если выполняются равенства:  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $AC = A_1C_1$ .

IV. Пусть  $ABC$  — треугольник и  $h$  — луч. Тогда существует треугольник  $A_1B_1C_1$ , равный треугольнику  $ABC$ , у которого вершина  $A_1$  совпадает с началом луча  $h$ , вершина  $B_1$  лежит на луче  $h$ , а вершина  $C_1$  лежит в заданной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч  $h$ .

Пользуясь этой аксиомой, легко доказать следующие утверждения:

<sup>1</sup> Аксиомы III<sub>1</sub>, III<sub>2</sub> и V мы формулируем несколько иначе, чем в указанных выше учебных пособиях А. В. Погорелова.

1°. На данном луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному отрезку, и притом только один.

2°. От данного луча в заданную полуплоскость с границей, содержащей данный луч, можно отложить угол, равный данному углу, и притом только один.

**Аксиома существования отрезка данной длины.**

V. Если выбран единичный отрезок, то, каково бы ни было вещественное число  $d > 0$ , существует отрезок длиной  $d$ .

Пользуясь аксиомой V и утверждениями 1° и 2°, можно доказать следующие два утверждения, которые из методических соображений в учебнике для средней школы приняты за аксиомы (аксиомы IV<sub>1</sub> и IV<sub>2</sub>).

3°. На данном луче от его начала можно отложить отрезок заданной длины и притом только один.

4°. От данного луча в данную полуплоскость с границей, содержащей данный луч, можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и притом только один.

**Аксиома параллельных.**

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

VI. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

3. Докажем теорему, аналогичную теореме 5 § 83.

**Т е о р е м а.** Система аксиом  $\Sigma_p$  непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.

□ Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что все девять аксиом системы  $\Sigma_p$  могут быть доказаны в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_w)$  как теоремы (см. доказательство теоремы 5 § 83).

В § 82 и 83 мы убедились в том, что в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_w)$  имеют место предложения I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, II<sub>1</sub>, II<sub>2</sub>, III<sub>1</sub> и VI. Поэтому остается проверить выполнимость предложений III<sub>2</sub>, IV и V.

III<sub>2</sub>. Введем понятие градусной меры угла в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_w)$ . Пусть  $(h, k)$  — произвольный угол, а  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — векторы, принадлежащие соответственно направлениям лучей  $h$  и  $k$ . Радийной мерой угла  $hk$  назовем число  $\varphi$ , принадлежащее числовому промежутку  $0 < \varphi \leq \pi$ , такое, что

$$\cos \varphi = \frac{g(\vec{a}, \vec{b})}{\sqrt{g(\vec{a}, \vec{a})} \sqrt{g(\vec{b}, \vec{b})}},$$

где  $g(\vec{x}, \vec{y})$  — билинейная форма, соответствующая выбранному единичному отрезку (см. ч. I, § 84, п. 4). Нетрудно доказать, что  $\cos \varphi$  не зависит от выбора единичного отрезка, а также от выбора векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , принадлежащих направлениям лучей.

Градусной мерой угла  $hk$  назовем число  $\frac{\varphi \cdot 180^\circ}{\pi}$ , где  $\varphi$  — радианная мера этого угла. Введенная таким образом градусная мера угла удовлетворяет аксиоме III<sub>2</sub>. Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.

IV. Пусть  $ABC$  — треугольник,  $h$  — луч, исходящий из точки  $A_1$ , а  $\alpha$  — полуплоскость, границе которой принадлежит луч  $h$ . Рассмотрим два флага  $(A, h_0, \alpha_0)$  и  $(A_1, h, \alpha)$ , где  $h_0$  — луч  $AB$ , а  $\alpha_0$  — полуплоскость с границей  $AB$ , содержащая точку  $C$ . В § 83 мы отметили, что теорема о задании движения с помощью двух флагов (ч. I, § 41, теорема 2) имеет место в теории  $\mathcal{F}(\Sigma_W)$ , поэтому существует движение  $f$ , которое переводит флаг  $(A, h_0, \alpha_0)$  во флаг  $(A_1, h, \alpha)$ . Если  $B_1 = f(B)$  и  $C_1 = f(C)$ , то  $\triangle A_1B_1C_1$  искомым, так как  $B_1 \in h$ ,  $C_1 \in \alpha$  и  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

V. Пусть  $PQ$  — выбранный единичный отрезок, а  $d$  — любое положительное действительное число. Рассмотрим билинейную форму  $g(\vec{x}, \vec{y})$ , соответствующую отрезку  $PQ$ . Если  $A$  — произвольная точка плоскости, то существует точка  $B$ , такая, что  $\vec{AB} = \vec{a}$ , где  $\vec{a} = d\vec{PQ}$  (аксиома 1 системы  $\Sigma_W$ ). Тогда  $|AB| = \sqrt{g(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{g(d\vec{PQ}, d\vec{PQ})} = d\sqrt{g(\vec{PQ}, \vec{PQ})} = d$ . ■

## § 85. Об аксиомах школьного курса геометрии

1. В основу дедуктивного построения школьного курса геометрии можно положить различные системы аксиом. Например, до введения в школу учебного пособия по геометрии А. В. Погорелова в VI—VIII классах средней школы планиметрия изучалась по учебному пособию под редакцией А. Н. Колмогорова. В системе аксиом планиметрии этого пособия база структуры евклидовой плоскости состоит из трех множеств:  $E$ ,  $F$  и  $G$ , где  $E$  — множество точек,  $F$  — множество прямых и  $G$  — множество некоторых неотрицательных величин, которые называются расстояниями. Основными отношениями являются отношение принадлежности точек и прямых и тернарное отношение, которое определяется отображением  $\delta: E \times E \rightarrow G$ . Мы не будем формулировать аксиомы А. Н. Колмогорова; читателя, интересующегося этим вопросом, отсылаем к книге [4] (раздел IV, § 19).

В последние годы издан ряд пробных учебников по геометрии для средней школы, в которых курс геометрии строится также дедуктивно на основе той или иной системы аксиом. Оригинальная аксиоматика положена в основу курса геометрии в пробных учебниках геометрии А. Д. Александрова, А. Л. Вернера и В. И. Рыжика<sup>1</sup>. В системе аксиом, данной в этом учебнике, база структуры евклидовой

<sup>1</sup> См.: Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: Пробный учебник для 6 класса средней школы.— М.: Просвещение, 1984.

плоскости состоит из двух множеств — множества точек и множества отрезков, а прямая определяется с помощью отрезков.

Система аксиом, положенная в основу курса геометрии в пробных учебниках Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, аналогична системе аксиом Гильберта. База структуры состоит из тех же множеств  $E, F, G$ , что и база структуры евклидова пространства по Гильберту ( $E$  — множество точек,  $F$  — множество прямых, а  $G$  — множество плоскостей; см. пример 2 § 77). Основными отношениями в системе множеств  $E, F, G$  являются, как и у Гильберта, отношения  $\Delta_1, \Delta_2$ , которые обозначаются словами «лежит на», «лежит между», но вместо отношения  $\Delta_3$  («равенство отрезков и углов») вводится новое отношение  $\Delta_3^*$  («наложение»). Это отличие является существенным, так как вместо аксиом конгруэнтности Гильберта формулируются другие аксиомы (аксиомы наложения), и поэтому все определения и теоремы о равенстве фигур вводятся и доказываются не так, как по схеме Гильберта.

2. Рассмотрим более подробно аксиоматику планиметрии, данную в пробных учебниках геометрии Л. С. Атанасяна и др.<sup>1</sup>.

База структуры евклидовой плоскости  $E_2$  состоит из двух множеств:  $E$  (множество точек) и  $F$  (множество прямых). Основными отношениями являются следующие три отношения: а) «принадлежать» для точек и прямых; б) «лежать между» для трех точек одной прямой (если точка  $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ , то мы запишем так:  $A - B - C$ ); в) «наложение», т. е. бинарное отношение, которое определяется отображением  $f: E \rightarrow E$ .

Система аксиом, которую мы здесь приводим, в основном совпадает с аксиоматикой школьного курса, но по сравнению с ней несколько ослаблена. Введение в школьный курс дополнительных предложений в виде аксиом вызвано методическими соображениями.

Рассматриваемая система аксиом, которую обозначим через  $\Sigma_A$ , состоит из пятнадцати аксиом, разбитых на пять групп.

### I. Аксиомы принадлежности.

И<sub>1</sub>. Каковы бы ни были две точки, существует прямая, проходящая через эти точки, и притом только одна.

И<sub>2</sub>. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

### II. Аксиомы порядка.

II<sub>1</sub>. Если  $A - B - C$ , то  $A, B$  и  $C$  — различные точки одной прямой и  $C - B - A$ .

II<sub>2</sub>. Каковы бы ни были точки  $A$  и  $B$ , существует по крайней мере одна точка  $C$ , такая, что  $A - B - C$ .

II<sub>3</sub>. Среди трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

На основании этих аксиом вводится понятие отрезка. *Отрезком  $AB$*  называется множество, состоящее из точек  $A, B$  и всех точек, лежащих между ними. Говорят, что точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой  $a$ , если отрезок  $AB$  не имеет общих точек с прямой  $a$  (отрезок  $AB$  имеет только одну общую внутреннюю точку с прямой  $a$ ).

II<sub>4</sub>. Каждая прямая разбивает множество всех точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на два подмножества (полуплоскости) так, что любые две точки одного

<sup>1</sup> См. приложение «Об аксиомах планиметрии» в учебнике Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка «Геометрия, 7» (4-е изд.— М.: Просвещение, 1986). Полный список аксиом пространства  $E_3$  помещен в приложении к пробному учебнику тех же авторов «Геометрия, 9—10» (3-е изд.— М.: Просвещение, 1987).

и того же подмножества лежат по одну сторону от данной прямой, а любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от этой прямой.

Пользуясь этими аксиомами, вводится понятие луча и доказывается теорема о дополнительных лучах, которая в учебнике средней школы из методических соображений принята как аксиома (аксиома б). Затем вводится понятие угла: фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки, называется углом. Угол называется развернутым, если эти лучи лежат на одной прямой.

### III. Аксиомы наложения.

III<sub>1</sub>. Наложение есть инъективное отображение плоскости в себя.

III<sub>2</sub>. Если при наложении точки  $A, M, B$  переходят соответственно в точки  $A', M', B'$  и  $A - M - B$ , то  $A' - M' - B'$ .

Фигура  $\Phi$  называется *равной* (конгруэнтной) фигуре  $\Phi'$ , если существует наложение, при котором фигура  $\Phi$  переходит в фигуру  $\Phi'$ . Запись  $\Phi = \Phi'$  означает, что фигура  $\Phi$  равна фигуре  $\Phi'$ .

Фигуру, состоящую из двух точек  $A$  и  $B$ , обозначим через  $\{A, B\}$ .

III<sub>3</sub>. Если  $\{A', B'\} = \{A, B\}$  и  $\{A''B''\} = \{A, B\}$ , то  $\{A', B'\} = \{A'', B''\}$ .

III<sub>4</sub>. Если даны пара точек  $\{A, B\}$  и луч  $h$ , исходящий из точки  $A'$ , то существует одна и только одна точка  $B'$ -луча  $h$ , такая, что  $\{A, B\} = \{A', B'\}$ .

Пользуясь этими аксиомами, можно доказать ряд теорем об образах фигур при наложении: при любом наложении отрезок переходит в отрезок, луч переходит в луч, угол переходит в угол, причем неразвернутый угол — в неразвернутый угол. Таким образом, можно говорить о равенстве углов: угол  $hk$  называется равным углу  $h'k'$ , если существует наложение  $f$ , такое, что  $f(h) = h'$  и  $f(k) = k'$  или  $f(h) = k'$  и  $f(k) = h'$ .

III<sub>5</sub>. Если даны неразвернутый угол  $hk$  и флаг  $(O', h', \lambda')$ , то существует один и только один луч  $k'$  полуплоскости  $\lambda'$ , исходящий из точки  $O'$ , такой, что  $\angle hk = \angle h'k'$ . Каждый угол равен самому себе.

III<sub>6</sub>. Если неразвернутый угол  $hk$  равен углу  $h'k'$ , то существует наложение, при котором луч  $h$  переходит в луч  $h'$ , а луч  $k$  — в луч  $k'$ , и наложение, при котором луч  $h$  переходит в луч  $k'$ , а луч  $k$  — в луч  $h'$ .

Пользуясь этими аксиомами, можно доказать ряд теорем, которые из методических соображений в пробном учебнике для средней школы приняты в качестве аксиом (аксиомы 8, 12, 13 и 14).

Движением назовем любую биекцию плоскости, при которой любая пара  $\{A, B\}$  переходит в равную пару  $\{A', B'\}$ . Пользуясь аксиомами групп I, II и III, можно доказать, что понятия наложения и движения совпадают.

### IV. Аксиомы непрерывности.

IV<sub>1</sub> (аксиома Архимеда). Пусть  $AB$  и  $CD$  — какие-нибудь отрезки. Тогда на прямой  $AB$  существует конечное множество точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , таких, что выполняются условия:

- $A - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \dots, A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$ ;
- $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = CD$ .
- $A - B - A_n$ .

Следствием из аксиом, перечисленных выше, является теория измерения отрезков (см. гл. XI). В частности, можно доказать, что, выбрав единичный отрезок, можно измерить любой отрезок способом, известным из курса средней школы. Таким образом, каждому отрезку ставится в соответствие положительное число так, что равным отрезкам соответствует одно и то же число, и если  $A - B - C$ , то отрезку  $AC$  соответствует число, равное сумме чисел, соответствующих отрезкам  $AB$  и  $BC$ . В пробном учебнике это утверждение выражено в аксиоме 15.

IV<sub>2</sub>. Для любого положительного вещественного числа  $d$  существует отрезок, длина которого при выбранном единичном отрезке равна  $d$ .

### Аксиома параллельных прямых.

V. Через точку, не лежащую на данной прямой, в плоскости, определяемой прямой и точкой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

3. В этой главе было показано, что все аксиомы групп I, II, IV и V выполняются в теории  $\mathcal{T}$  ( $\Sigma_{\mathbb{W}}$ ). Так как любое наложение есть движение, то в этой теории выполняются аксиомы группы III. Поэтому имеет место теорема, аналогичная теореме § 84.

**Т е о р е м а.** Система аксиом  $\Sigma_A$  непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.

## § 86. Длина отрезка. Теорема существования

1. Обозначим через  $L$  множество всех отрезков, а через  $\mathbf{R}_+^*$  множество всех положительных чисел. Говорят, что установлено *измерение отрезков*, если определено отображение  $l : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1) если отрезки  $AB$  и  $A'B'$  равны, то  $l(AB) = l(A'B')$ ;
- 2) если  $A - B - C$ , то  $l(AB) + l(BC) = l(AC)$ ;
- 3) существует отрезок  $PQ$ , такой, что  $l(PQ) = 1$ .

Отрезок  $PQ$  (и любой равный ему отрезок), удовлетворяющий аксиоме 3, называется *линейной единицей* или *единичным отрезком*. Положительное число  $l(AB)$  с указанием линейной единицы называется *мерой* или *длиной* отрезка  $AB$ . Допуская вольность речи, длиной отрезка  $AB$  часто называют число  $l(AB)$ , не указывая каждый раз линейную единицу (если, конечно, это не приводит к недоразумениям).

Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы доказать, что в абсолютной геометрии или в любой другой теории, где выполняются аксиомы абсолютной геометрии, аксиомы 1, 2 и 3 единственным образом определяют длину каждого отрезка. Точнее, мы должны доказать, что всегда существует отображение  $l : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3, притом если выбран единичный отрезок  $PQ$ , то это отображение определяется единственным образом.

2. В некоторых теориях задача измерения отрезков (т. е. существование отображения  $l : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющего аксиомам измерения) имеет очень простое решение. Например, в теории  $\mathcal{T}(\Sigma_W)$  мы уже вводили длину отрезка (см. § 83, п. 3). При этом, как следует из теоремы 1 § 83, выполняются все три аксиомы, сформулированные выше. В теории  $\mathcal{T}(\Sigma_P)$ , как было отмечено в § 84, существование длины отрезка непосредственно вытекает из аксиомы III<sub>1</sub>. Однако в теориях  $\mathcal{T}(\Sigma_H)$ ,  $\mathcal{T}(\Sigma_A)$ ,  $\mathcal{T}(\Sigma_\Lambda)$  задача измерения отрезков решается не так просто.

Докажем, что в абсолютной геометрии при выбранном единичном отрезке  $PQ$  существует отображение  $l : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3. Для этого воспользуемся способом, который мы обычно употребляли на практике для измерения отрезков.

Пусть  $AB$  — произвольный отрезок, а  $PQ$  — выбранный единичный отрезок. Мы сейчас опишем процесс, с помощью которого определяется действительное положительное число  $a$ , являющееся длиной отрезка  $AB$ . Этот процесс называется *измерением отрезка  $AB$* . При этом мы будем пользоваться представлением положительного числа в виде двоичной дроби:  $a = n, n_1n_2\dots$ , где  $n$  — целое неотрицательное число, а каждое из чисел  $n_1, n_2, \dots$  равно 1 или 0. Мы предполагаем, что дробь, выражающая число  $a$ , может быть как конечной, так и бесконечной.

На луче  $AB$  отложим последовательно отрезки  $AA_1, A_1A_2, \dots$ , равные отрезку  $PQ$ . Если одна из точек — точка  $A_n$  совпадает с точкой  $B$ , то будем считать, что  $a = n$ . Если же ни одна из точек  $A_1, A_2, \dots$  не совпадает с  $B$ , то по аксиоме Архимеда существуют такие две точки  $A_n$  и  $A_{n+1}$ , что  $A_n - B - A_{n+1}$ . Пусть  $P_1$  — середина отрезка  $A_nA_{n+1}$ <sup>1</sup>. Возможны три случая: а) точка  $P_1$  совпадает с точкой  $B$ ; б)  $A_n - B - P_1$ ; в)  $P_1 - B - A_{n+1}$ . В первом случае будем считать, что  $a = n,1$  (т. е.  $a = n + \frac{1}{2}$ ), и закончим процесс измерения. В случаях б) и в) запишем соответственно  $n,0\dots$  или  $n,1\dots$  и перейдем к следующему шагу процесса измерения.

Рассмотрим середину  $P_2$  того из отрезков  $A_nP_1$  или  $P_1A_{n+1}$ , который содержит точку  $B$ . Пусть, например,  $B$  — точка отрезка  $A_nP_1$ . Возможны три случая: а) точка  $P_2$  совпадает с точкой  $B$ ; тогда будем считать, что  $a = n,01$  (т. е.  $a = n + \frac{1}{4}$ ), и закончим процесс измерения; б)  $A_n - B - P_2$ ; в)  $P_2 - B - P_1$ . В случае б) или в) запишем соответственно  $n,00$  или  $n,01$  и продолжим процесс измерения. Если  $B$  — точка отрезка  $P_1A_{n+1}$ , то поступаем аналогично (т. е. если точка  $P_2$  совпадает с точкой  $B$ , то считаем, что  $a = n,11$ , а в двух других случаях записываем соответственно  $n,10\dots$  или  $n,11\dots$  и переходим к следующему шагу). Продолжая этот процесс, приходим к определенному числу  $a$ .

Таким образом, мы построили конкретное отображение  $g : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , при котором каждому отрезку  $AB$  ставится в соответствие число  $g(AB)$ , полученное в результате его измерения.

3. Докажем, что отображение  $g : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  удовлетворяет аксиомам 1, 2 и 3 п. 1.

Выполнение аксиомы 3 очевидно, так как, применяя описанный выше процесс к измерению единичного отрезка  $PQ$ , получаем число 1, т. е.  $g(PQ) = 1$ . Ясно, что если отрезки  $AB$  и  $A'B'$  равны, то  $g(AB) = g(A'B')$ .

В самом деле, система точек на двух лучах  $AB$  и  $A'B'$ , полученная в процессе измерения отрезков  $AB$  и  $A'B'$ , имеет одинаковый порядок расположения и отрезки с концами в соответствующих точках равны,

<sup>1</sup> Здесь для удобства дальнейшего изложения мы несколько отклоняемся от обычного способа измерения отрезков, где отрезок  $A_nA_{n+1}$  делят не на 2 равные части, а на 10 равных частей.

поэтому в полученных двоичных разложениях  $g(AB) = n, n_1 n_2 \dots$  и  $g(A'B') = n', n'_1 n'_2 \dots$  имеем  $n = n', n_1 = n'_1$  и т. д. Отсюда следует, что  $g(AB) = g(A'B')$ .

Остается доказать, что выполняется аксиома 2. Для этого рассмотрим два вспомогательных предложения.

1<sup>0</sup>. Если  $A'B' < AB$ , то  $g(A'B') < g(AB)$ .

□ Отложим на луче  $AB$  отрезок  $AC$ , равный отрезку  $A'B'$ . Так как  $A'B' < AB$ , то  $A - C - B$ . Из самого процесса измерения отрезков следует, что  $g(AC) < g(AB)$ . Так как  $AC = A'B'$ , то  $g(AC) = g(A'B')$ . Таким образом,  $g(A'B') < g(AB)$ . ■

Если  $PQ$  — единичный отрезок,  $S_1$  — его середина,  $S_2$  — середина отрезка  $PS_1$ ,  $S_3$  — середина отрезка  $PS_2$ , ...,  $S_n$  — середина отрезка  $PS_{n-1}$ , то отрезок  $PS_n$  будем называть  $\frac{1}{2^n}$ -й частью отрезка  $PQ$ .

2<sup>0</sup>. Пусть  $PQ$  — единичный отрезок, а  $EF$  — отрезок, в котором  $\frac{1}{2^n}$ -я часть отрезка  $PQ$  укладывается  $k$  раз, где  $k$  — произвольное натуральное число. Тогда  $g(EF) = \frac{k}{2^n}$ .

□ Сначала рассмотрим случай, когда  $\frac{k}{2^n} < 1$ . На луче  $EF$  отложим последовательно отрезки  $EM_1, M_1M_2, \dots, M_{k-1}M_k$ , равные отрезку  $PS_n$  ( $PS_n$  —  $\frac{1}{2^n}$ -я часть отрезка  $PQ$ ). Так как отрезок  $PS_n$  укладывается в отрезке  $EF$   $k$  раз, то точка  $M_k$  совпадает с точкой  $F$ . Тогда, очевидно, имеем:

$$g(EM_1) = \underbrace{0,00\dots01}_{n-1 \text{ раз}}, \text{ т. е. } g(EM_1) = \frac{1}{2^n};$$

$$g(EM_2) = 0, \underbrace{0\dots01}_{n-2 \text{ раза}}, \text{ т. е. } g(EM_2) = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n};$$

$$g(EM_3) = 0, \underbrace{0\dots011}_{n-2 \text{ раза}}, \text{ т. е. } g(EM_3) = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n}.$$

Продолжая процесс измерения отрезков  $EM_1, EM_2, \dots$ , получим:  $g(EM_k) = \frac{k}{2^n}$ , т. е.  $g(EF) = \frac{k}{2^n}$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $\frac{k}{2^n} \geq 1$ . Если  $\frac{k}{2^n}$  — целое число, то тогда в отрезке  $EF$  отрезок  $PQ$  укладывается  $\frac{k}{2^n}$  раз, поэтому  $g(EF) = \frac{k}{2^n}$ . Если же  $\frac{k}{2^n}$  не является целым числом, то его представим в виде:  $\frac{k}{2^n} = m + \frac{s}{2^n}$ , где  $m$  — целая часть числа  $\frac{k}{2^n}$ ,

а  $s$  — натуральное число,  $s < 2^n$ . В этом случае на отрезке  $EF$  существует такая точка  $M_0$ , что в отрезке  $EM_0$  отрезок  $PQ$  укладывается  $m$  раз, а в отрезке  $M_0F$  отрезок  $PS_n$  —  $s$  раз. На луче  $M_0F$  отложим последовательно отрезки  $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{s-1}M_s$ , равные отрезку  $PS_n$ . Очевидно, точка  $M_s$  совпадает с точкой  $F$ . Аналогично случаю  $\frac{k}{2^n} < 1$  имеем:  $g(EM_1) = m + \frac{1}{2^n}$ ,  $g(EM_2) = m + \frac{2}{2^n}$ , ...,  $g(EM_s) = m + \frac{s}{2^n}$ , т. е.  $g(EF) = \frac{k}{2^n}$ . ■

Докажем теперь, что отображение  $g: L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  удовлетворяет аксиоме 2 измерения отрезков.

Пусть  $A - B - C$ ,  $a = g(AB)$ ,  $b = g(BC)$ ,  $c = g(AC)$ . Докажем, что  $a + b = c$ . Допустим, что  $a + b \neq c$ , т. е.  $|a + b - c| > 0$ . Выберем натуральное число  $n$ , большее единицы, так, чтобы  $|a + b - c| > \frac{1}{2^{n-1}}$ . На луче  $BA$  отложим последовательно отрезки  $BA_1, A_1A_2, \dots$ , равные отрезку  $PP_n$ , где  $PP_n$  —  $\frac{1}{2^n}$ -я часть отрезка  $PQ$ . По аксиоме Архимеда существуют точки  $A_k$  и  $A_{k+1}$ , такие, что

$$BA_k \leq AB < BA_{k+1}. \quad (1)$$

Аналогично на луче  $BC$  отложим отрезки  $BC_1, C_1C_2, \dots$ , равные отрезку  $PP_n$ , и рассмотрим точки  $C_s$  и  $C_{s+1}$ , такие, что

$$BC_s \leq BC < BC_{s+1}. \quad (2)$$

Тогда очевидно, что

$$A_k C_s \leq AC < A_{k+1} C_{s+1}. \quad (3)$$

По свойству 1<sup>0</sup> из неравенств (1) и (2) получаем:

$$g(BA_k) \leq a \leq g(BA_{k+1}), \quad g(BC_s) \leq b < g(BC_{s+1}),$$

или, учитывая свойство 2<sup>0</sup>, будем иметь  $\frac{k}{2^n} \leq a < \frac{k+1}{2^n}$ ,  $\frac{s}{2^n} \leq b < \frac{s+1}{2^n}$ . Отсюда следует, что

$$\frac{k+s}{2^n} \leq a+b < \frac{k+s+2}{2^n}. \quad (4)$$

Из соотношений (3), учитывая свойства 1<sup>0</sup> и 2<sup>0</sup>, получаем:

$$\frac{k+s}{2^n} \leq c < \frac{k+s+2}{2^n}. \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) следует, что  $|a+b-c| < \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Мы пришли к противоречию, следовательно,  $a+b=c$ .

Таким образом, доказана следующая теорема существования длины в абсолютной геометрии.

**Теорема.** При любом выборе единичного отрезка  $PQ$  существует отображение  $g : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее трем аксиомам измерения отрезков, причем  $g(AB)$  есть число, полученное в результате измерения отрезка  $AB$ .

## § 87. Измерение отрезков. Теорема единственности

1. Докажем, что в абсолютной геометрии при данном выборе единичного отрезка существует единственное отображение  $l : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее аксиомам измерения отрезков. Предварительно рассмотрим три леммы, при формулировке которых отрезки будем обозначать через  $AB, CD, \dots$ , а их длины в выбранной единице измерения соответственно через  $|AB|, |CD|, \dots$ .

**Лемма 1.** Пусть установлено измерение отрезков с единицей измерения  $PQ$ . Если точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$  расположены так, что  $A_0 - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \dots, A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$  и  $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = PQ$ , то  $|A_0A_n| = n$ .

□ Так как  $A_0 - A_1 - A_2$ , то по аксиоме 2  $|A_0A_2| = |A_0A_1| + |A_1A_2|$ . Но  $A_0A_1 = PQ$  и  $A_1A_2 = PQ$ , поэтому  $|A_0A_1| = |PQ| = 1, |A_1A_2| = |PQ| = 1$ , следовательно,  $|A_0A_2| = 2$ . Аналогично получаем  $|A_0A_3| = |A_0A_2| + |A_2A_3| = 3, \dots, |A_0A_n| = |A_0A_{n-1}| + |A_{n-1}A_n| = n$ . ■

**Лемма 2.** Пусть установлено измерение отрезков. Если  $AB < CD$ , то  $|AB| < |CD|$ .

□ На луче  $AB$  отложим отрезок  $AE$ , равный отрезку  $CD$ . Так как  $AB < CD$ , то  $A - B - E$ , поэтому по аксиоме 2  $|AE| = |AB| + |BE|$ . Но  $|BE| > 0$ , поэтому  $|AB| < |AE|$ . По построению  $AE = CD$ , следовательно, по аксиоме 1  $|AE| = |CD|$ . Таким образом,  $|AB| < |CD|$ . ■

**Лемма 3.** Пусть установлено измерение отрезков. Если точка  $O$  — середина отрезка  $AB$ , то  $|AO| = |OB| = \frac{1}{2}|AB|$ .

□ Так как  $A - O - B$ , то по аксиоме 2  $|AB| = |AO| + |OB|$ . Но  $O$  — середина отрезка  $AB$  (т. е.  $AO = OB$ ), поэтому по аксиоме 1 имеем  $|AO| = |OB|$ . Следовательно,  $|AB| = |AO| + |AO| = 2|AO|$ , или  $|AO| = \frac{1}{2}|AB|$ . ■

2. Используя эти леммы, докажем теорему единственности длины в абсолютной геометрии.

**Теорема 1.** Если выбран единичный отрезок  $PQ$ , то существует не более одного отображения  $l : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющего трем аксиомам измерения отрезков.

□ Теорему докажем методом от противного, т. е. допустим, что существуют два отображения  $l : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  и  $l' : L \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющие аксиомам 1, 2 и 3. Отсюда, в частности, следует, что

$$l(PQ) = l'(PQ) = 1. \quad (1)$$

Так как  $l$  и  $l'$  — различные отображения, то существует отрезок

$AB$ , такой, что  $l(AB) = a$ ,  $l'(AB) = b$  и  $a \neq b$ . Допустим для определенности, что  $b > a$ .

На луче  $AB$  отложим последовательно отрезки  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ , равные отрезку  $PQ$ , причем число  $n$  выберем так, чтобы  $A - B - A_n$ , а точка  $A_{n-1}$  принадлежала отрезку  $AB$ . По аксиоме Архимеда такое число  $n$  существует. По лемме 1 в силу равенств (1) имеем:

$$l(AA_{n-1}) = l'(AA_{n-1}) = n - 1, \quad (2)$$

$$l(AA_n) = l'(AA_n) = n. \quad (3)$$

Из равенств (2) следует, что  $B$  и  $A_{n-1}$  — различные точки, поэтому  $A_{n-1} - B - A_n$ , т. е.  $AA_{n-1} < AB < AA_n$ . Отсюда по лемме 2 имеем  $l(AA_{n-1}) < l(AB) < l(AA_n)$  или, учитывая равенства (2) и (3), получаем  $n - 1 < a < n$ . Аналогично, для отображения  $l'$  имеем  $n - 1 < b < n$ . Таким образом,  $b - a < 1$ .

Пусть  $P_1$  — середина отрезка  $A_{n-1}A_n$ . Тогда по аксиоме 2  $l(AP_1) = l(AA_{n-1}) + l(A_{n-1}P_1)$ . Отсюда, учитывая равенство (2) и лемму 3, получаем  $l(AP_1) = n - 1 + \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2}$ . Аналогично

$l'(AP_1) = n - \frac{1}{2}$ . Следовательно, точка  $P_1$  не совпадает с точкой  $B$ , поэтому либо  $A_{n-1} - B - P_1$ , либо  $P_1 - B - A_n$ . В первом случае  $AA_{n-1} < AB < AP_1$ , и по лемме 2 имеем  $n - 1 < a < n - \frac{1}{2}$ .

Также получаем  $n - 1 < b < n - \frac{1}{2}$ . Таким образом,  $b - a < \frac{1}{2}$ . Легко видеть, что во втором случае, когда  $P_1 - B - A_n$ , мы приходим к тому же неравенству.

Рассмотрим теперь середину  $P_2$  того из отрезков  $A_{n-1}P_1$  и  $P_1A_n$ , которому принадлежит точка  $B$ . Рассуждая аналогично предыдущему, получим  $b - a < \frac{1}{2^2}$ . Продолжая эти рассуждения, через

$k$  шагов мы приходим к неравенству  $b - a < \frac{1}{2^k}$ , где  $k$  — натуральное число. Мы пришли к противоречию. В самом деле, так как  $b - a > 0$ , то всегда можно выбрать  $k$  настолько большим, чтобы  $b - a > \frac{1}{2^k}$ . Итак, наше предположение о том, что отображения  $l$  и  $l'$  различные, неверно. ■

**3.** Сформулируем без доказательства еще одну теорему абсолютной геометрии, на которой основано построение системы координат на прямой.

**Т е о р е м а 2.** *Каково бы ни было вещественное число  $a > 0$ , при данном выборе единичного отрезка существует отрезок, длина которого равна  $a$ .*

**З а м е ч а н и е.** Интересно отметить, что доказательства теоремы § 86 и теоремы 1 настоящего параграфа основаны на аксиомах

групп II—III и аксиоме IV<sub>1</sub> Архимеда (§ 71, 72). Однако для доказательства теоремы 2 этих аксиом недостаточно, следует к ним добавить аксиому IV<sub>2</sub> Кантора (см. § 72).

4. Выше было отмечено, что в теориях

$$\mathcal{T}(\Sigma_W), \mathcal{T}(\Sigma_H), \mathcal{T}(\Sigma_P), \mathcal{T}(\Sigma_A) \text{ и } \mathcal{T}(\Sigma_\Lambda) \quad (4)$$

выполнены все аксиомы абсолютной геометрии. Поэтому доказанные две теоремы существования и единственности длины имеют место во всех теориях (4). Отсюда, в частности, приходим к следующему важному утверждению:

1<sup>0</sup>. В теориях  $\mathcal{T}(\Sigma_H)$ ,  $\mathcal{T}(\Sigma_A)$  и  $\mathcal{T}(\Sigma_\Lambda)$  можно установить измерение отрезков с произвольно выбранным единичным отрезком. При этом установленное измерение отрезков является единственным.

Так как в теориях  $\mathcal{T}(\Sigma_P)$  и  $\mathcal{T}(\Sigma_W)$  имеет место теорема 2, то справедливы следующие утверждения.

2<sup>0</sup>. В теории  $\mathcal{T}(\Sigma_P)$  при данном выборе единичного отрезка результат процесса измерения отрезков совпадает с тем, который следует из аксиом меры (см. § 84).

3<sup>0</sup>. В теории  $\mathcal{T}(\Sigma_W)$  при данном выборе единичного отрезка результат процесса измерения отрезков совпадает с тем, который следует из аксиомы 3 Вейля (см. § 83).

## § 88. Площадь многоугольника в евклидовой геометрии. Теорема существования

1. В этой главе мы будем рассматривать только фигуры, лежащие в одной плоскости. Напомним, что *ломаной*  $A_1A_2\dots A_n$  называется фигура, составленная из  $n - 1$  отрезков  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ . Эти отрезки называются *звеньями* ломаной. Ломаная называется *простой*, если смежные звенья (т. е.  $A_1A_2$  и  $A_2A_3, A_2A_3$  и  $A_3A_4$  и т. д.) не лежат на одной прямой и несмежные звенья не имеют общих точек. Если концы ломаной  $A_1A_2\dots A_n$  (т. е. точки  $A_1$  и  $A_n$ ) совпадают, то она называется замкнутой. В этом случае звенья  $A_{n-1}A_n$  и  $A_1A_2$  также называются смежными. Простая замкнутая ломаная разделяет множество всех точек плоскости, не принадлежащих ломаной, на два подмножества, одно из которых называется *внутренней*, а другое — *внешней* областью относительно данной ломаной. На рисунке 241

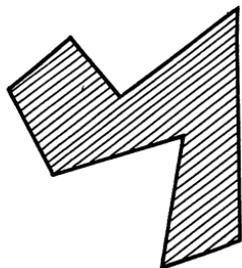


Рис. 241

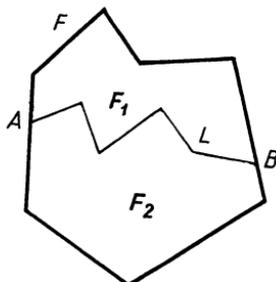


Рис. 242

внутренняя область замкнутой ломаной заштрихована. Объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области называется *простым многоугольником*. В этой главе мы будем рассматривать только простые многоугольники, называя их для краткости просто многоугольниками. Замкнутая ломаная, ограничивающая многоугольник, является его *границей*.

Пусть  $F$  — многоугольник, а  $A$  и  $B$  — две точки на его границе. Если мы соединим точки  $A$  и  $B$  простой ломаной  $L$ , все точки которой, кроме  $A$  и  $B$ , лежат внутри многоугольника, то получим два новых многоугольника  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 242). Очевидно,  $F_1 \cap F_2 = L$ , а  $F_1 \cup F_2 = F$ . Многоугольник  $F$  называют *суммой многоугольников*  $F_1$  и  $F_2$  и пишут:  $F = F_1 + F_2$ .

Многоугольник назовем *ориентированным*, если указан порядок обхода его вершин. Ориентированный многоугольник будем обозначать так:  $\bar{F} = A_1A_2\dots A_n$ .

Пусть  $F = F_1 + F_2$ . Введем на многоугольниках  $F$ ,  $F_1$  и  $F_2$  ориентации так, чтобы общие вершины многоугольников  $\bar{F}$  и  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}$  и  $\bar{F}_2$  следовали друг за другом в одном и том же порядке. В этом случае будем говорить, что ориентации этих многоугольников согласованы. Тогда многоугольник  $\bar{F}$  будем называть суммой многоугольников  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  и писать так:  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ .

2. Для дальнейшего изложения введем вспомогательное понятие характеристики ориентированного многоугольника и рассмотрим некоторые ее свойства.

Обозначим через  $\vec{M}$  множество всех многоугольников евклидовой плоскости  $\sigma$ , а через  $\vec{k}$  единичный вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — произвольные векторы, параллельные плоскости  $\sigma$ . Смешанное произведение  $\vec{a}\vec{b}\vec{k}$  обозначим через  $\vec{a}\circ\vec{b}$ , т. е.  $\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{k}$ .

Выберем на плоскости  $\sigma$  ортонормированный базис  $\vec{i}, \vec{j}$  так, чтобы  $\vec{i}\vec{j}\vec{k} = 1$ . Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в этом базисе имеют координаты  $\vec{a}(a_1, a_2)$ ,  $\vec{b}(b_1, b_2)$ , то легко видеть, что

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

В самом деле, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в базисе  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  имеют координаты  $\vec{a}(a_1, a_2, 0)$ ,  $\vec{b}(b_1, b_2, 0)$ , поэтому из равенства  $\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{k}$  получаем равенство (1).

Используя формулу (1), легко доказать равенства

$$\vec{a}\circ\vec{b} = -\vec{b}\circ\vec{a}, \quad (2)$$

$$\vec{a}\circ(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\circ\vec{b} + \vec{a}\circ\vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b})\circ\vec{c} = \vec{a}\circ\vec{c} + \vec{b}\circ\vec{c}. \quad (3)$$

Пусть  $\bar{F} = \overline{A_1A_2\dots A_n}$  — ориентированный  $n$ -угольник, а  $O$  —

произвольная точка плоскости  $\sigma$ . Число

$$[\bar{F}] = \vec{r}_1 \circ \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \circ \vec{r}_3 + \dots + \vec{r}_{n-1} \circ \vec{r}_n + \vec{r}_n \circ \vec{r}_1, \quad (4)$$

где  $\vec{r}_i = \vec{OA}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , назовем *характеристикой многоугольника*  $\bar{F}$ .

Если в прямоугольной системе координат  $Oi \ j$  плоскости  $\sigma$  вершины многоугольника  $\bar{F}$  имеют координаты  $A_i(x_i, y_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , то формулу (4) можно записать в виде

$$[\bar{F}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Рассмотрим некоторые свойства характеристики многоугольника.

1<sup>0</sup>. *Характеристика многоугольника  $\bar{F}$  не зависит от выбора точки  $O$  на плоскости  $\sigma$ .*

□ Пусть  $O'$  — другая точка плоскости  $\sigma$ ,  $[\bar{F}]'$  — характеристика многоугольника относительно этой точки, а  $\vec{p} = \vec{O'O}$ . По определению

$$[\bar{F}]' = \vec{r}'_1 \circ \vec{r}'_2 + \vec{r}'_2 \circ \vec{r}'_3 + \dots + \vec{r}'_{n-1} \circ \vec{r}'_n + \vec{r}'_n \circ \vec{r}'_1, \text{ где } \vec{r}'_i = \vec{O'A}_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая равенства (2) и (3), получаем:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 \circ \vec{r}'_2 &= (\vec{p} + \vec{r}_1) \circ (\vec{p} + \vec{r}_2) = \vec{p} \circ \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \circ \vec{p} + \vec{r}_1 \circ \vec{r}_2, \\ \vec{r}'_2 \circ \vec{r}'_3 &= (\vec{p} + \vec{r}_2) \circ (\vec{p} + \vec{r}_3) = \vec{p} \circ \vec{r}_3 + \vec{r}_2 \circ \vec{p} + \vec{r}_2 \circ \vec{r}_3, \\ \vec{r}'_n \circ \vec{r}'_1 &= (\vec{p} + \vec{r}_n) \circ (\vec{p} + \vec{r}_1) = \vec{p} \circ \vec{r}_1 + \vec{r}_n \circ \vec{p} + \vec{r}_n \circ \vec{r}_1. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства и принимая во внимание равенство (2), получаем  $[\bar{F}]' = [\bar{F}]$ . ■

2<sup>0</sup>. *Если  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ , то  $|[\bar{F}]| > |[\bar{F}_1]|$  и  $|[\bar{F}]| > |[\bar{F}_2]|$ .*

Это свойство мы приводим без доказательства.

3<sup>0</sup>. *Если  $\bar{F}$  — произвольный многоугольник, то  $[\bar{F}] \neq 0$ , поэтому  $|[\bar{F}]| > 0$ .*

□ Рассмотрим сначала случай, когда  $\bar{F}$  — треугольник:

$\bar{F} = A_1A_2A_3$ . Если за точку  $O$  выбрать точку  $A_1$ , то по формуле (4) получаем  $[\bar{F}] = \vec{r}_2 \circ \vec{r}_3$ . Но векторы  $\vec{r}_2$  и  $\vec{r}_3$  не коллинеарны, поэтому из формулы (1)  $[\bar{F}] \neq 0$  и, значит,  $|[\bar{F}]| > 0$ .

Пусть теперь  $\bar{F}$  — произвольный ориентированный многоугольник. Представим его в виде  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ , где  $\bar{F}_1$  — ориентированный треугольник (рис. 243). По свойству 2<sup>0</sup>  $|[\bar{F}]| > |[\bar{F}_1]|$ , а по доказанному  $|[\bar{F}_1]| > 0$ , поэтому  $|[\bar{F}]| > 0$ . ■

Из формулы (4) мы заключаем, что при замене ориентации многоугольника на про-

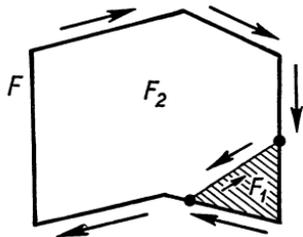


Рис. 243

тивоположную его характеристика меняет знак, но абсолютная величина характеристики не меняется. Поэтому, учитывая свойство  $3^0$ , приходим к утверждению:

$4^0$ . Любой многоугольник можно ориентировать так, чтобы его характеристика была положительной.

3. Рассмотрим множество  $M$  всех многоугольников на евклидовой плоскости. Говорят, что установлено *измерение площадей* многоугольников, если определено отображение  $S : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее следующим аксиомам.

1) Если многоугольники  $F$  и  $F'$  равны, то  $S(F) = S(F')$ .

2) Если  $F = F_1 + F_2$ , то  $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$ .

3)  $S(P_0) = 1$ , где  $P_0$  — квадрат, построенный на единичном отрезке как на стороне.

Положительное число  $S(F)$  называется *мерой* или *площадью* многоугольника  $F$ , а квадрат  $P_0$  — *единичным квадратом*.

По аналогии с теорией измерения отрезков мы должны доказать, что в евклидовой геометрии всегда существует отображение  $S : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3, причем если выбран единичный отрезок, то это отображение единственное.

Докажем сначала теорему существования площади многоугольника.

**Теорема.** Отображение  $S : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  по закону

$$S(F) = \frac{1}{2} |\bar{F}| \quad (6)$$

удовлетворяет аксиомам 1, 2 и 3 измерения площадей.

□ 1) Докажем, что если  $F = F'$ , то  $S(F) = S(F')$ . Так как  $F = F'$ , то существует движение, которое многоугольник  $F$  переводит в многоугольник  $F'$ . По теореме 1 § 41 ч. I это движение может быть задано двумя ортонормированными реперами  $R$  и  $R'$ . Если  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$  — вершины многоугольника  $F$  в репере  $R$ , то по той же теореме  $A'_1(x_1, y_1), A'_2(x_2, y_2), \dots, A'_n(x_n, y_n)$  — вершины многоугольника  $F'$  в репере  $R'$ . Поэтому по формуле (5) получаем  $[\bar{F}] = [\bar{F}']$ , следовательно,  $S(F) = S(F')$ .

2) Докажем, что если  $F = F_1 + F_2$ , то  $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$ . Многоугольник  $F$  ориентируем так, чтобы  $[\bar{F}] > 0$  (п. 2, свойство  $4^0$ ). Затем введем на многоугольниках  $F_1$  и  $F_2$  ориентации, согласованные с ориентацией многоугольника  $\bar{F}$ . Тогда  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ . Докажем, что

$$[\bar{F}] = [\bar{F}_1] + [\bar{F}_2]. \quad (7)$$

Пусть  $M_0M_1\dots M_k$  — ломаная, которая разбивает многоугольник  $F$  на многоугольники  $F_1$  и  $F_2$ , а  $\vec{R}_0, \vec{R}_1, \dots, \vec{R}_k$  — радиус-векторы вершин этой ломаной. Вершины многоугольника  $\bar{F} = A_1A_2\dots A_n$  обозначим так, как показано на рисунке 244, а их радиус-векторы —

<sup>1</sup> По свойству  $3^0$   $|\bar{F}| > 0$ , поэтому в данном отображении многоугольнику соответствует *положительное* число.

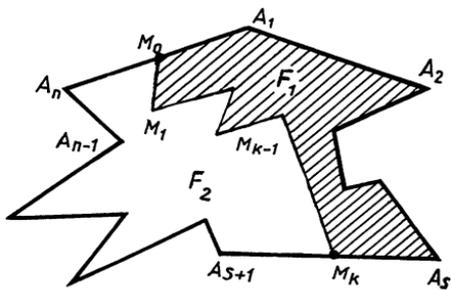


Рис. 244

через  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ . На этом рисунке  $A_1 - M_0 - A_n$  и  $A_s - M_k - A_{s+1}$ .

По определению имеем:

$$[\vec{F}_1] = \vec{R}_0 \circ \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \circ \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \circ \vec{r}_3 + \dots + \vec{r}_s \circ \vec{R}_k + \vec{R}_k \circ \vec{R}_{k-1} + \dots + \vec{R}_1 \circ \vec{R}_0,$$

$$[\vec{F}_2] = \vec{R}_k \circ \vec{r}_{s+1} + \vec{r}_{s+1} \circ \vec{r}_{s+2} + \dots + \vec{r}_n \circ \vec{R}_0 + \vec{R}_0 \circ \vec{R}_1 + \dots + \vec{R}_{k-1} \circ \vec{R}_k.$$

Сложив эти равенства и учитывая свойство (2), получаем:

$$[\vec{F}_1] + [\vec{F}_2] = (\vec{R}_0 \circ \vec{r}_1 + \vec{r}_n \circ \vec{R}_0) + (\vec{r}_s \circ \vec{R}_k + \vec{R}_k \circ \vec{r}_{s+1}) + \vec{r}_1 \circ \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \circ \vec{r}_3 + \dots + \vec{r}_{s-1} \circ \vec{r}_s + \vec{r}_{s+1} \circ \vec{r}_{s+2} + \dots + \vec{r}_{n-1} \circ \vec{r}_n.$$

Так как  $M_0$  — точка отрезка  $A_1 A_n$ , то  $\vec{R}_0 = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_n}{1 + \lambda}$ . Поэтому  $\vec{R}_0 \circ \vec{r}_1 + \vec{r}_n \circ \vec{R}_0 = \vec{r}_n \circ \vec{r}_1$ . Аналогично  $\vec{r}_s \circ \vec{R}_k + \vec{R}_k \circ \vec{r}_{s+1} = \vec{r}_s \circ \vec{r}_{s+1}$ . Таким образом, равенство (7) доказано.

Так как  $[\vec{F}] > 0$ , то  $[\vec{F}_1] > 0$  и  $[\vec{F}_2] > 0$ . В самом деле, если допустить, например, неравенство  $[\vec{F}_1] < 0$ , то из равенства (7) получаем  $[\vec{F}] < [\vec{F}_2]$ , что противоречит свойству 2<sup>0</sup>, п. 2. Таким образом, из равенства (7) получаем  $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$ .

3) Пусть  $P_0 = OA_1 A_2 A_3$  — квадрат, построенный на единичном отрезке. В системе координат  $OO\vec{A}_1 O\vec{A}_2$  вершины квадрата  $P_0$  имеют координаты  $O(0, 0)$ ,  $A_1(1, 0)$ ,  $A_2(0, 1)$ ,  $A_3(1, 1)$ . По формуле (5) получаем  $[\vec{P}_0] = 2$ , поэтому  $S(P_0) = 1$ . ■

Из доказанной теоремы следует важный вывод: *существует хотя бы одно отображение  $S : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее аксиомам 1, 2, 3.*

## § 89. Теорема единственности. Равновеликие и равноставленные многоугольники

1. Докажем теперь, что в евклидовой геометрии существует единственное отображение  $S : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3 § 88. Предварительно докажем две теоремы.

**Теорема 1.** *Если  $S : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  — отображение, удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3 § 88, то  $S(P) = xy$ , где  $P$  — прямоугольник, стороны которого равны  $x$  и  $y$ .*

□ Рассмотрим отображение  $S$  на множестве  $M_0$  всех прямоугольников. Известно, что любые два прямоугольника равны, если длины  $x$  и  $y$  их сторон соответственно равны. Поэтому  $S(P)$  есть функция от  $x, y$ , определенная для всех  $x, y \in \mathbf{R}_+^*$  и принимающая только положительные значения. Обозначим ее через  $f : S(P) = f(x, y)$ . Функция  $f$  обладает следующими свойствами:

$$f(x, y) = f(y, x), \quad (1)$$

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y). \quad (2)$$

Свойство (1) вытекает из аксиомы 1, если учесть, что два прямоугольника с длинами сторон  $x, y$  и  $y, x$  равны. Свойство (2) следует из аксиомы 2 (рис. 245). Докажем еще одно свойство функции  $f$ :

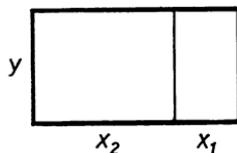


Рис. 245

$$f(x, y) = f(1, y) \cdot x. \quad (3)$$

Для этого введем обозначение  $f(x, y_0) = g(x)$ , где  $y_0 \in \mathbf{R}_+^*$  — постоянное число. Из свойства (2) следует, что для любых  $x_1, x_2 > 0$  имеем  $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ . Из курса математического анализа известно, что функция  $g(x)$ , обладающая этим свойством, определенная на множестве  $\mathbf{R}_+^*$  и принимающая только положительные значения, выражает прямую пропорциональность:  $g(x) = k \cdot x, k = \text{const}$ . Значит,  $f(x, y_0) = k \cdot x$ .

При другом значении  $y = \text{const}$  коэффициент  $k$ , вообще говоря, тоже будет другим. В общем случае надо считать  $k = k(y)$ , и мы получим  $f(x, y) = k(y) \cdot x$ . Если  $x = 1$ , то  $f(1, y) = k(y)$ , поэтому справедливо равенство (3).

Из равенств (1) и (3) получаем  $f(1, y) = f(y, 1) = f(1, 1)y$ . По аксиоме 3  $f(1, 1) = 1$ , поэтому  $f(1, y) = y$ . Равенство (3) теперь принимает вид  $f(x, y) = xy$ , следовательно,  $S(P) = xy$ . ■

**Теорема 2.** Если  $S : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  — отображение, удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3, то  $S(T) = \frac{1}{2} xy$ , где  $T$  — треугольник,  $x$  — одна из его сторон, а  $y$  — соответствующая высота.

□ Пусть  $ABC$  — данный треугольник  $T$ ,  $AB = x$ , а высота  $CH$  равна  $y$ . Возможны три случая.

1) Точка  $H$  совпадает с одной из точек  $A$  или  $B$ . Пусть для определенности точки  $A$  и  $H$  совпадают (рис. 246, а). Тогда  $T$  — прямоугольный треугольник с катетами  $AB$  и  $AC$ . Дополним этот треугольник до прямоугольника  $ABDC$ , как показано на рисунке. По доказанной теореме  $S(ABDC) = xy$ . По аксиоме 2  $S(ABDC) = S(ABC) + S(DCB)$ . Но  $\triangle ABC = \triangle DCB$ , поэтому  $S(DCB) = S(ABC)$ . Таким образом,  $xy = 2S(T)$ , т. е.  $S(T) = \frac{1}{2} xy$ .

2) Точка  $H$  лежит между точками  $A$  и  $B$  (рис. 246, б). По аксиоме 2  $S(T) = S(AHC) + S(HCB)$ . По доказанному  $S(AHC) =$

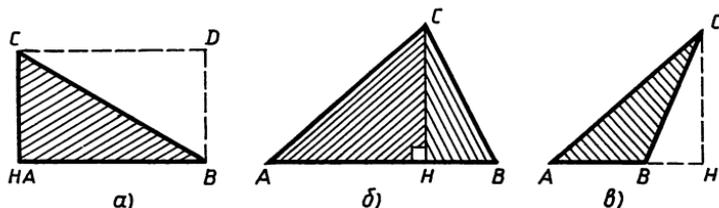


Рис. 246

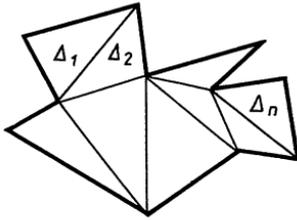


Рис. 247

$$= \frac{1}{2}AH \cdot y, \quad S(HCB) = \frac{1}{2}HB \cdot y, \quad \text{поэтому}$$

$$S(T) = \frac{1}{2}AH + HB)y = \frac{1}{2}xy.$$

3) Точка  $H$  не принадлежит отрезку  $AB$ . Пусть для определенности  $A - B - H$  (рис. 246, в). По аксиоме 2  $S(ACH) = S(T) + S(BCH)$ . По доказанному

$$S(ACH) = \frac{1}{2}AH \cdot y, \quad S(BCH) = \frac{1}{2}BH \cdot y,$$

$$\text{поэтому } S(T) = \frac{1}{2}AH \cdot y - \frac{1}{2}BH \cdot y = \frac{1}{2}xy. \quad \blacksquare$$

2. Используя теорему 2, докажем теорему единственности площади в евклидовой геометрии.

**Теорема 3.** Если выбран единичный отрезок, то существует не более одного отображения  $S: M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющего аксиомам 1, 2 и 3 § 88.

□ Теорему докажем методом от противного, т. е. допустим, что существуют два отображения  $S: M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  и  $S': M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющие аксиомам 1, 2 и 3 при одном и том же выборе единичного отрезка.

Возьмем произвольный многоугольник  $F$  и разложим его на конечное множество треугольников:  $F = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$  (рис. 247). По аксиоме 2 имеем:

$$S(F) = \sum_{i=1}^n S(\Delta_i), \quad S'(F) = \sum_{i=1}^n S'(\Delta_i). \quad (4)$$

Из теоремы 2  $S(\Delta_i) = S'(\Delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , поэтому, используя равенства (4), получаем  $S(F) = S'(F)$ . Полученное равенство справедливо для любого многоугольника, следовательно, наше допущение неверно, и, значит, отображения  $S$  и  $S'$  совпадают. ■

**С л е д с т в и е 1.** При любом способе разложения многоугольника  $F$  на конечное множество треугольников сумма площадей этих треугольников одна и та же.

□ В самом деле, по аксиоме 2 эта сумма равна площади  $S(F)$  многоугольника  $F$ , которая по теореме 3 не зависит от способа разложения  $F$  на треугольники. ■

Учитывая теорему § 88 и формулу (5) § 88, приходим к утверждению.

**С л е д с т в и е 2.** Если вершины многоугольника  $A_1A_2\dots A_n$  в прямоугольной системе имеют координаты  $A_i(x_i; y_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , то

$$S(A_1A_2\dots A_n) = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{cc} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{array} \right|.$$

**З а м е ч а н и е.** В школьном курсе геометрии мы не доказываем теорему существования площади многоугольника, а также теорему единственности в общем виде. Тем не менее теория площадей, изучаемая в школе, имеет определенное значение: она, опираясь на утверждение (которое принимается без доказательства), что существует

отображение  $S : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3, дает возможность вычислить площади простейших многоугольников по какому-то данным, и тем самым в школьном курсе геометрии устанавливается единственность измерения простейших многоугольников.

3. Два многоугольника называются *равновеликими*, если их площади равны. Ясно, что равновеликость есть отношение эквивалентности на множестве  $M$  всех многоугольников.

Два многоугольника  $F$  и  $F'$  называются *равносоставленными*, если их можно разложить на одно и то же число соответственно равных многоугольников. Можно доказать, что отношение равносоставленности тоже является отношением эквивалентности на множестве  $M$ .

Очевидно, *если два многоугольника равносоставлены, то они равновелики*. На этом свойстве основан метод разложения при вычислении площади многоугольника  $F$ : данный многоугольник  $F$  разлагают на конечное множество многоугольников, таких, чтобы из них можно было «сложить» многоугольник  $F'$ , площадь которого известна. Именно таким способом в школьном курсе геометрии находят формулы для вычисления площади параллелограмма, треугольника, трапеции.

Имеет место теорема Бояи — Гервина, которую мы приводим без доказательства.

**Т е о р е м а 4.** *Если два многоугольника равновелики, то они равносоставлены.*

Таким образом, во множестве  $M$  всех многоугольников отношение равновеликости совпадает с отношением равносоставленности.

## §90. Объем многогранника в евклидовом пространстве (обзор)

1. Понятие объема многогранника в евклидовой геометрии вводится таким же путем, как и понятие площади многоугольника. В этом параграфе будем рассматривать только простые многогранники, называя их просто многогранниками.

По аналогии с теорией площадей многоугольников мы вводим понятие суммы двух многогранников:  $F = F_1 + F_2$ . Разложение многогранника  $F$  на сумму многогранников  $F_1$  и  $F_2$  производится при помощи какой-либо многогранной поверхности<sup>1</sup>  $G$ , причем  $F_1 \cap F_2 = G$ , а  $F \cup F_2 = F$ .

Обозначим через  $M$  множество всех многогранников евклидова пространства. Говорят, что установлено *измерение объемов многогранников*, если определено отображение  $V : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) Если многогранники  $F$  и  $F'$  равны, то  $V(F) = V(F')$ .

2) Если  $F = F_1 + F_2$ , то  $V(F) = V(F_1) + V(F_2)$ .

3)  $V(P_0) = 1$ , где  $P_0$  — куб, ребро которого равно единичному отрезку.

<sup>1</sup> Под многогранной поверхностью мы понимаем связную часть поверхности какого-либо многогранника, образованную некоторыми из его граней.

Положительное число  $V(F)$  называется *мерой* или *объемом* многогранника  $F$ . По аналогии с теорией измерения площадей можно доказать следующие две теоремы.

**Теорема 1.** *В евклидовом пространстве существует хотя бы одно отображение  $V: M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3 измерения объемов многогранников.*

**Теорема 2.** *Если выбран единичный отрезок, то существует не более одного отображения  $V: M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , удовлетворяющего аксиомам 1, 2 и 3 измерения объемов многогранников.*

Справедлива теорема, аналогичная теореме 1 § 89.

**Теорема 3.** *Если  $V: M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  — отображение, удовлетворяющее аксиомам 1, 2 и 3, то  $V(P) = \text{хуз}$ , где  $P$  — прямоугольный параллелепипед с измерениями  $x, y$  и  $z$ .*

С помощью этой теоремы, так же как и в школьном курсе геометрии<sup>1</sup>, можно вывести формулы для вычисления объемов простейших многогранников — прямой и наклонной призм, пирамид и других многогранников.

**2.** Два многогранника называются *равновеликими*, если их объемы равны. Ясно, что равновеликость есть отношение эквивалентности на множестве  $M$  всех многогранников.

Два многогранника  $F$  и  $F'$  называются *равносоставленными*, если их можно разложить на одно и то же число соответственно равных многогранников.

Два равносоставленных многогранника являются, очевидно, и равновеликими. Но в отличие от теории площадей обратное утверждение, вообще говоря, неверно: не любые два равновеликих многогранника будут и равносоставленными. Немецкий математик М. Ден в 1900 г. доказал следующую теорему.

**Теорема 4.** *Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  — меры двугранных углов многогранника  $P$ , а  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  — меры двугранных углов многогранника  $P'$ . Если многогранники  $P$  и  $P'$  равносоставлены, то существуют такие целые положительные числа  $t_1, t_2, \dots, t_r$  и  $n_1, n_2, \dots, n_s$  и такое целое (положительное, отрицательное или равное нулю) число  $c$ , что*

$$t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \dots + \alpha_r t_r - (n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + \dots + n_s\beta_s) = \pi c. \quad (1)$$

Эта теорема выражает необходимые условия равносоставленности двух равновеликих многогранников. В 1965 г. французский математик Сидлер доказал, что условия Дена являются достаточными.

Существуют равновеликие многогранники, для которых условие (1) не выполняется. В 1901 г. Ден также доказал, что для куба и равновеликого ему правильного тетраэдра условие (1) не выполняется, поэтому они не равносоставлены. Более того, можно доказать, что равновеликие тетраэдры, вообще говоря, не равносоставлены. Вследствие этого применение теории пределов (в той или иной форме) при измерении объема пирамиды является неизбежным.

<sup>1</sup> См., например: Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. В., Позняк Э. Г. Геометрия, 9—10: Пробный учебник.— 3-е изд.— М.: Просвещение, 1987.

Под неевклидовыми геометриями принято понимать гиперболическую геометрию Н. И. Лобачевского, эллиптическую геометрию Б. Римана и сферическую геометрию. Простейшие сведения из геометрии Лобачевского были даны в гл. IX. В настоящей главе мы изложим дальнейшие факты этой геометрии. При этом гиперболическую и эллиптическую геометрии мы будем строить на векторной основе (или, как говорят, по схеме Г. Вейля). Но сначала нам надо познакомиться с псевдоевклидовым пространством.

### § 91. Гиперболическое пространство

1. Пусть  $V$  — векторное пространство размерности  $n$  над полем  $\mathbf{R}$  (в дальнейшем нас будут интересовать значения  $n = 2, 3$ ). Зададим билинейную форму  $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ , такую, чтобы квадратичная форма  $\varphi(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x})$  была бы невырожденной квадратичной формой индекса  $k > 0$ . Число  $g(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbf{R}$  назовем *скалярным произведением* векторов  $\vec{x}, \vec{y}$  и обозначим через  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  или  $\vec{x} \vec{y}$ , а число  $\sqrt{\varphi(\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}^2}$  — *длиной* (нормой) вектора  $\vec{x}$ . Таким образом, если  $\vec{x}^2 \geq 0$ , то  $\sqrt{\vec{x}^2} \geq 0$ , а если  $\vec{x}^2 < 0$ , то  $\sqrt{\vec{x}^2} = bi$ , где  $b > 0$  и  $i^2 = -1$ .

Векторное пространство  $V$ , в котором скалярное произведение определено при помощи указанной выше билинейной формы  $g$ , называется *псевдоевклидовым векторным пространством индекса  $k$* .

В псевдоевклидовом пространстве скалярный квадрат  $\vec{x}^2$  вектора  $\vec{x} \neq \vec{0}$  может быть положительным, отрицательным или нулем. Например, если в базисе  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  квадратичная форма  $\varphi(\vec{x})$  имеет нормальный вид:

$$\varphi(\vec{x}) = (x^1)^2 + \dots + (x^{n-k})^2 - (x^{n-k+1})^2 - \dots - (x^n)^2, \quad (1)$$

то, очевидно, для векторов базиса имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{e}_1) = 1, \quad \varphi(\vec{e}_2) = 1, \quad \dots, \quad \varphi(\vec{e}_{n-k}) = 1, \quad \varphi(\vec{e}_{n-k+1}) = -1, \\ \dots, \quad \varphi(\vec{e}_n) = -1. \end{aligned}$$

Поэтому длина каждого из векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-k}$  равна единице; это *единичные* векторы. Каждый из векторов  $\vec{e}_{n-k+1}, \dots, \vec{e}_n$  имеет мнимую длину  $i$ ; назовем эти векторы *мнимоединичными*.

Вектор  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , для которого  $\vec{x}^2 = 0$ , называется *изотропным*. Длины этих векторов равны нулю. Каждый из векторов  $\vec{e}_p + \vec{e}_q$ , где  $\vec{e}_p$  и  $\vec{e}_q$  — векторы базиса  $B$  при  $p \leq n - k$ ,  $q > n - k$ , является изотропным, так как по формуле (1)  $\varphi(\vec{e}_p + \vec{e}_q) = 1 - 1 = 0$ .

2. По-прежнему два вектора  $\vec{x}, \vec{y}$  будем называть *ортогональными*, если  $\vec{x}\vec{y} = 0$ . Векторы базиса  $B$ , в котором квадратичная форма имеет нормальный вид (1), попарно ортогональны, так как эти векторы попарно сопряжены относительно билинейной формы  $g(\vec{x}, \vec{y})$  (см. ч. I, § 91).

Таким образом, базис  $B$  состоит из единичных и мнимоединичных попарно ортогональных векторов. Такой базис назовем *ортонормированным*. Так как индекс квадратичной формы  $\varphi(\vec{x})$  не зависит от способа приведения этой формы к нормальному виду, то все ортонормированные базисы псевдоевклидова векторного пространства  $V$  содержат одинаковое число мнимоединичных векторов; это число равно индексу пространства.

Пусть  $B$  — ортонормированный базис, а векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  в этом базисе имеют координаты  $(x^i)$  и  $(y^i)$ . Тогда  $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ ,  $\vec{y} = y^i \vec{e}_i$ , поэтому  $\vec{x}\vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^{n-k} y^{n-k} - x^{n-k+1} y^{n-k+1} - \dots - x^n y^n$ . (2)

Докажем следующую теорему.

**Т е о р е м а.** В псевдоевклидовом векторном пространстве  $V$  индекса 1 для любых двух векторов мнимой длины справедливо неравенство

$$(\vec{x}\vec{y})^2 \geq \vec{x}^2 \vec{y}^2,$$

причем знак равенства в этой формуле имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны.

□ Пусть  $\vec{x}^2 = -r^2$ . Выберем ортонормированный базис  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  так, чтобы  $\vec{e}_n = \frac{\vec{x}}{r}$ . Тогда  $\vec{x} = r\vec{e}_n$ , и поэтому в базисе  $B$  вектор  $\vec{x}$  имеет координаты  $\vec{x}(0, 0, \dots, r)$ . Обозначим в том же базисе через  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  координаты вектора  $\vec{y}$ . По формуле (2) имеем  $\vec{x}\vec{y} = -ry^n$ , и, значит,  $(\vec{x}\vec{y})^2 = r^2(y^n)^2$ . С другой стороны,  $\vec{x}^2 = -r^2$ ,  $\vec{y}^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 + \dots + (y^{n-1})^2 - (y^n)^2$ . Поэтому  $\vec{x}^2 \cdot \vec{y}^2 = -r^2(y^1)^2 - r^2(y^2)^2 - \dots - r^2(y^{n-1})^2 + r^2(y^n)^2$ .

Если векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны, то  $y^1 = \dots = y^{n-1} = 0$ , поэтому  $(\vec{x}\vec{y})^2 = \vec{x}^2 \vec{y}^2$ . Если же эти векторы не коллинеарны, то хотя бы одно из

чисел  $y^1, y^2, \dots, y^{n-1}$  отлично от нуля, поэтому  $(\vec{x} \vec{y})^2 > \vec{x}^2 \vec{y}^2$ . ■

Следствие. В псевдоевклидовом векторном пространстве индекса 1 для любых двух векторов  $\vec{x}, \vec{y}$  мнимой длины справедливо неравенство

$$\left| \frac{\vec{x} \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} \right| \geq 1. \quad (3)$$

3. Пусть  $V$  — псевдоевклидово векторное пространство индекса 1, размерности  $n + 1$  над полем  $\mathbf{R}$  ( $n = 2, 3$ ) и  $g(\vec{x}, \vec{y})$  — билинейная форма, с помощью которой в пространстве  $V$  определено скалярное произведение. Мы будем рассматривать только автоморфизмы пространства  $V$ , т. е. такие линейные преобразования этого пространства, которые сохраняют скалярное произведение векторов (и значит, сохраняют длины векторов). Обозначим через  $\Omega^*$  множество всех векторов мнимой длины пространства  $V$ . Очевидно, что если  $\varphi$  — автоморфизм пространства  $V$ , то  $\varphi(\Omega^*) = \Omega^*$ .

Множество  $E \neq 0$  называется  $n$ -мерным гиперболическим пространством Лобачевского (и обозначается через  $\Lambda_n$ ), если задано отображение

$$\pi : \Omega^* \rightarrow E,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1)  $\pi$  — сюръекция;
  - 2)  $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$  тогда и только тогда, когда  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны.
- Систему аксиом 1—2 пространства Лобачевского обозначим через  $\Sigma_\Lambda$ .

Элементы множества  $E$  называются *точками*. Так же как и в случае проективного пространства, если  $X = \pi(\vec{x})$ , то будем говорить, что точка  $X$  порождена вектором  $\vec{x}$ .

Расстояние между точками  $X, Y \in \Lambda_n$  определяется следующим образом. Зададим положительное число  $r$  (одно и то же для данного пространства  $\Lambda_n$ ). Если точки  $X, Y$  порождаются векторами  $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega^*$ , то назовем *расстоянием* между этими точками неотрицательное число  $\delta(X, Y)$ , удовлетворяющее равенству

$$\operatorname{ch} \frac{\delta(X, Y)}{r} = \left| \frac{\vec{x} \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} \right|, \quad (4)$$

где  $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  — гиперболический косинус вещественной переменной  $t$ . Мы замечаем, что функция  $\operatorname{ch} t$  четная, определена на всей числовой оси и ее значения заполняют промежуток  $[1, +\infty[$ . Поэтому согласно формуле (3) расстояние между любыми двумя точками всегда существует и является положительным числом.

Число  $r > 0$  называется *радиусом кривизны* пространства  $\Lambda_n$ .

Правая часть формулы (4) показывает, что расстояние  $\delta(X, Y)$  не зависит от выбора векторов, порождающих точки  $X$  и  $Y$ .

Всякий автоморфизм  $\varphi$  псевдоевклидова векторного пространства индуцирует некоторое преобразование  $f$  пространства  $\Lambda_n$  по закону:

$$\text{если } \varphi(\vec{x}) = \vec{x}', \text{ то } f(X) = X'.$$

Из формулы (4) следует, что преобразование  $f$  сохраняет расстояние между любыми двумя точками пространства  $\Lambda_n$ . Такое преобразование  $f$  называется *движением* пространства  $\Lambda_n$ .

Из определения пространства  $\Lambda_n$  можно заключить, что гиперболические пространства Лобачевского  $\Lambda_n$  и  $\Lambda'_n$  одной и той же размерности изоморфны. Следовательно, система аксиом  $\Sigma_\Delta$  категорична, теория  $\mathcal{T}(\Sigma_\Delta)$  однозначна и ее можно изучать, пользуясь любой интерпретацией.

4. Докажем, что *система аксиом  $\Sigma_\Delta$  непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел*. Для этого по аналогии п. 2 § 81 построим интерпретацию этой системы, используя множество  $\mathbf{R}$  вещественных чисел. Для простоты изложения ограничимся случаем, когда  $n = 2$ , т. е. когда  $E$  — плоскость Лобачевского.

Вектором псевдоевклидова векторного пространства  $V$  индекса 1 размерности 3 назовем любой столбец вида  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ , где  $a_1, a_2,$

$a_3$  — произвольные вещественные числа. Сумма векторов и умножение вектора на число вводятся обычным образом, т. е. как сумма столбцов и умножение столбца на число (см. § 81, п. 2).

Скалярным произведением векторов  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  назовем число  $a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$ . Мы получили модель псевдоевклидова векторного пространства индекса 1 размерности 3. Очевидно, множество  $\Omega^*$  всех векторов мнимой длины состоит из тех и только тех векторов

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ , для которых  $a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 < 0$ .

Введем следующее обозначение. Множество всех троек чисел вида  $km_1, km_2, km_3$ , где  $k$  — любое действительное число, отличное от нуля, а  $m_1, m_2, m_3$  — фиксированные числа, не равные одновременно нулю, обозначим через  $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle$ .

Точкой (т. е. элементом множества  $E$ ) назовем любое множество  $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle$  при условии, что  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$ . Отображение

$\pi: \Omega^* \rightarrow E$  определим так: вектору  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  вставим в соответствие

точку  $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle$ , такую, что  $(a_1, a_2, a_3) \in \langle m_1, m_2, m_3 \rangle$ .

В построенной интерпретации, очевидно, выполняются обе аксиомы системы  $\Sigma_\Delta$ .

5. Рассмотренное в п. 4 утверждение позволяет дать еще один способ доказательства независимости аксиомы параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии (см. § 80, п. 5).

Система аксиом  $\Sigma_H$  Гильберта евклидовой геометрии состоит из аксиом I, II, III, IV, V групп, где V — аксиома параллельных, эквивалентная (при сохранении аксиом I—IV) V постулату Евклида. Выше было доказано, что система аксиом  $\Sigma_H$  непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел (см. § 83, теорема 5). В последующей части этого параграфа мы ограничимся геометрией на плоскости, поэтому все системы аксиом будем рассматривать лишь для плоскости.

Рассмотрим систему аксиом  $\Sigma^* = (\Sigma_H \setminus V) \cup V^*$ , где  $V^*$  — аксиома Лобачевского. Обозначим через  $\Sigma_\Delta$  систему аксиом 1—2 плоскости Лобачевского  $\Delta_2$ . В п. 4 мы доказали, что эта система непротиворечива. При этом система аксиом  $\Sigma_\Delta$  категорична (все ее интерпретации изоморфны). Можно доказать (с помощью достаточно длинных рассуждений), что системы аксиом  $\Sigma^*$  и  $\Sigma_\Delta$  эквивалентны.

Следовательно, для системы  $\Sigma^*$  нашлась интерпретация — это та же интерпретация, что и интерпретация системы  $\Sigma_\Delta$ . Поэтому система аксиом  $\Sigma^*$  (содержательно) непротиворечива. Но в таком случае из самого способа составления этой системы аксиом следует, что *аксиома параллельных V не зависит от остальных аксиом  $(\Sigma_H \setminus V)$  евклидовой геометрии.*

**З а м е ч а н и е.** Так как аксиома параллельных V эквивалентна V постулату Евклида, то полученный результат можно еще сформулировать так: *V постулат Евклида не зависит от остальных аксиом системы  $\Sigma_H$ .*

## §92. Модель Кэли — Клейна плоскости Лобачевского

1. Плоскость Лобачевского  $\Delta_2$  порождена множеством  $\Omega^*$  векторов мнимой длины трехмерного псевдоевклидова пространства  $V$  (индекса 1). Скалярное произведение векторов пространства  $V$  определяется при помощи заданной билинейной формы  $g(\vec{x}, \vec{y})$ , такой, что  $g(\vec{x}, \vec{x})$  — невырожденная квадратичная форма индекса 1.

Рассмотрим проективную модель плоскости  $\Delta_2$ . На проективной плоскости  $P_2$ , порожденной векторным пространством  $V$ , квадратичная форма  $g(\vec{x}, \vec{x})$  определяет линию второго порядка  $Q : \Phi(X) = 0$ , где  $\Phi(X) = g(\vec{x}, \vec{x})$ , и вектор  $\vec{x}$  порождает точку  $X \in P_2$ . При этом на плоскости  $P_2$  рассматриваются не любые проективные преобразования, а только те, которые порождены автоморфизмами псевдоевклидова векторного пространства<sup>1</sup>  $V$ . Такие проективные преобразования образуют стационарную подгруппу  $H_Q$  кривой второго порядка  $Q$ .

Пусть  $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  — ортонормированный базис пространст-

<sup>1</sup> Строго говоря, допустимы и гомотетии векторного пространства  $V$  (т. е. отображения вида  $h : V \rightarrow V$  по закону  $h(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ , где  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ ). Но легко заметить, что каждая гомотетия пространства  $V$  порождает тождественное преобразование плоскости  $\Delta_2$ .

ва  $V$ , причем  $\vec{a}_3$  — мнимое единичный вектор. Если в этом базисе вектор  $\vec{x}$  имеет координаты  $(x_1, x_2, x_3)$ , то, очевидно,  $g(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ .

Базис  $B$  порождает проективный репер<sup>1</sup>  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  плоскости  $P_2$ . В этом репере в силу предыдущего равенства линия  $Q$  определяется уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Следовательно,  $Q$  — овальная линия второго порядка (см. § 19).

Напомним, что точка  $M(m_1, m_2, m_3)$  является внутренней точкой относительно линии  $Q$  тогда и только тогда, когда  $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$  (см. лемму § 19). Это означает, что точка  $M$  порождена вектором  $\vec{m}$  мнимой длины, т. е.  $\vec{m} \in \Omega^*$ .

Таким образом, при отображении

$$\pi : (V \setminus \{0\}) \rightarrow P_2,$$

определяющем проективную плоскость  $P_2$ , множество  $\pi(\Omega^*)$  есть множество точек, внутренних относительно овалной линии  $Q$ .

Так как при отображении  $\pi$  аксиомы  $\Sigma_A$  выполняются, то множество  $\pi(\Omega^*) = \Lambda_2$  точек, внутренних относительно кривой  $Q$ , является моделью плоскости Лобачевского. Линия второго порядка  $Q$  называется *абсолютом* плоскости Лобачевского  $\Lambda_2$ .

Построенная модель называется *моделью Кэли — Клейна*<sup>2</sup> плоскости Лобачевского. Аналогично строится проективная модель пространства Лобачевского  $\Lambda_n$ .

2. Выясним, как изображаются прямые, отрезки, лучи, полуплоскости и углы на модели Кэли — Клейна.

Пусть  $W$  — двумерное подпространство пространства  $V$  и  $\Omega' = W \cap \Omega^* \neq \emptyset$ . Тогда фигура  $\pi(\Omega')$  называется *прямой* плоскости Лобачевского  $\Lambda_2$ . Так как  $\pi(W \setminus \{0\}) = a$  есть прямая на проективной плоскости  $P_2$ , то прямая  $\pi(\Omega')$  плоскости Лобачевского является пересечением прямой  $a$  с внутренней областью абсолюта  $Q$ . На рисунке 248,  $a$  проективные прямые  $a$  и  $b$  определяют прямые  $a_\Lambda$  и  $b_\Lambda$  плоскости Лобачевского, которые представляют собой хорды (без концов) абсолюта  $Q$  и выделены жирной линией. На том же рисунке проективные прямые  $c$  и  $d$  не определяют прямых на плоскости  $\Lambda_2$ , так как на них нет точек, внутренних относительно абсолюта. Таким образом, проективная прямая  $u$  определяет прямую  $u_\Lambda$  на плоскости  $\Lambda_2$  тогда и только тогда, когда на ней лежит хотя бы одна внутрен-

<sup>1</sup> Напомним, что точка  $E$  выбирается так, чтобы вектор  $\vec{e}$ , порождающий эту точку, удовлетворял условию  $\vec{e} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ . Тогда система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$  будет согласована с репером  $R$ .

<sup>2</sup> А. Кэли (1821—1895) — английский математик. Известен работами по алгебре, алгебраической геометрии и теории инвариантов. Член-корреспондент Петербургской АН (с 1870 г.).

Ф. Клейн (1849—1925) — немецкий математик. Основные работы посвящены геометрии, теории непрерывных групп, алгебре и теории функций.

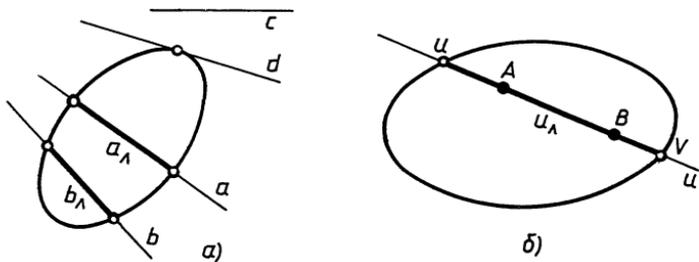


Рис. 248

няя точка относительно абсолюта  $Q$ . Другими словами, проективная прямая и определяет прямую  $u_\Lambda$  на плоскости  $\Lambda_2$  тогда и только тогда, когда она пересекает абсолют в двух вещественных точках  $U$  и  $V$ . Прямую  $u_\Lambda$  будем обозначать через  $UV$  или  $VU$  (рис. 248, б).

Мы видим, что прямыми плоскости Лобачевского являются хорды (без концов) абсолюта. Любые две точки  $A$  и  $B$  плоскости  $\Lambda_2$ , лежащие на прямой  $UV$ , не разделяют пару точек  $U, V$  (рис. 248, б), т. е.  $(UV, AB) > 0$ .

Введем понятие «лежать между» для трех точек прямой на модели Кэли — Клейна. Предварительно докажем следующую теорему.

**Т е о р е м а.** Пусть  $A, B$  и  $M$  — три точки на прямой  $UV$  плоскости  $\Lambda_2$ . Если  $(AB, MU) < 0$ , то и  $(AB, MV) < 0$ .

□ Для доказательства теоремы воспользуемся следующим соотношением:

$$(AB, UV) \cdot (AB, VM) \cdot (AB, MU) = 1. \quad (1)$$

Для того чтобы убедиться в правильности этого равенства, рассмотрим на проективной прямой  $UV$  репер  $R_0 = (A, B, M)$  и введем в рассмотрение координаты точек  $U(u_1, u_2)$  и  $V(v_1, v_2)$ . Тогда, учитывая, что  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $M(1, 1)$ , по формуле (1) § 9 получаем:

$$(AB, UV) = \frac{u_2 v_1}{v_2 u_1}, \quad (AB, VM) = \frac{v_2}{v_1}, \quad (AB, MU) = \frac{u_1}{u_2}.$$

Отсюда непосредственно следует равенство (1).

По условию теоремы  $(AB, MU) < 0$ . Выше было отмечено, что  $(AB, UV) > 0$ , поэтому из равенства (1) следует, что  $(AB, VM) < 0$  или  $(AB, MV) < 0$ . ■

Пусть  $A$  и  $B$  — две точки плоскости  $\Lambda_2$ , лежащие на прямой  $UV$ . Будем говорить, что точка  $M$  прямой  $UV$  лежит между точками  $A$  и  $B$  (и писать:  $A - M - B$ ), если пара точек  $A, B$  разделяет пару точек  $M, U$  (или пару точек  $M, V$ ), т. е.  $(AB, MU) < 0$  (или  $(AB, MV) < 0$ ).

Легко видеть, что это определение не зависит от порядка, в котором берутся точки  $A$  и  $B$ . В самом деле, так как  $(AB, MU) = (BA, MU)^{-1}$ , то если  $A - M - B$ , то  $B - M - A$ . Нетрудно убедиться в том, что на модели Кэли — Клейна выполняются и все другие аксиомы группы II Гильберта.

Далее, обычным путем определяются понятия отрезка, много-

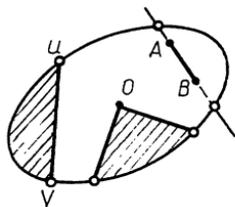


Рис. 249

угольника, луча, угла и полуплоскости. На рисунке 249 изображены отрезок  $AB$  и угол  $O$ , внутренняя область угла  $O$  заштрихована. На этом же рисунке одна из полуплоскостей с границей  $UV$  заштрихована.

3. Выясним теперь, как интерпретируется на модели Кэли — Клейна расстояние между двумя точками. Для этого воспользуемся общей формулой (4) § 91 расстояния между двумя точками.

Пусть  $X, Y$  — две точки плоскости  $\Lambda_2$ . Найдем векторы, порождающие точки пересечения прямой  $XY$  с абсолютом  $Q$ . Для этого записываем уравнение проективной прямой  $XY$  в параметрическом виде (см. § 18, (2)) и находим отношение  $\frac{\lambda}{\mu}$  (или  $\frac{\mu}{\lambda}$ ) из уравнения (3) § 18. Если точки  $X, Y$  порождены векторами  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ , то уравнение (3) § 18 с учетом равенств (4) § 18 принимает вид:

$$\vec{x}^2 \lambda^2 + 2\vec{x} \vec{y} \lambda \mu + \vec{y}^2 \mu^2 = 0. \quad (2)$$

Учитывая, что векторы  $\vec{x}, \vec{y}$  мнимой длины, мы можем их нормировать так, чтобы  $\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = -r^2$ , где  $r > 0$  — тоже число, что и в формуле (4) § 91. Из этой формулы находим  $|\vec{x}, \vec{y}| = r^2 \text{ch} t$ , где  $t = \frac{1}{r} \delta(X, Y)$ .

Уравнение (2) принимает вид:

$$\lambda^2 \pm 2\lambda \mu \text{ch} t + \mu^2 = 0, \quad (3)$$

где берется знак «плюс» в случае  $\vec{x} \cdot \vec{y} < 0$  и знак «минус» в случае  $\vec{x} \cdot \vec{y} > 0$ .

Рассмотрим случай  $\vec{x} \cdot \vec{y} > 0$ . Учитывая, что  $\text{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ , из уравнения (3) находим:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_1 = e^t \quad \text{и} \quad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_2 = e^{-t}.$$

Следовательно, если  $U$  и  $V$  — точки пересечения прямой  $XY$  с линией  $Q$ , то векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$ , порождающие эти точки, имеют вид:

$$\vec{u} = \vec{x} + e^t \vec{y}, \quad \vec{v} = \vec{x} + e^{-t} \vec{y}.$$

Отсюда находим  $(XY, UV) = e^{2t}$ , поэтому  $t = \frac{1}{2} \ln(XY, UV)$ . Правая часть этого равенства меняет знак при перемене мест точек  $U$  и  $V$ . Но так как  $t > 0$ , то надо считать, что  $t = \frac{1}{2} |\ln(XY, UV)|$ .

Таким образом,

$$\delta(X, Y) = \frac{r}{2} \left| \ln(XY, UV) \right|. \quad (4)$$

Так как  $(XY, UV) = (XY, VU)^{-1}$ , то расстояние между точками  $X, Y$ , вычисленное по этой формуле, не зависит от порядка, в котором берутся точки  $U$  и  $V$  в формуле (4). Таким образом, формулу (4) можно записать также следующим образом:

$$\delta(X, Y) = \frac{r}{2} \left| \ln(XY, VU) \right|. \quad (4')$$

В случае  $\vec{xy} < 0$  мы получаем те же формулы (4) или (4').

4. Трёхвершинник  $A_1A_2A_3$  называется *автополярным трёхвершинником второго рода* для овальной линии второго порядка  $Q$ , если точки  $A_1, A_2$  лежат на этой линии, а прямые  $A_1A_3$  и  $A_2A_3$  являются касательными к ней в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Следовательно, каждая из сторон такого трёхвершинника является полярной одной из его вершин, а именно:  $A_1A_3$  — полярная точки  $A_1$ ,  $A_2A_3$  — полярная точки  $A_2$  и  $A_1A_2$  — полярная точки  $A_3$  (отсюда и термин «автополярный»).

Пусть  $A_1A_2A_3$  — автополярный трёхвершинник второго рода для овальной линии  $Q$ . Выберем проективный репер  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ , где  $E \subset Q$ . Тогда нетрудно заметить, что в таком репере кривая  $Q$  определяется уравнением

$$x^1x^2 - (x^3)^2 = 0.$$

Рассмотрим стационарную подгруппу  $H_Q$  абсолюта  $Q$  в проективной группе плоскости  $P_2$ . Если  $f \in H_Q$ , то  $f$  индуцирует некоторое преобразование  $f_\Lambda$  на плоскости  $\Lambda_2$ , так как в преобразовании  $f$  внутренняя область абсолюта переходит в себя. Формула (4) показывает, что преобразование  $f_\Lambda$  сохраняет расстояние между любыми двумя точками плоскости  $\Lambda_2$ , поэтому  $f_\Lambda$  называется *движением плоскости  $\Lambda_2$* . Очевидно, множество всех движений плоскости  $\Lambda_2$  образует группу, которая индуцируется группой  $H_Q$ .

Две фигуры  $F, F' \subset \Lambda_2$  называются *равными* (конгруэнтными), если они  $H_Q$ -эквивалентны.

Каждое преобразование  $f \in H_Q$  переводит любой автополярный трёхвершинник второго рода для абсолюта  $Q$  в автополярный трёхвершинник второго рода для этого же абсолюта. Поэтому движение  $f_\Lambda$ , которое индуцируется преобразованием  $f$ , однозначно определяется заданием упорядоченной пары реперов:  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ ,  $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ , где  $A_1A_2A_3$  и  $A'_1A'_2A'_3$  — автополярные трёхвершинники второго рода для абсолюта  $Q$  и  $E, E' \in Q$ . Обратное: пусть  $(A_1, A_2, A_3, E)$  и  $(A'_1, A'_2, A'_3, E')$  — два репера, удовлетворяющие вышеуказанным условиям. Тогда проективное преобразование  $f$ , которое переводит репер  $R$  в репер  $R'$ , принадлежит стационарной подгруппе

$H_Q$ , поэтому порождает некоторое движение  $f_\Lambda$ . Мы доказали следующее утверждение: *каковы бы ни были два репера  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$  и  $R' = (A'_1, A'_2, A'_3, E')$ , где  $A_1A_2A_3$  и  $A'_1A'_2A'_3$  — автотоплярные трехвершинники второго рода для абсолюта  $Q$ , а  $E, E' \in Q$ , существует одно и только одно движение  $f_\Lambda$  плоскости  $\Lambda_2$ , которое индуцируется проективным преобразованием  $f \in H_Q$ , переводящим репер  $R$  в репер  $R'$ .*

**З а м е ч а н и е.** Заметим, что плоскость Лобачевского может быть реализована «в малом» на поверхности постоянной отрицательной кривизны, т. е. на псевдосфере. Пусть  $F$  — гладкая элементарная поверхность достаточно малого размера. (Это значит, что вся она лежит в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности одной из своих точек при достаточно малом  $\varepsilon$ .) Тогда геодезические линии поверхности  $F$  являются аналогом прямых линий на плоскости. Если  $F$  лежит на псевдосфере, то (как и на плоскости Лобачевского) сумма углов геодезического треугольника поверхности  $F$  меньше  $\pi$  (см. § 65). Поэтому можно сказать, что на псевдосфере реализуется «в малом» геометрия Лобачевского.

### § 93. О свойствах параллельных и расходящихся прямых на плоскости Лобачевского

1. Так как все интерпретации системы аксиом  $\Sigma_{\Lambda_2}$  плоскости Лобачевского изоморфны, то всю геометрию  $\mathcal{T}(\Sigma_{\Lambda_2})$  можно получить с помощью одной из них, например с помощью интерпретации Кэли — Клейна.

Возьмем на плоскости  $\Lambda_2$  прямую  $UV$  и точку  $A$ , не лежащую на этой прямой (рис. 250). Через точку  $A$  проведем прямые  $U'V$  и  $UV'$ . Рассмотрим прямые  $UV'$  и  $U'V$ . Эти прямые не пересекаются на плоскости Лобачевского  $\Lambda_2$ . Но для произвольной точки  $C \in UV$  любой внутренней луч  $AD$  угла  $CAV$  пересекает луч  $CV$ . Следовательно, по определению параллельных прямых на плоскости  $\Lambda_2$  (§ 73) прямая  $U'V$  параллельна прямой  $UV$ . Мы знаем, что отношение параллельности двух прямых на плоскости Лобачевского симметрично (§ 75, теорема 1). Следовательно, и прямая  $UV$  параллельна прямой  $U'V$ . Мы скажем, что *эти прямые параллельны в направлении  $V$* . Точно так же убеждаемся, что прямые  $VU$  и  $V'U$  параллельны в направлении  $U$ .

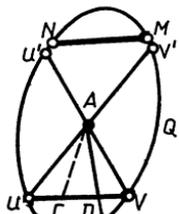


Рис. 250

Таким образом, в интерпретации Кэли — Клейна параллельные прямые изображаются хордами абсолюта  $Q$ , имеющими общий конец.

Прямые  $UV$  и  $MN$  на рисунке 250 расходятся. Можно сказать, что *расходящиеся прямые изображаются такими хордами абсолюта, что содержащие их проективные прямые пересекаются в точке, внешней относительно абсолюта*.

2. В § 75 мы изучили некоторые свойства параллельных прямых на плоскости Лобачевского. Рас-

смотрим еще два свойства, для доказательства которых воспользуемся моделью Кэли — Клейна, так как на этой модели эти свойства доказываются значительно проще.

**Т е о р е м а 1.** *На плоскости Лобачевского отношение параллельности прямых в одном и том же направлении транзитивно.*

□ Пусть на плоскости Лобачевского прямые  $UV$  и  $U_1V$  параллельны в направлении  $V$ , а прямые  $U_1V$  и  $U_2V$  также параллельны в направлении  $V$ , причем прямые  $UV$  и  $U_2V$  не совпадают. Так как  $UV \parallel U_1V$ , то в интерпретации Кэли — Клейна эти прямые изображаются хордами абсолюта, имеющими общий конец  $V$ . Прямые  $U_1V$  и  $U_2V$  также изображаются хордами с общим концом  $V$ . Следовательно, хорды  $UV$  и  $U_2V$  имеют общий конец  $V$ , значит, они изображают параллельные прямые. ■

**Т е о р е м а 2.** *Пусть на плоскости Лобачевского даны две пары параллельных прямых: прямые  $UV, U_1V$ , параллельные в направлении  $V$ , и прямые  $U'V', U_1'V'$ , параллельные в направлении  $V'$  (рис. 251). Тогда существует движение, которое переводит первую пару параллельных прямых во вторую.*

□ Воспользуемся интерпретацией Кэли — Клейна. Рассмотрим проективные реперы  $R = (U, V, A_3, U_1)$  и  $R' = (U', V', A'_3, U'_1)$ , где  $UVA_3, U'V'A'_3$  — автополярные трехвершинники второго рода для абсолюта  $Q$  (рис. 251). Выше было отмечено, что существует одно и только одно движение  $f_\Lambda$ , которое определяется реперами  $R$  и  $R'$ . Это движение, очевидно, переводит пару параллельных прямых  $UV, U_1V$  в пару параллельных прямых  $U'V', U_1'V'$ . ■

**3.** Докажем теорему о перпендикулярных прямых на модели Кэли — Клейна.

**Т е о р е м а 3.** *Прямые  $AB$  и  $CD$  на плоскости  $\Lambda_2$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда они изображаются хордами абсолюта  $Q$ , лежащими на проективных прямых, каждая из которых проходит через полюс другой.*

□ Пусть  $AB$  и  $CD$  — перпендикулярные прямые плоскости  $\Lambda_2$ . Обозначим через  $O$  точку их пересечения и докажем, что полюс  $E$  проективной прямой  $AB$  лежит на проективной прямой  $CD$  (рис. 252).

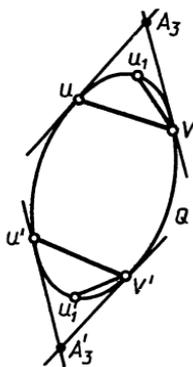


Рис. 251

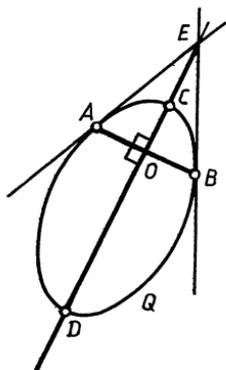


Рис. 252

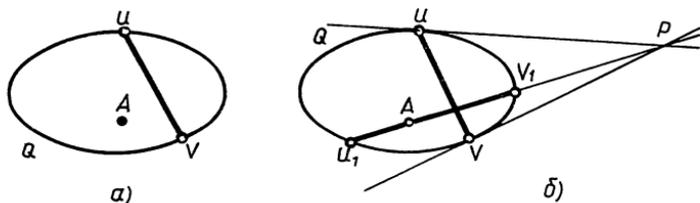


Рис. 253

Так как  $\angle AOC = \angle AOD$ , то существует движение  $f_\lambda$  плоскости  $\Lambda_2$ , в котором луч  $OA$  переходит в себя, а луч  $OC$  переходит в луч  $OD$ . Пусть  $f \in H_Q$  — преобразование, которое порождает  $f_\lambda$ . Тогда  $O = f(O)$ ,  $A = f(A)$ ,  $D = f(C)$ . Отсюда следует, что  $B = f(B)$ , и так как  $AE = f(AE)$  и  $BE = f(BE)$  то  $E = f(E)$ . Отсюда следует, что  $f$  — гомотология с осью  $AB$  и центром  $E$ , поэтому точка  $E$  лежит на проективной прямой  $DC$ .

Обратно: пусть  $AB$  и  $CD$  — хорды абсолюта, пересекающиеся в точке  $O$  и такие, что проективная прямая  $CD$  проходит через полюс  $E$  проективной прямой  $AB$ . Докажем, что хорды  $AB$  и  $CD$  на модели Кэли — Клейна являются изображениями перпендикулярных прямых. Рассмотрим гомотологию  $f$  с осью  $AB$  и центром  $E$ , в которой точка  $C$  переходит в точку  $D$ . Так как  $A = f(A)$ ,  $O = f(O)$ ,  $B = f(B)$ ,  $D = f(C)$ , то  $f \in H_Q$ . Движение  $f_\lambda$  на плоскости  $\Lambda_2$ , порожденное гомотологией  $f$ , переводит угол  $AOC$  в угол  $AOD$ . Отсюда и следует, что  $AB \perp CD$ . ■

**З а м е ч а н и е.** Используя доказанную теорему, легко решить следующую задачу на модели Кэли — Клейна. На плоскости  $\Lambda_2$  даны прямая  $UV$  и точка  $A$ , не лежащая на ней (рис. 253, а). Построить прямую, проходящую через точку  $A$  и перпендикулярную к прямой  $UV$ . На плоскости  $P_2$  строим полюс  $P$  проективной прямой  $UV$  и проводим проективную прямую  $AP$ , которая пересекает абсолют  $Q$  в точках  $U_1, V_1$  (рис. 253, б). По доказанной теореме хорда  $U_1V_1$  является искомой прямой плоскости  $\Lambda_2$ .

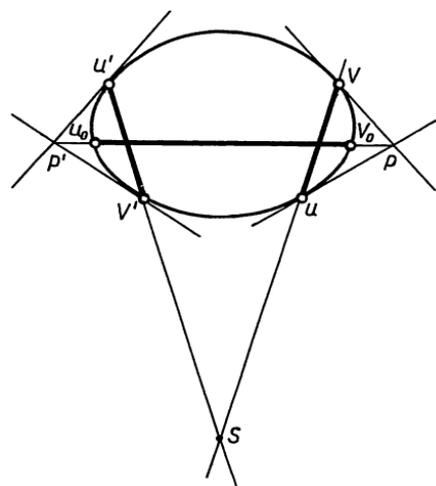


Рис. 254

4. Мы отметили, что в интерпретации Кэли — Клейна две расходящиеся прямые изображаются такими хордами абсолюта, что проективные прямые, содержащие эти хорды, пересекаются во внешней точке относительно абсолюта. Выше было доказано, что если две прямые имеют общий перпендикуляр, то они расходятся (§ 75, теорема 3). Докажем обратную теорему.

**Теорема 4.** *Две расходящиеся прямые  $UV$  и  $U'V'$  имеют общий перпендикуляр, и притом единственный.*

□ Пусть  $P$  и  $P'$  — полюсы проективных прямых  $UV$  и  $U'V'$  соответственно, а  $S$  — точка пересечения проективных прямых  $UV$  и  $U'V'$  на проективной плоскости  $P_2$  (рис. 254). Прямая  $PP'$  проходит через полюсы прямых  $UV$  и  $U'V'$ , поэтому по теореме взаимности поляритета (§ 18, теорема 3) проективные прямые  $UV$  и  $U'V'$  проходят через полюс прямой  $PP'$ . Но  $UV \cap U'V' = S$ , следовательно,  $S$  — полюс прямой  $PP'$ . По условию  $S$  — внешняя точка относительно абсолюта, и, значит, ее полярна — прямая  $PP'$  пересекает абсolut в двух точках  $U_0$  и  $V_0$ .

Так как проективная прямая  $U_0V_0$  проходит через полюсы  $P$  и  $P'$  прямых  $UV$  и  $U'V'$  (рис. 254), то по теореме 3  $U_0V_0 \perp UV$  и  $U_0V_0 \perp U'V'$ , т. е. прямая  $U_0V_0$  на плоскости  $\Lambda_2$  является общим перпендикуляром двух расходящихся прямых  $UV$  и  $U'V'$ . Такая прямая единственная, так как по этой же теореме искомая хорда абсолюта должна лежать на проективной прямой, проходящей через точки  $P$  и  $P'$ , а через две точки проективной плоскости проходит только одна прямая. ■

## § 94. Понятие о сферической геометрии

1. Сферическая геометрия изучает свойства фигур, лежащих на сфере евклидова пространства.

Пусть  $S$  — некоторая сфера с центром  $O$  радиуса  $r$ . Возьмем плоскость  $\sigma$ , удаленную от точки  $O$  на расстояние, меньшее  $r$ . Тогда пересечение плоскости  $\sigma$  и сферы  $S$  есть окружность, которую назовем большой окружностью, если  $O \in \sigma$ , и малой окружностью, если  $O \notin \sigma$ .

В геометрии на сфере большие окружности играют роль прямых на плоскости. Здесь есть определенная аналогия: для любых двух точек  $A, B \in S$  существует большая окружность, проходящая через эти точки. Но есть и отличие: большая окружность единственная только тогда, когда точки  $A$  и  $B$  не являются диаметрально противоположными. Далее, на плоскости Евклида и на плоскости Лобачевского существуют непересекающиеся прямые, тогда как на сфере любые две различные большие окружности пересекаются в двух точках (диаметрально противоположных).

Известно, что любая большая окружность  $Q$  сферы  $S$  делит ее на две части, которые называются *полусферами*, а сама окружность  $Q$  — *краем* этих полусфер. В геометрии на сфере полусфера играет ту же роль, что и полуплоскость в планиметрии.

Пусть  $A$  и  $B$  — две диаметрально противоположные точки сферы  $S$ ,  $ACB$  и  $ADB$  — две какие-либо полуокружности с концами в точках  $A$  и  $B$ , а фигура  $\Gamma$  — объединение этих полуокружностей (рис. 255).

Можно показать, что фигура  $\Gamma$  делит фигуру  $S \setminus \Gamma$  на две части  $D'$  и  $D''$  (на рис. 255 одна из этих частей заштрихована). Каждая из фигур  $D_1 = D' \cup \Gamma$ ,  $D_2 = D'' \cup \Gamma$  называется *двугольником* с вершинами в точках  $A$  и  $B$ .

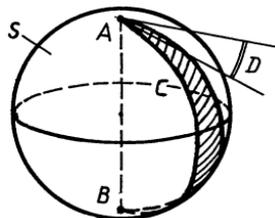


Рис. 255

Данные полуокружности  $ACB$  и  $ADB$  называются *сторонами* этих двуугольников. Двуугольник — аналог угла на плоскости: двуугольник является или пересечением, или объединением двух полусфер, края которых не совпадают. Ясно, что двуугольник можно рассматривать как пересечение сферы  $S$  с двугранным углом  $C \cdot AB \cdot D$ . Линейный угол этого двугранного угла называется *углом данного двуугольника*. Его можно рассматривать как угол между касательными в точке  $A$  (или  $B$ ) к большим окружностям, содержащим стороны двуугольника. Если этот угол прямой, то двуугольник называется *прямоугольным*.

Пусть  $Q_1, Q_2$  — две большие окружности.  $Q_1 \cap Q_2 = \{A, B\}$ . Мы имеем здесь две пары *вертикальных* двуугольников, высекаемых на сфере  $S$  двумя парами вертикальных двугранных углов, полученных при пересечении плоскостей  $\sigma_1 \supset Q_1$  и  $\sigma_2 \supset Q_2$ . Если один из этих двуугольников прямоугольный, то и остальные три прямоугольные. В этом случае большие окружности  $Q_1$  и  $Q_2$  называются *перпендикулярными*:  $Q_1 \perp Q_2$ . Ясно, что окружности  $Q_1$  и  $Q_2$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  перпендикулярны.

Если  $Q$  — большая окружность, а  $AB$  — диаметр сферы, перпендикулярный к плоскости этой окружности, то точки  $A$  и  $B$  называются *полюсами* окружности  $Q$ . Если точка  $M_1$  не является полюсом окружности  $Q_1$ , то существует, и притом единственная, большая окружность  $Q_2$ , проходящая через точку  $M_1$  и перпендикулярная окружности  $Q_1$ . Чтобы получить эту окружность  $Q_2$ , надо пересечь сферу  $S$  плоскостью, которая проходит через прямую  $OM_1$  перпендикулярно плоскости окружности  $Q_1$ . Если же точка  $M_1$  является полюсом большой окружности  $Q_1$ , то любая большая окружность, проходящая через точку  $M_1$ , перпендикулярна окружности  $Q_1$ . В этом снова проявляется отличие сферической геометрии от геометрии на евклидовой плоскости (или на плоскости Лобачевского), где через любую точку плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная к данной прямой.

2. Возьмем две точки  $A, B \in S$  и рассмотрим большую окружность  $Q$ , проходящую через эти точки (рис. 256). Окружность  $Q$  является объединением двух своих дуг  $\cup AMB$  и  $\cup ANB$  с концами в точках  $A$  и  $B$ . Длина той из этих двух дуг, которая не больше полуокружности, называется *сферическим расстоянием* между точками  $A$  и  $B$  и обозначается через  $d(A, B)$ . Следовательно, для любых двух точек сферы  $S$  имеем  $d(A, B) \leq \pi r$ .

Пусть  $\cup AMB \subset Q$  меньше полуокружности, и, значит,  $d(A, B)$  — длина этой дуги. Обозначим через  $\alpha$  величину центрального угла  $AOB$ , опирающегося на дугу  $AMB$ , и через  $\rho(A, B)$  длину отрезка  $AB$ . Как известно,

$$d(A, B) = \alpha r. \quad (1)$$

Из треугольника  $AOB$  (рис. 256) находим:

$$\rho(A, B) = 2r \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

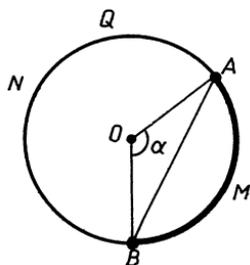


Рис. 256

Из формул (1), (2) следует:

$$\rho(A,B) = 2r \sin \frac{d(A,B)}{2r}. \quad (3)$$

3. *Движением сферы* называется всякое изометрическое отображение этой сферы на себя, т. е. такое отображение  $f: S \rightarrow S$ , которое удовлетворяет условию: каковы бы ни были точки  $A$  и  $B$  сферы,  $d(A,B) = d(f(A), f(B))$ . Из формулы (3) следует, что в этом случае  $\rho(A,B) = \rho(f(A), f(B))$ . Следовательно, любое движение  $f$  сферы  $S$  порождается некоторым движением  $f_0$  пространства, причем  $f_0(O) = O$ . Обратно: любое движение  $g_0$  пространства, оставляющее точку  $O$  инвариантной, порождает определенное движение сферы  $S$ .

Отсюда заключаем, что множество всех движений сферы  $S$  является группой, которая изоморфна стационарной подгруппе  $H_0$  точки  $O$  в группе движений пространства.

Две фигуры  $F, F' \subset S$  называются *конгруэнтными* или *равными*, если существует такое движение сферы  $S$ , которое переводит одну из этих фигур в другую. Следовательно, фигуры  $F, F' \subset S$  конгруэнтны, если они  $H_0$ -эквивалентны.

4. Возьмем на сфере  $S$  три точки  $A, B, C$ , не лежащие на одной большой окружности. Они определяют три полусферы, каждая из которых содержит точки  $A, B, C$ , причем две из этих точек принадлежат краю полусферы. Пересечение этих трех полусфер называется *сферическим треугольником* с вершинами  $A, B, C$ . Дуги  $AB, BC, AC$  больших окружностей (меньшие полуокружности) называются *сторонами* сферического треугольника  $ABC$ .

Пусть  $ABC$  — сферический треугольник,  $a = d(B,C)$ ,  $b = d(A,C)$ ,  $c = d(A,B)$  — длины его сторон,  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно углы  $BOC, AOC$  и  $AOB$ .

Докажем теорему синусов для сферического треугольника.

**Теорема.** Пусть  $a = d(B,C)$ ,  $b = d(A,C)$ ,  $c = d(A,B)$  — стороны сферического треугольника  $ABC$ , а  $r$  — радиус сферы. Тогда

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \frac{c}{r}}. \quad (4)$$

Обозначим через  $C_1$  проекцию точки  $C$  на плоскость  $AOB$ , а через  $B'$  и  $A'$  проекции точки  $C_1$  на прямые  $OB$  и  $OA$  (рис. 257). Выразим  $CC_1$  через  $a, r, \hat{B}$ . Из прямоугольного треугольника  $OCB'$  с прямым углом  $B'$  получим  $CB' = r \sin \alpha$ , где  $\alpha = \hat{BOC}$ . Теперь из прямоугольного треугольника  $CB'C_1$  с прямым углом  $C_1$  находим  $CC_1 : CC_1 = B'C \cdot \sin \hat{CB}'C_1$ . Так как  $\hat{CB}'C_1 = \hat{B}$ , то из последних

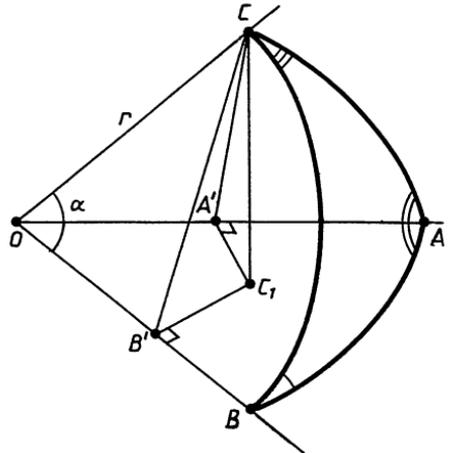


Рис. 257

двух равенств получаем  $CC_1 = r \sin \alpha \sin \widehat{B}$ . По формуле (1)  $d(B,C) = \alpha r$ , или  $a = \alpha r$ . Таким образом,

$$CC_1 = r \sin \frac{a}{r} \sin \widehat{B}. \quad (5)$$

Точно так же, используя прямоугольные треугольники  $OCA'$  и  $CA'C_1$ , выразим  $CC_1$  через  $b$ ,  $r$ ,  $\widehat{A}$ :

$$CC_1 = r \sin \frac{b}{r} \sin \widehat{A}. \quad (6)$$

Из равенств (5) и (6) получаем:

$$r \sin \frac{a}{r} \sin \widehat{B} = r \sin \frac{b}{r} \sin \widehat{A}, \text{ или } \frac{\sin \widehat{A}}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \frac{b}{r}}.$$

Аналогично, рассматривая проекцию точки  $A$  на плоскость  $BOC$ , получаем соотношение  $\frac{\sin \widehat{B}}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin \frac{c}{r}}$ . Таким образом, справедливы

равенства (4). ■

Можно доказать, что справедливо следующее равенство, которое выражает теорему косинусов для сферического треугольника  $ABC$ :

$$\cos \frac{a}{r} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} = \cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}. \quad (7)$$

Можно так же доказать, что площадь сферического треугольника  $ABC$  вычисляется по формуле

$$S_{ABC} = \varepsilon \cdot r^2, \quad (8)$$

где  $\varepsilon = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$  — так называемый избыток сферического треугольника. Так как площадь  $S_{ABC} > 0$ , то из формулы (8) следует, что  $\varepsilon > 0$ , т. е.  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \pi$ . Итак, *сумма углов любого сферического треугольника больше  $\pi$* . Это — существенное отличие геометрии на сфере как от геометрии на плоскости Евклида, так и от геометрии на плоскости Лобачевского.

## § 95. Понятие об эллиптической геометрии Римана

1. Пусть  $V$  — евклидово векторное пространство размерности  $n + 1$  над полем  $\mathbf{R}$  вещественных чисел. Множество  $E \neq \emptyset$  называется  *$n$ -мерным эллиптическим пространством Римана* (и обозначается через  $S_n$ ), если задано отображение

$$\pi : V \setminus \{ \vec{0} \} \rightarrow E,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1)  $\pi$  — сюръекция;
- 2)  $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$  тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны.

Так как векторное пространство  $V$  евклидово, то можно ввести понятие расстояния в пространстве  $S_n$  следующим образом. Зададим положительное число  $r$ . Если точки  $M_1, M_2$  порождаются векторами  $\vec{m}_1, \vec{m}_2$  (т. е.  $\pi(\vec{m}_1) = M_1, \pi(\vec{m}_2) = M_2$ ), то *расстоянием* между точками  $M_1, M_2$  назовем неотрицательное число  $\delta(M_1, M_2)$ , удовлетворяющее условию

$$\cos \frac{\delta(M_1, M_2)}{r} = \frac{|\vec{m}_1 \vec{m}_2|}{|\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}. \quad (1)$$

Число  $r > 0$  называется *радиусом кривизны* пространства  $S_n$ .

Таким образом, эллиптическое пространство  $S_n$  строится по той же схеме, что и проективное пространство  $P_n$ , но только над евклидовым векторным пространством  $V$ , скалярное произведение в котором используется для определения расстояния в  $S_n$  по формуле (1).

Правая часть формулы (1) показывает, что расстояние  $\delta(M_1, M_2)$  не зависит от нормирования векторов  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$ .

Заметим, что поскольку векторное пространство  $V$  евклидово, то в нем допускаются не любые линейные преобразования, а только автоморфизмы этого пространства, т. е. ортогональные преобразования (линейные преобразования, сохраняющие скалярное произведение векторов). Всякое ортогональное преобразование  $\varphi$  векторного пространства  $V$  порождает некоторое преобразование  $f$  пространства  $S_n$  по закону:

$$\text{если } \varphi(\vec{m}) = \vec{m}', \text{ то } f(M) = M'.$$

Из формулы (1) следует, что преобразование  $f$  пространства  $S_n$  сохраняет расстояние между любыми двумя его точками. Такое преобразование называется *движением* пространства  $S_n$ .

Таким образом, каждое ортогональное преобразование векторного пространства  $V$  порождает некоторое движение пространства  $S_n$ .

Из определения пространства  $S_n$  следует, что эллиптические пространства  $S_n$  и  $S'_n$  одной и той же размерности изоморфны.

2. Рассмотрим подробнее случай  $n = 2$ . Пространство  $S_2$  называется *эллиптической плоскостью*. По аналогии с моделью проективной плоскости (см. § 4, п. 2) рассмотрим модель эллиптической плоскости в виде связки прямых евклидова пространства  $E_3$  с центром в некоторой точке  $O$ .

Возьмем сферу  $Q$  с центром в точке  $O$  и радиуса  $r$ . В построенной модели каждая точка  $A \in S_2$  является некоторой прямой  $a$  связки с центром  $O$ . Прямая  $a$  пересекает сферу  $Q$  в двух диаметрально противоположных точках  $A', A''$ .

Обратно: всякие две диаметрально противоположные точки  $A', A'' \in Q$  определяют прямую  $a$  связки с центром  $O$  и, следовательно, точку  $A$  эллиптической плоскости  $S_2$ .

Таким образом, существует биекция

$$f: S_2 \rightarrow \tilde{Q},$$

где  $\tilde{Q}$  — множество пар диаметрально противоположных точек сферы  $Q$ .

Пусть  $A, B$  — различные точки эллиптической плоскости  $S_2$ . В связке с центром  $O$  они изображаются прямыми  $a, b$ . Две пары точек  $\{A', A''\} = a \cap Q$  и  $\{B', B''\} = b \cap Q$  лежат на большой окружности  $Q_2$  сферы  $Q$  (рис. 258). Точка  $A \in S_2$  порождается каждым из векторов  $\vec{OA}'$  и

$$\vec{OA}'' = -\vec{OA}',$$

а точка  $B$  — каждым из

векторов  $\vec{OB}'$  и  $\vec{OB}'' = -\vec{OB}'$ . Поэтому из формулы (1) заключаем,

что  $\frac{\delta(A, B)}{r}$  есть величина меньшего из углов, образованных прямыми  $a$  и  $b$ . Следовательно,  $\delta(A, B)$  есть меньшее из сферических расстояний  $d(A', B')$  и  $d(A', B'')$ .

Прямая  $d \subset S_2$  порождается двумерным векторным подпространством  $V' \subset V$ . В связке прямых с центром  $O$  она изображается пучком прямых, лежащих в некоторой плоскости  $\delta$ . Эта плоскость пересекает сферу  $Q$  по большой окружности  $D$ . Следовательно, на сфере  $Q$  прямая  $d \subset S_2$  изображается множеством  $D$  пар диаметрально противоположных точек окружности  $D$ .

Заметим, что всякие две различные прямые  $d_1, d_2 \subset S_2$  имеют одну общую точку (так как это имеет место на плоскости  $P_2$ ). Следовательно, на эллиптической плоскости любые две прямые пересекаются.

Пара сферических треугольников  $A'B'C'$  и  $A''B''C''$ , симметричных относительно центра  $O$  сферы, изображают одну фигуру плоскости  $S_2$ ; эту фигуру называют *треугольником  $ABC$  на эллиптической плоскости  $S_2$* . Следовательно, для треугольника  $ABC$  на плоскости  $S_2$  имеют место те же теорема синусов и теорема косинусов, что и в сферической геометрии.

По теореме косинусов можно найти стороны треугольника  $ABC \subset S_2$ , зная его углы. Следовательно, если у двух треугольников на плоскости  $S_2$  соответственные углы попарно равны, то и соответственные стороны попарно равны. При этом две фигуры  $F, F' \subset S_2$  называются *конгруэнтными* (равными), если они  $G$ -эквивалентны, где  $G$  — группа движений плоскости  $S_2$ .

Площадь треугольника  $ABC \subset S_2$  вычисляется по формуле пл.  $ABC = \varepsilon r^2$ , где  $\varepsilon = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$  — избыток этого треугольника. Следовательно, в любом треугольнике  $ABC \subset S_2$  имеем:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$ .

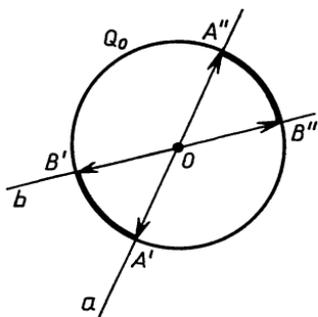


Рис. 258

## ЧТО ТАКОЕ ГЕОМЕТРИЯ?

Пусть система аксиом  $\Sigma$  определяет структуры рода  $T$ . Добавив к аксиомам системы  $\Sigma$  новые аксиомы, мы получим систему аксиом  $\Sigma' \supset \Sigma$ . Если система аксиом  $\Sigma'$  непротиворечива, то она определяет структуры некоторого рода  $T'$ . Говорят, что структуры рода  $T'$  богаче, чем структуры рода  $T$ , а теория  $\mathcal{T}(\Sigma')$  является расширением теории  $\mathcal{T}(\Sigma)$  (или сильнее теории  $\mathcal{T}(\Sigma)$ ).

Следовательно, структура евклидова пространства  $E_n$  богаче структуры аффинного пространства  $A_n$ , а евклидова геометрия сильнее аффинной. Точно так же структура аффинного пространства богаче структуры проективного пространства, а аффинная геометрия сильнее проективной.

2. Рассмотрим некоторое множество  $E \neq \emptyset$  и тесно связанное с ним множество  $\mathcal{P}(E)$  его частей. Если на множестве  $E$  не определено никакой структуры, то об элементах из  $\mathcal{P}(E)$ , т. е. о подмножествах из  $E$ , мало что можно сказать. У нас нет никаких оснований некоторые элементы из  $\mathcal{P}(E)$  называть, скажем, прямыми, другие — плоскостями, третьи — квадриками и т. п. Да и пользы от таких названий не будет.

Но допустим теперь, что на множестве  $E$  определена структура аффинного пространства. Тогда элементы из  $\mathcal{P}(E)$  приобретают определенные свойства: выделяются прямые, отрезки, треугольники, квадрики и т. д. У каждого отрезка имеется середина, у каждого треугольника — точка пересечения медиан и т. д. Если же возьмем структуру евклидова пространства, более богатую, чем структура аффинного пространства, то у элементов из  $\mathcal{P}(E)$  появляются новые свойства: длина отрезка, величина угла, с треугольником связаны вписанная и описанная окружности и т. д.

Мы можем сказать, что задание на множестве  $E$  какой-либо структуры всегда индуцирует определенные свойства его подмножеств (элементов из  $\mathcal{P}(E)$ ).

Это обстоятельство позволяет по-иному взглянуть на предмет геометрии. Все пространства, изучаемые в геометрии, — это прежде всего топологические пространства. Чаще всего, это топологические многообразия с обогашенной структурой.

Следовательно, каждое такое пространство представляет собой некоторое множество  $M$ , на котором задана структура более богатая, чем структура топологического пространства. Задача геометрии

пространства  $M$  формулируется просто: *изучить те свойства фигур из  $M$  (т. е. свойства элементов из  $\mathcal{S}(M)$ ), которые индуцированы структурой пространства  $M$ .*

Такой взгляд на геометрию восходит к Д. Гильберту и его «Основаниям геометрии». Но, пожалуй, не будет ошибкой сказать, что такого же взгляда придерживался и Евклид, который, конечно, не знал никаких групп преобразований. В геометрической части «Начал» Евклид последовательно изучает те свойства фигур, которые индуцированы структурой пространства (евклидова).

Мы имеем, следовательно, две точки зрения на предмет геометрии:

а) групповая точка зрения, изложенная Ф. Клейном в его «Эрлангенской программе», в соответствии с которой в основу геометрии того или иного пространства положена определенная группа преобразований;

б) точка зрения Д. Гильберта, когда в основу геометрии положена структура пространства, определяемая некоторой системой аксиом.

Какая существует связь между этими двумя подходами к геометрии?

**3.** Напомним, что группа  $G$  преобразований множества  $E$  называется *транзитивной*, если она удовлетворяет условию: каковы бы ни были  $x, y \in E$ , существует преобразование  $f$  из группы  $G$ , такое, что  $y = f(x)$ .

Топологическое многообразие  $X$  называется *однородным пространством* (или пространством Клейна), если в нем определена транзитивная группа  $G$  гомеоморфизмов этого пространства на себя. При этом группа  $G$  называется *фундаментальной группой пространства  $X$* .

Следовательно, мы имеем род структуры однородного пространства. Примерами однородных пространств служат евклидово, аффинное и проективное пространства.

Пусть  $M$  — некоторое пространство, изучаемое в геометрии. Это значит, что на множестве  $M$  задана определенная структура  $\sigma$ , которая богаче структуры топологического пространства.

*Автоморфизмом* пространства  $M$  называется такой гомеоморфизм  $f$  пространства  $M$  на себя, который сохраняет структуру этого пространства. Это значит, что если фигуры  $F_1$  и  $F_2$  пространства  $M$  находятся в некотором отношении  $\Delta$  (свойства которого описаны системой аксиом  $\Sigma$ , определяющей структуру  $\sigma$ ), то и фигуры  $f(F_1)$ ,  $f(F_2)$  находятся в том же отношении  $\Delta$ .

Множество всех автоморфизмов пространства  $M$  является группой. Ясно, что всякое свойство фигур пространства  $M$ , индуцированное структурой  $\sigma$ , сохраняется при любых автоморфизмах этого пространства. Если  $X$  — однородное пространство с фундаментальной группой  $G$ , то его группой автоморфизмов как раз и является группа  $G$ .

Из определения однородного пространства можно заключить, что всякое свойство фигур этого пространства, инвариантное относительно

но преобразований фундаментальной группы, является свойством, индуцированным структурой пространства.

Следовательно, в случае однородных пространств точка зрения Ф. Клейна и точка зрения Д. Гильберта на геометрию пространства дают одно и то же.

Однако к настоящему времени известно много таких пространств, группы автоморфизмов которых не являются транзитивными. Простейшим примером здесь может служить общий случай пространства аффинной связности, когда группа автоморфизмов пространства состоит из одного тождественного преобразования. Эти пространства не укладываются в схему Ф. Клейна, но они имеют достаточно богатую геометрию, если подходить к ним с точки зрения Д. Гильберта.

Таким образом, в настоящее время геометрию понимают как теорию структур, более богатых, чем структура топологического многообразия. Такой взгляд на геометрию является существенным обобщением той точки зрения на предмет геометрии, которая была более 100 лет назад (в 1872 г.) сформулирована Ф. Клейном в его «Эрлангенской программе».

Современная геометрия имеет много прекрасных разделов. Но о них уместно вести речь в специальных и факультативных курсах.

## ИЗ ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИИ

1. В главе IX мы говорили о развитии геометрии в древности, приведем к появлению «Начал» Евклида, и о последующих исследованиях по обоснованию геометрии. В настоящем параграфе мы приведем краткие сведения из истории проективной и дифференциальной геометрии.

Гармонические свойства полного четырехвершинника были известны Аполлонию (ок. 260—170 гг. до н. э.), автору «Конических сечений». Греческий геометр Папп (III в.) доказал теорему, которая представляет собой тот частный случай теоремы Паскаля о шестивершиннике, вписанном в кривую второго порядка, когда эта кривая распадается на пару прямых.

Расцвет живописи в эпоху Возрождения вызвал появление теоретических исследований правил перспективы (Альберти (1404—1472), Леонардо да Винчи (1452—1519), А. Дюрер (1471—1528) и др.). Эти исследования явились источником различных обобщений, которые привели к созданию проективной геометрии.

Дезарг (1593—1662) считал перспективу общим методом исследования. Он ввел в рассмотрение бесконечно удаленные точки пространства и получил, таким образом, расширенное пространство как модель проективного. Он же доказал теорему о перспективных трехвершинниках, носящую его имя. Дезарга справедливо считают основоположником проективной геометрии.

Паскаль (1623—1662) в возрасте 16 лет доказал теорему, носящую его имя, и получил из нее многочисленные следствия.

Понселе (1788—1867) рассматривает проективное отображение плоскости как произведение нескольких перспективных отображений,

выделяет и изучает проективные свойства фигур как инвариантные свойства фигур при проективных отображениях.

Понселе и Жергон (1771—1859) создали теорию поляритета. Термин «поляра» ввел Жергон.

Мебиус (1790—1868) в «Барицентрическом исчислении» (1827) впервые вводит проективные координаты в виде барицентрических координат и широко применяет их в геометрии. Он же пришел к понятию преобразования пространства как биективного отображения пространства на себя.

Штейнер (1796—1863) открыл способ образования конических сечений при помощи двух проективных пучков прямых. Он же развил теорию геометрических построений, получивших впоследствии название «построения Штейнера».

Штаудт (1798—1867) строит проективную геометрию, не используя какие бы то ни было метрические понятия. В основу своих построений он кладет понятие гармонической четверки, которая определяется чисто геометрически с помощью полного четырехвершинника. До Штаудта проективное пространство рассматривали как пространство, полученное путем расширения евклидова пространства, и многие проективные понятия вводили с использованием метрических понятий (длин отрезков, величин углов, площадей треугольников).

Кэли (1821—1895) и Клейн (1849—1925) построили проективные интерпретации пространств: евклидова, эллиптического и гиперболического (пространства Лобачевского).

Отметим важнейшие результаты по проективной геометрии отечественных ученых.

К. А. Андреев (1848—1921) находит проективное построение алгебраических кривых высших порядков. Он же изучает свойства «многоугольников Понселе» (таких многоугольников, которые описаны около одного конического сечения и вписаны в другое).

А. К. Власов (1868—1922) изучает проективные свойства линейных систем конических сечений. Ряд геометрических проблем он решает в многомерном проективном пространстве.

Н. А. Глаголев (1888—1945) решает общую задачу проективного исчисления, начатого в работах Штаудта. Н. А. Глаголев широко применяет проективную геометрию к задачам номографии и начертательной геометрии.

А. Н. Колмогоров (р. 1903 г.) в 1932 г. дает обоснование проективной геометрии с точки зрения топологии.

Алгебраическое определение проективного  $n$ -пространства  $P_n$  над полем вещественных чисел восходит к Веблену и Уайтхеду (1932). Определение проективного пространства  $P_n(K)$ , где  $K$  — произвольное поле, дано Лефшецем в его лекциях по алгебраической геометрии, прочитанных в Принстоне в 30-е годы XX в. Эти пространства играют важную роль в современных исследованиях по алгебраической геометрии. Полученные в этом направлении результаты столь обширны, что в нашем кратком очерке не представляется возможным в какой-то мере доступно изложить хотя бы важнейшие

из них, и мы отсылаем интересующихся к специальным монографиям по алгебраической геометрии.

Наконец, отметим, что в последние 15—20 лет внимание ряда геометров привлекают проблемы геометрии пространств над алгебрами. Эти пространства строят по аналогии с пространством  $P_n(K)$ , но вместо поля  $K$  берут ту или иную алгебру.

2. Развитие дифференциальной геометрии (исследующей фигуры средствами математического анализа) началось с создания дифференциального исчисления. Уже Лейбниц (1646—1716) применял дифференциальное исчисление к изучению кривых. Его ученик И. Бернулли (1667—1748) получил дифференциальное уравнение геодезической линии на поверхности. Ученик И. Бернулли — Леонард Эйлер (1707—1783) многие годы работал в Петербурге как член Петербургской академии наук. Эйлеру принадлежат блестящие исследования по многим разделам математики. В геометрии Эйлер исследовал кривизну нормального сечения поверхности в данной точке, определил главные направления, главные кривизны и кривизну поверхности как произведение главных кривизн. Для кривой в пространстве он находит соприкасающуюся плоскость, вводит главную нормаль и бинормаль. Он же рассматривает развертывающиеся поверхности, доказывает их наложимость на плоскость, определяет понятие изгибания поверхности.

Г. Монж (1746—1828) — создатель начертательной геометрии (метод Монжа). В своих лекциях «Приложение анализа» он изучает образование поверхностей линиями. Известна теорема Монжа о том, что нормали поверхности вдоль линии кривизны образуют развертывающуюся поверхность.

Гаусс (1777—1855) вводит параметризацию поверхности, первую и вторую квадратичные формы поверхности, получает кривизну поверхности в точке с помощью привлечения сферического изображения поверхности. Ему принадлежит теорема о сохранении кривизны при изгибании и теорема о сумме углов геодезического треугольника.

Профессор университета в Тарту, почетный член Петербургской академии наук Ф. Г. Миндинг (1806—1885) получил известность исследованиями по изгибанию поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Его ученик К. М. Петерсон (1828—1880) получил классические результаты по изгибанию поверхности на главном основании. От К. М. Петерсона (работавшего в Москве) берет свое начало московская школа дифференциальной геометрии.

Д. Ф. Егоров (1869—1931) ввел в рассмотрение и изучил специальный вид сетей (потенциальные сети Егорова), исследовал различные проблемы образования поверхностей линиями.

Другое направление в развитии дифференциальной геометрии идет от открытия геометрии Лобачевского. Это открытие доказало возможность существования новых пространств (в частности, новых метрических пространств), отличных от евклидова.

Б. Риман (1826—1866) в 1854 г. читает в Геттингенском университете лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».

В этой лекции он впервые рассматривает  $n$ -мерное многообразие, в котором расстояние между двумя бесконечно близкими точками  $x^i$  и  $x^i + dx^i$  определяется с помощью заданной положительно определенной квадратичной формы  $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$  (впоследствии такие многообразия получили название римановых пространств, а их геометрия стала называться римановой геометрией). Здесь же он рассматривает и частный случай таких многообразий — эллиптические пространства Римана.

В связи с применением римановой геометрии в теории относительности Эйнштейна эта геометрия и ее обобщения получили бурное развитие в первой половине XX в. При этом широко используется тензорный метод исследования. Основы тензорного анализа разработал Риччи (1853—1925). Его ученик Леви-Чивита (1873—1941), используя аппарат тензорного анализа, определил параллельный перенос векторов в римановом многообразии.

В. Ф. Каган (1869—1953) создал большую тензорную школу отечественной геометрии, которая включает в себя саратовскую школу В. В. Вагнера (1908—1981), казанскую школу А. П. Нордена (р. 1904 г.) и московскую школу П. К. Рашевского (1907—1983). Независимо от В. Ф. Кагана тензорные методы в геометрии развивал в Казани П. А. Широков (1895—1944). В 1925 г. П. А. Широков открыл большой класс римановых пространств — симметрические пространства (независимо от П. А. Широкова к этим пространствам пришел Э. Картан в 1926 г.). Симметрические пространства Широкова — Картана играют важную роль во многих современных исследованиях по геометрии и анализу.

Э. Картан (1869—1951) ввел общее понятие пространства со связностью. Частным случаем таких пространств являются римановы пространства. Э. Картан создал метод внешних форм и дал многочисленные приложения этого метода к проблемам дифференциальной геометрии. Большая заслуга в пропаганде метода внешних форм и дальнейшем развитии как самого метода, так и его приложений принадлежит С. П. Финикову (1883—1964).

В первой половине XX в. большое развитие получила геометрия линейчатых многообразий (образующим элементом которых служит прямая) в евклидовом и проективном пространствах. Многие классические результаты в этом направлении принадлежат Л. Бианки (1856—1928), Э. Картану и С. П. Финикову.

Отправляясь от исследований Э. Картана, С. П. Финикова и В. В. Вагнера, Г. Ф. Лаптев (1909—1972) создал один из сильнейших методов современных дифференциально-геометрических исследований — метод продолжений и охватов полей геометрических объектов на гладком многообразии.

В XX в. создан новый раздел геометрии — дифференциальная геометрия в целом. У нас это направление представлено работами А. Д. Александрова, А. В. Погорелова, Н. В. Ефимова (1910—1982), Э. Г. Позняка и их многочисленных учеников. Используя, кроме средств анализа, также методы топологии, авторы этих работ получили много глубоких результатов по геометрии поверхностей.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолют плоскости Лобачевского** 326  
**Абсолютная геометрия** 259  
**Автоморфизм** 280  
**Аксиома Лобачевского** 259  
**Аксиомы Вейля пространства  $E_3$**  288  
 — пространства Лобачевского 259  
 — — метрического 139  
 — — проективного 9  
 — — топологического 142  
 — — эллиптического 336  
 — структур рода  $T$  277  
 — школьного курса геометрии 300, 303  
**Аксонометрия** 112  
  
**База топологии** 144  
**Бинормаль** 192  
  
**Вектор мнимоединичный** 322  
 — кривизны 190  
**Винтовая линия** 197  
**Внутренность множества** 141  
**Внутренняя геометрия поверхности** 225  
  
**Гексаэдр правильный** 168  
**Геометрическое тело** 161  
**Геометрия абсолютная** 259  
 — Лобачевского 250  
 — проективной группы 40  
 — сферическая 333  
 — эллиптическая Римана 336  
**Главные направления в точке поверхности** 218  
**Гомеоморфизм** 146  
**Гомология** 37  
 — гиперболическая 38  
 — параболическая 38  
**Граница множества** 141  
**Группа (структура группы)** 277  
 — проективная 39  
 — симметрией фигуры 173  
  
**Двуугольник** 333  
**Дефект геодезического треугольника** 239  
**Длина дуги** 189  
 — отрезка 306  
**Додекаэдр правильный** 171  
  
**Евклидово определенное изображение** 126  
  
**Задача позиционная** 120  
**Замыкание множества** 145  
**Зеркально-поворотная ось порядка  $2n$**  173  
  
**Изгибание поверхности** 232  
**Измерение отрезков** 307  
**Изображение фигуры** 96  
 — полное 119  
**Изоморфизм** 279  
**Икосаэдр правильный** 170  
  
**Инволюция** 50  
 — гиперболическая 51  
 — эллиптическая 51  
**Индикатриса Дюпена** 216  
**Интерпретация Кэли — Клейна** 326  
 — системы аксиом 16, 279  
  
**Карта  $k$ -мерная** 150  
**Касательная** 58, 208  
**Квадратичная форма I** 211  
 — — II 215  
**Клетка** 153  
**Конгруэнция прямых** 209  
**Координаты криволинейные** 203  
 — проективные 13,14  
 — прямой 23  
**Коэффициент неполноты изображения** 120  
**Край многообразия** 151  
 — поверхности 202  
**Кривая см. Линия** 183  
**Кривизна линии** 190  
 — — геодезическая 229  
 — — нормальная 215  
 — — поверхности полная 220  
 — средняя 220  
**Кривизны главные** 218  
**Кривые Бертрана** 198  
**Кручение линии** 193  
  
**Линейный элемент поверхности** 211  
**Линия** 54,183  
 — второго порядка нулевая 56  
 — — — овальная 56  
 — геодезическая 234  
 — гладкая 184  
 — кривизны 220  
 — кусочно-гладкая 185  
 — плоская 193  
 — простая 184  
 — элементарная 182  
**Лист Мебиуса** 152, 158  
**Ломаная** 312  
 — простая 312  
  
**Метод Монжа** 131  
**Метрика** 139  
**Многогранник** 163  
 — правильный 168  
 — простой 163  
 — топологически правильный 167  
**Многогранники взаимные** 173  
**Многообразие** 150  
 — ориентируемое 155  
 — с краем 151  
  
**Многоугольники равновеликие** 319  
 — равноставленные 319

- Многоугольник ориентированный 313
- простой 313
- характеристика 314
- Множество замкнутое 145
  - компактное 149
  - ограниченное 141
  - открытое 141, 142
- Модель Кэли — Клейна 284, 325
  - — —, параллельные прямые 330
  - — —, перпендикулярные прямые 331
  - — —, расходящиеся прямые 330
  - проективного пространства 16
- Независимость аксиомы параллельных от остальных аксиом Гильберта 288
  - системы аксиом 282
- Непротиворечивость системы аксиом Вейля 290
  - — — Гильберта 300
  - гиперболической плоскости 284
- Несобственная точка (прямая) 7, 70
- Нормаль главная линии 191
  - к поверхности 209
- Нормальная форма 2-мерного компактного многообразия 158
- Нормальное сечение поверхности 215
- Область 161
  - ограниченная 161
- Объем многогранника 320
- Окрестность координатная 150
  - точки 143
- Октаэдр правильный 169
- Орицикл 270
- Ось гомотопии 37
  - симметрии порядка  $n$  фигуры 173
- Отношение двойное (сложное) 28
- Отображение непрерывное 146
  - перспективное 46
  - проективное 45
  - топологическое 146
- Отрезок единичный 301, 306
- Параметризация линии естественная 190
- Плоскость изображений 96
  - касательная к поверхности 208
  - нормальная 192
  - расширенная 7
  - симметрии фигуры 173
  - соприкасающаяся 192
  - спрямляющая 192
- Площадь многоугольника 315
  - сферического треугольника 336
- Поверхности изометричные 230
- Поверхность 201
  - гладкая 203
  - касательных 233
  - квадрируемая 213
  - кусочно-гладкая 213
  - простая 202
  - простейшая 201
  - развертывающаяся 234
- элементарная 201
- Подпокрытие 149
- Подпространство векторное касательное к поверхности 208
  - топологического пространства 145
- Покрытие 148
  - открытое 149
- Полота системы аксиом 283
- Полюс прямой 60
- Поляра точки 60
- Поляритет 60
- Преобразование инволютивное 285
- Преобразование проективное 34, 49
- Принцип двойственности 26
- Проективная комплексная плоскость 52
- Проективно-эквивалентные фигуры 39
- Проектирование ортогональное 92
  - параллельное 92
  - центральное 5
- Проекция точки 5, 15, 32, 92
  - фигуры 5, 93, 131
- Пространство векторное псевдоевклидово 321
  - компактное 149
  - Лобачевского (гиперболическое) 323
  - —, движение 324
  - —, радиус кривизны 323
  - —, расстояние между точками 323
  - метрическое 139
  - отделимое 148
  - проективное 9
  - связное 149
  - со счетной базой 144
  - топологическое 142
  - — антидискретное 143
  - — дискретное 143
  - числовое 143
  - эллиптическое 336
- Прямая расширенная 7
- Прямые параллельные на плоскости Лобачевского 260
  - расходящиеся 267
- Радиус кривизны 191
- Разбиение 149
- Разложение клеточное 153
- Ранг линии 2-го порядка 54
- Расстояние сферическое 334
- Ребро возврата 233
- Репер линии канонический 192
  - — (поверхности) подвижный 227
  - проективный 11
- Род многогранника 163
  - многообразия 157
- Ручка 152
- Свойства типологические 147
- Сеть координатная 204
  - линий кривизны 220
  - полугеодезическая 236
- Сечение многогранника 121

- Символы Кристоффеля 227  
 Система аксиом непротиворечивая 278  
 — — полная 283  
 Склеивание 152  
 Сложное отношение точек (прямых) 28, 33  
 Согласованная относительно репера система векторов 12, 14  
 Структура топологическая 142  
 Структуры изоморфные 279  
 — рода  $T$  277  
 Сфера с  $p$  ручками и  $r$  дырами 157
- Теорема А. Д. Александрова о многогранниках** 167  
 — взаимности поляритета 60  
 — Гаусса 227  
 — Гаусса — Бонне 238  
 — Дезарга 26  
 — косинусов для сферического треугольника 336  
 — Коши о жесткости выпуклого многогранника 166  
 — Паскаля 65  
 — Польке — Шварца 102  
 — Родрига 218  
 — Саккери — Лежандра первая 250  
 — — — вторая 250  
 — синусов для сферического треугольника 335  
 — Штейнера 62  
 — Эйлера для многогранников 163
- Теория структур рода  $T$**  278  
 — многозначная 283  
 — однозначная 283
- Тетраэдр правильный** 169
- Топология** 142  
 — антидискретная 143  
 — дискретная 143  
 — естественная в  $\mathbf{R}^n$  143  
 — индуцированная 145
- Топологический тип** 147
- Тор** 157
- Точка вещественная** 52  
 — внешняя 141  
 — внутренняя 140, 144, 202  
 — гиперболическая 217  
 — граничная 141, 202  
 — инвариантная 49
- мнимая 52  
 — обыкновенная линии (поверхности) 183  
 — омбилическая 217  
 — особая линии 184  
 — параболическая 217  
 — поверхности эллиптическая 217  
 — прикосновения множества 144
- Точки комплексно-сопряженные** 52
- Треугольник сферический** 239, 335
- Трехвершинник** 26  
 — автополярный первого рода 59
- Угол параллельности** 263
- Уравнение линии** 22  
 — фигуры 22
- Формула Родрига** 219
- Формулы дериационные поверхности** 227  
 — Френе 193
- Функция векторная** 178  
 — Лобачевского 264
- Характеристика многоугольника** 271
- Центр гомотопии** 38  
 — симметрии фигуры 173
- Циклические точки** 77
- Циклонда** 185
- Четверки гармонические** 42  
**Четвертая гармоническая** 44  
**Четырехвершинник полный** 42
- Шестивершинник простой** 64
- Эйлера характеристика многообразия** 153  
 — — тетраэдра 153  
 — — сферы 154
- Эквидистанта** 270
- Элементы симметрии фигуры** 173
- Эпюр** 131
- Якобиан отображения** 205

1. Александров П. С. Комбинаторная топология.— М.: ГИТТЛ, 1947.
2. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1966.
3. Атанасян Л. С., Гуревич Г. Б. Геометрия.— М.: Просвещение, 1976.— Ч. 2.
4. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия, II.— М.: Просвещение, 1975.
5. Берже М. Геометрия.— М.: Мир, 1984.— Т. 1, 2.
6. Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Элементы топологии и дифференциальная геометрия.— М.: Мир, 1985.
7. Гильберт Д. Основания геометрии.— М.: ГИТТЛ, 1948.
8. Глаголев Н. А. Начертательная геометрия.— М.: ГТТИ, 1946.
9. Егоров И. П. Геометрия.— М.: Просвещение, 1979.
10. Егоров И. П. Основания геометрии.— М.: Просвещение, 1984.
11. Ефимов Н. В. Высшая геометрия.— М.: Наука, 1978.
12. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология.— М.: Мир, 1972.
13. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии.— М.: Физматгиз, 1958.
14. Певзнер С. Л. Проективная геометрия.— М.: Просвещение, 1980.
15. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия.— М.: Наука, 1969.
16. Погорелов А. В. Основания геометрии.— М.: Наука, 1968.
17. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства.— М.: Наука, 1969.
18. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1970.
19. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.— М.: Наука, 1966.
20. Четверухин Н. Ф. Изображения фигур в курсе геометрии.— М.: Учпедгиз, 1958.
21. Энциклопедия элементарной математики.— М.: Наука, 1966.— Кн. IV и V.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

РАЗДЕЛ  
ТРЕТИЙ

**ПРОЕКТИВНОЕ  
ПРОСТРАНСТВО.  
МЕТОДЫ  
ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Предисловие . . . . .	3
Глава I. <b>Проективное пространство</b> . . . . .	5
§ 1. Центральное проектирование. Возникновение проективной геометрии . . . . .	—
§ 2. Понятие проективного пространства . . . . .	9
§ 3. Координаты точек на проективной плоскости и на проективной прямой . . . . .	11
§ 4. Модели проективной плоскости и проективного пространства . . . . .	16
§ 5. Преобразование координат точек на плоскости и на прямой . . . . .	18
§ 6. Уравнение прямой. Координаты прямой . . . . .	22
§ 7. Принцип двойственности . . . . .	24
§ 8. Теорема Дезарга . . . . .	26
§ 9. Сложное отношение четырех точек прямой . . . . .	28
§ 10. Сложное отношение четырех прямых пучка . . . . .	32
§ 11. Проективные преобразования плоскости . . . . .	34
§ 12. Предмет проективной геометрии. Аналитическое выражение проективных преобразований . . . . .	39
Глава II. <b>Основные факты проективной геометрии</b> . . . . .	42
§ 13. Полный четырехвершинник. Задачи на построение . . . . .	42
§ 14. Проективные отображения прямых и пучков . . . . .	45
§ 15. Проективные преобразования прямой. Инволюции . . . . .	49
§ 16. Мнимые точки проективной плоскости. Линии второго порядка . . . . .	51
§ 17. Проективная классификация линий второго порядка . . . . .	55
§ 18. Полюс и поляра . . . . .	57
§ 19. Овальная линия второго порядка . . . . .	61
§ 20. Задачи на построение, связанные с овальной линией . . . . .	65
§ 21. Геометрия на проективной плоскости с фиксированной прямой . . . . .	69
§ 22. Линии второго порядка на проективной плоскости с фиксированной прямой . . . . .	73
§ 23. Евклидова геометрия с проективной точки зрения . . . . .	77
§ 24. Перпендикулярность прямых, равенство отрезков и углов с проективной точки зрения . . . . .	80
§ 25. Приложение проективной геометрии к решению задач школьного курса геометрии . . . . .	85

Глава III. Методы изображений . . . . .	92
§ 26. Параллельное проектирование. Аффинные отображения . . . . .	92
§ 27. Изображение плоских фигур в параллельной проекции . . . . .	96
§ 28. Изображение многогранников в параллельной проекции . . . . .	101
§ 29. Изображения цилиндра, конуса и шара	106
§ 30. Аксонометрия . . . . .	111
§ 31. Полные и неполные изображения. Позиционные задачи . . . . .	119
§ 32. Построение сечений простейших многогранников . . . . .	121
§ 33. Метрические задачи . . . . .	125
§ 34. Понятие о методе Монжа . . . . .	131
Глава IV. Элементы топологии . . . . .	139
§ 35. Метрические пространства . . . . .	—
§ 36. Топологические пространства . . . . .	142
§ 37. Непрерывность и гомеоморфизм . . . . .	146
§ 38. Отделимость. Компактность. Связность	148
§ 39. Многообразия . . . . .	150
§ 40. Понятие о клеточном разложении. Эйлерова характеристика многообразия	153
§ 41. Ориентируемые и неориентируемые двумерные многообразия . . . . .	154
§ 42. Понятие о классификации компактных двумерных многообразий . . . . .	156
§ 43. Топологические свойства листа Мебиуса и проективной плоскости . . . . .	158
Глава V. Многогранники в евклидовом пространстве . . . . .	161
§ 44. Геометрическое тело . . . . .	—
§ 45. Выпуклые многогранники . . . . .	163
§ 46. Правильные многогранники . . . . .	167
§ 47. Группы симметрий правильных многогранников . . . . .	173
Глава VI. Линии в евклидовом пространстве	178
§ 48. Векторная функция скалярного аргумента . . . . .	—
§ 49. Понятие линии . . . . .	181
§ 50. Гладкие линии . . . . .	184
§ 51. Касательная. Длина дуги . . . . .	187
§ 52. Кривизна и кручение линии . . . . .	190
§ 53. Вычисление кривизны и кручения в произвольной параметризации. Винтовая линия	195
Глава VII. Поверхности в евклидовом пространстве . . . . .	199
§ 54. Понятие поверхности . . . . .	—
§ 55. Гладкие поверхности . . . . .	203
§ 56. Касательная плоскость и нормаль . . . . .	207
§ 57. Первая квадратичная форма поверхности	211
§ 58. Кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма . . . . .	214
§ 59. Главные кривизны. Полная и средняя кривизны поверхности . . . . .	218

РАЗДЕЛ  
ЧЕТВЕРТЫЙ  
ЭЛЕМЕНТЫ.  
ТОПОЛОГИИ.  
МНОГОГРАННИКИ.  
ЛИНИИ И  
ПОВЕРХНОСТИ  
В ЕВКЛИДОВОМ  
ПРОСТРАНСТВЕ

§ 60. Примеры поверхностей постоянной кривизны . . . . .	221
<b>Глава VIII. Внутренняя геометрия поверхности</b> . . . . .	<b>225</b>
§ 61. Внутренняя геометрия поверхности. Диверсионные формулы . . . . .	—
§ 62. Теорема Гаусса. Геодезическая кривизна линии на поверхности . . . . .	227
§ 63. Изометричные поверхности. Изгибание поверхности . . . . .	230
§ 64. Геодезические линии . . . . .	234
§ 65. Дефект геодезического треугольника . . . . .	238
§ 66. Теорема об эйлеровой характеристике для гладкой поверхности, гомеоморфной сфере с $p$ ручками . . . . .	240

РАЗДЕЛ  
ПЯТЫЙ

**ОСНОВАНИЯ  
ГЕОМЕТРИИ**

<b>Глава IX. Исторический обзор обоснования геометрии. Элементы геометрии Лобачевского</b> . . . . .	<b>242</b>
§ 67. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида . . . . .	—
§ 68. Критика системы Евклида . . . . .	245
§ 69. Пятый постулат Евклида . . . . .	247
§ 70. Н. И. Лобачевский и его геометрия . . . . .	250
§ 71. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом групп I—II . . . . .	253
§ 72. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом групп I—V . . . . .	256
§ 73. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые по Лобачевскому . . . . .	259
§ 74. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского . . . . .	264
§ 75. Взаимное расположение двух прямых на плоскости Лобачевского . . . . .	266
§ 76. Окружность, эквидистанта и орицикл . . . . .	270
<b>Глава X. Общие вопросы аксиоматики. Обоснование евклидовой геометрии</b> . . . . .	<b>275</b>
§ 77. Понятие о математической структуре . . . . .	—
§ 78. Интерпретации системы аксиом. Изоморфизм структур . . . . .	278
§ 79. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом . . . . .	280
§ 80. Доказательство логической непротиворечивости геометрии Лобачевского . . . . .	284
§ 81. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства . . . . .	288
§ 82. Луч, угол, отрезок . . . . .	292
§ 83. Равенство отрезков и углов. Длина отрезка . . . . .	295
§ 84. Аксиоматика А. В. Погорелова школьного курса геометрии . . . . .	300
§ 85. Об аксиомах школьного курса геометрии . . . . .	303
<b>Глава XI. Длина, площадь и объем</b> . . . . .	<b>306</b>
§ 86. Длина отрезка. Теорема существования . . . . .	—
§ 87. Измерение отрезков. Теорема единственности . . . . .	310
§ 88. Площадь многоугольника в евклидовой геометрии. Теорема существования . . . . .	312
§ 89. Теорема единственности. Равновеликие . . . . .	—

и равносоставленные многоугольники	316
§ 90. Объем многогранника в евклидовом пространстве (обзор)	319
Глава XII. <b>Неевклидовы геометрии</b>	321
§ 91. Гиперболическое пространство	—
§ 92. Модель Кэли — Клейна плоскости Лобачевского	325
§ 93. О свойствах параллельных и расходящихся прямых на плоскости Лобачевского	330
§ 94. Понятие о сферической геометрии	333
§ 95. Понятие об эллиптической геометрии Римана	336
Заключение	339
Что такое геометрия?	—
Из истории геометрии	341
Предметный указатель	345
Литература	348

**Левон Сергеевич Атанасян**  
**Вячеслав Тимофеевич Базылев**

## **ГЕОМЕТРИЯ**

**В 2-х частях**

### **Часть 2**

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*

Редактор *Т. В. Автономова*

Младший редактор *Л. Е. Козырева*

Художественный редактор *Е. Н. Карасик*

Технический редактор *С. С. Якушкина*

Корректор *Н. С. Соболева*

**ИБ № 10285**

Сдано в набор 29.10.86. Подписано к печати 20.05 87

Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub> Бум. офс № 2 Гарнитура литературная Печать офсетная

Усл печ. л. 22,0 Усл. кр.-отт 22,0. Уч.-изд. л. 22,94. Тираж 41 000 экз Заказ 168.

Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство  
«Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли 129846,  
Москва, 3-й проезд Марьиной роши, 41

Отпечатано с диапозитивов ордена Трудового Красного Знамени фабрики  
«Детская книга» № 1 Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли, 127018, Москва, Сушевский вал, 49 на  
Саратовском ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинате Росглавполиграф-  
прома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной тор-  
говли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

